제 2 교시

수학 영역

MENTOR

1. 정수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n = \left(\frac{|k|}{3} - 2\right)^n$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

[2022학년도 예시문항 수학 미적분 24번]

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

등비 수열의 수렴조건! ⇒ $\boxed{-1 < r \le 1}$

수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{|k|}{3} - 2$ 이다.

$-1 < \frac{|k|}{3} - 2 \le 1 \Rightarrow 3 < |k| \le 9$

$|k| = 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$\therefore$ 12개...

* 주의사항 !

$|k|$는 6개, k는 12개이다. (부호 때문)

만약, 선지에 6이 있었다면 틀리는 바보가 꼭 나온다... 남일이 아니야!!!

2. 그림과 같이 $\overline{OA_1} = \sqrt{3}$, $\overline{OC_1} = 1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 선분 B_1C_1 위의 $\overline{B_1D_1} = 2\overline{C_1D_1}$인 점 D_1에 대하여 중심이 B_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1D_1}$인 원과 선분 OA_1의 교점을 E_1, 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$인 원과 선분 OC_1의 교점을 C_2라 하자. 부채꼴 $B_1D_1E_1$의 내부와 부채꼴 $C_1C_2D_1$의 내부로 이루어진 ◁ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

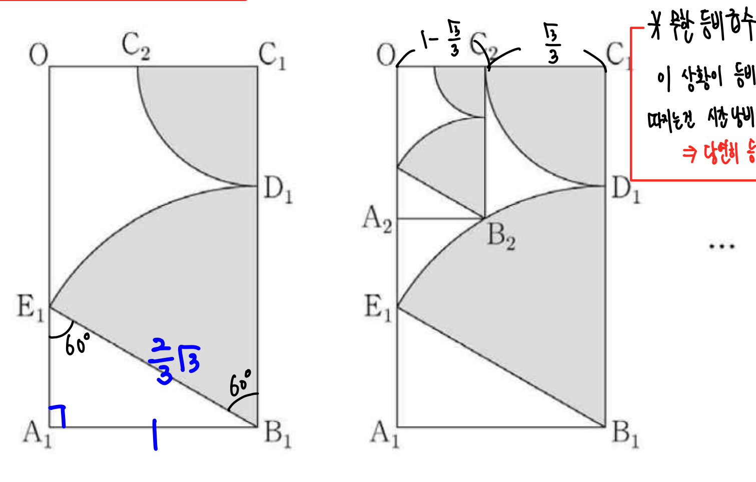
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2, 호 D_1E_1 위의 점 B_2와 점 C_2, 점 O를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 ◁ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

Mentor's tip

특수각의 적극적 활용!

[2022학년도 예시문항 수학 미적분 26번]



R_1 R_2 ...

* 무한 등비급수 문제에서는...

이 상황이 등비수열 인지, 닮음 관계인지 따지는건 시간 낭비이다..

⇒ 당연히 등비수열, 당연히 닮음이겠지!

① $\frac{5+2\sqrt{3}}{12}\pi$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{6}\pi$ ③ $\frac{3+2\sqrt{3}}{12}\pi$ ④ $\frac{1+\sqrt{3}}{6}\pi$ ⑤ $\frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$ ✓

Step 1. 공비구하기.

Mentor's tip

닮은 평면의 넓이 비 = 길이비^2

닮은 입체도형의 부피비 = 길이비^3

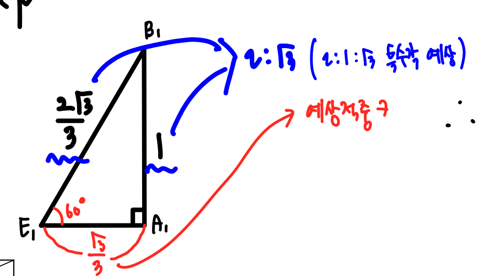
$\overline{C_1D_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 사분원 $C_2C_1D_1 = \frac{1}{12}\pi$

$\overline{B_1D_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $B_1D_1E_1 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{6} = \frac{2}{9}\pi$

공비 $= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Step 2!! 초항구하기

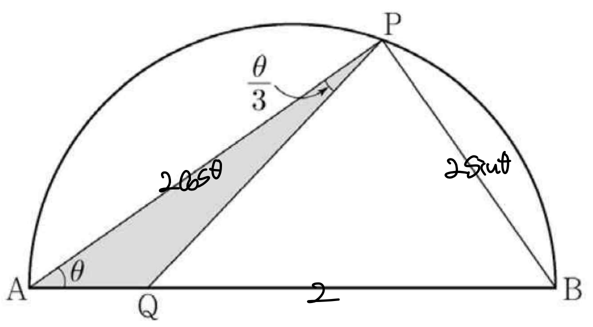
$\therefore$ 초항 $= \frac{11}{36}\pi$



$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{11}{36}\pi}{1 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}}{12}$

3. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있고, 선분 AB 위에 점 Q가 있다. $\angle PAB = \theta$이고 $\angle APQ = \frac{\theta}{3}$일 때, 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 PB의 길이를 $l(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{l(\theta)}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

[2022학년도 예시문항 수학 미적분 28번]



① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

일단, 할 수 있는 만큼 전부 길이를 표시할 것!

$l(\theta) = 2\sin\theta$

$\overline{AP} = 2\cos\theta$

* sin법칙 적용!

$$\frac{\overline{AP}}{\sin(\angle AQP)} = \frac{\overline{AQ}}{\sin\frac{\theta}{3}}$$

$$\overline{AQ} = \frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta} \times 2\cos\theta$$

$$S(\theta) = \frac{1}{\cancel{2}}\sin\theta \times \cancel{2}\cos\theta \times \frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta} \times 2\cos\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{l(\theta)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\cancel{\sin\theta}\cos^2\theta}{2\cancel{\sin\theta}} = \frac{1}{4}$$

Mentor's tip

나름 미적분 4점 중, 가장 쉬운 유형!
sin, cos 법칙을 적극 사용하자!
θ→0 일때 극한 계산, $\left(\begin{array}{l} \sin\theta, \tan\theta \to \theta \\ 1-\cos\theta \to \frac{\theta^2}{2} \\ \cos\theta \to 1 \end{array}\right)$
근사식을 참고 하자!

4. 함수 $f(x) = e^x + x - 1$과 양수 t에 대하여 함수

$$F(x) = \int_0^x \{t - f(s)\}ds$$

가 $x = \alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 α의 값을 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$의 값을 구하시오.

[2022학년도 예시문항 수학 미적분 29번]

Step 1!

묻지도, 따지지도 말고 할일 2개!
① $x=0$ 넣기
② x에 대해 미분하기!

① $F(0) = 0$

② $\frac{d}{dx}F(x) = t - f(x)$

→ $\int_a^x ds$ 를 미분하니, t는 상수취급! 주의하자!

Step 2!

발문 관찰하기.
⇒ 개떡같이 말해도 찰떡같이 알아들어라!

발문의 구간 관계 없이 미분가능한 함수의 최대, 최소 → 극값!

$t - f(g(t)) = 0$

$t = e^{g(t)} + g(t) - 1$ $t>0$ 에서 f와 g가 역함수 관계!

$1 = g'(t)e^{g(t)} + g'(t)$

$= g'(t)\left(e^{g(t)} + 1\right)$

$\therefore \boxed{\frac{1}{1+e^{g(t)}} = g'(t)}$ 우리가 원하는것!

뉴턴식 미분법 (Basic)

$$\Rightarrow \int_{f(1)}^{f(5)} g(t)g'(t)\,dt = \frac{1}{2}\{g(t)\}^2\Big|_{f(1)}^{f(5)} = \frac{1}{2}\{5^2 - 1^2\} = 12$$

Bonus!
라이프니츠 미분법 풀이!

$t = e^\alpha + \alpha - 1$

$1 = \frac{d\alpha}{dt}e^\alpha + \frac{d\alpha}{dt}$

$\frac{1}{e^\alpha + 1} = \frac{d\alpha}{dt}$

$\int_{f(1)}^{f(5)} \alpha \frac{d\alpha}{\cancel{dt}} \cancel{dt}$

$= \int_{f(1)}^{f(5)} \alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2\Big|_{f(1)}^{f(5)} = \frac{1}{2}(25-1) = 12$

Mentor's Tip

20수능 30번도 그렇고, 이번 문항도 그렇고, 뉴턴식 미분법 보단 라이프니츠의 미분법이 더 우세한 풀이를 보인다.
★변수가 많을 수록 라이프니츠 미분법이 우위를 점한다는것 명심하자!!
(만약 라이프니츠 미분법을 모른다면 공부해 두자!)

역함수 구하기.
→ x, y 위치 change
역함수 성질
$f \circ f^{-1} = x$

5. 두 양수 a, $b\,(b<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax & (x\le 0) \\ \dfrac{\ln(x+b)}{x} & (x>0) \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} -2x+a \\ \dfrac{\frac{x}{x+b}-\ln(x+b)}{x^2} \end{cases}$$

이라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$이라 할 때, 함수 $g(m)$은 다음 조건을 만족시킨다.

> $\lim\limits_{m\to\alpha-} g(m)-\lim\limits_{m\to\alpha+} g(m)=1$을 만족시키는 양수 α가 오직 하나 존재하고, 이 α에 대하여 점 $(b,\ f(b))$는 직선 $y=\alpha x$와 곡선 $y=f(x)$의 교점이다.

$ab^2=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이다.)

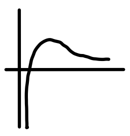
[2022학년도 예시문항 수학 미적분 30번]

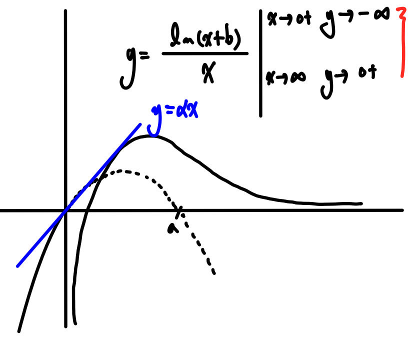
Step1.

주어진함수를 그릴 줄 알아야함.

$y=-x^2+ax$

$y=\dfrac{\ln(x+b)}{x}$ $\begin{vmatrix} x\to 0+ & y\to -\infty \\ x\to\infty & y\to 0+ \end{vmatrix}$ 이 관계로 부터 Graph 예상! ⇒





Step2. $x=0$

직선 $y=\alpha x$의 특징에 대해 생각!

① 원점을 지난다.

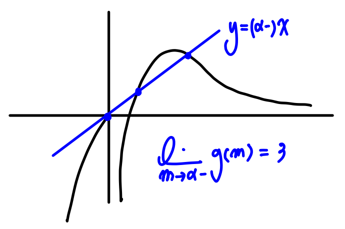
② $\lim\limits_{m\to\alpha-} g(m)-\lim\limits_{m\to\alpha+} g(m)=1$

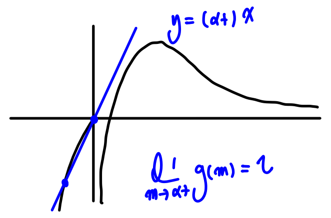
Mentor's tip

직선과 곡선의 관계는 높은 확률로 접할 때 이다!

⇒ 공동접선으로 $y=\alpha x$ 설정 후, 조건에 부합하는지 확인!

〈아님말고..〉



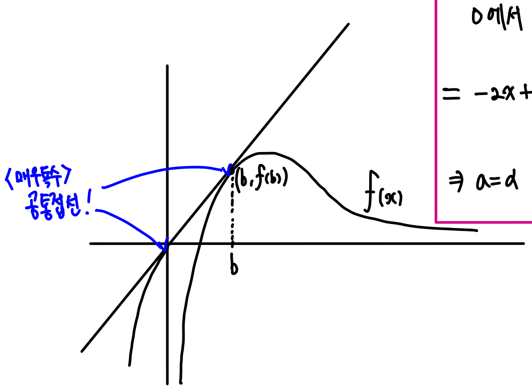


⇒ Mentor's tip에 의해 해본 접할 때가 조건 ②에 부합했다!

0에서 미분계수 $=\alpha$

$=-2x+a\Big|_{x=0}=\alpha$

$\Rightarrow a=\alpha$



Step3. 계산!

$x=b$ 에서

$$\begin{cases} ① & f(b)=\alpha b \\ ② & f'(b)=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① & \dfrac{\ln(2b)}{b}=\alpha b \\ ② & \dfrac{\frac{b}{2b}-\ln(2b)}{b^2}=\alpha \end{cases} \Rightarrow ①,② \text{ 연결}$$

$\ln(2b)=\alpha b^2=\frac{1}{2}-\ln(2b)$

$\Rightarrow 2b=e^{\frac{1}{4}}$,

$b=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}$, $\alpha=a=\dfrac{\ln e^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$

$\therefore ab^2=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}\times\dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{4}$ $\therefore$ ⑤