반갑습니다!

다른 과목들 모두 개념이 중요하지만, 확률과 통계는 특히 개념이 정확하게 잡혀있다면 과목 자체가 쉬워지기에 이런 방식으로 해주는 것이 도움이 될 것 같네요. 그래서 오늘은 그 중에서도 개념이 중요한 중복조합에 대한 이야기를 해보려고 합니다. 자료는 물론 제 나름 친절하게 적겠지만 해당 단원의 개념을 1번도 듣지 않거나 공부하지 않은 학생에게는 뒷부분이 상당히 어려울 수 있어요. 먼저 앞부분 개념만 읽고 **가장 기본이 되는 공부는 먼저 하시고**, 다시 오시기 바랍니다. 여기선 조금 더 알아가거나 태도를 배워가고, 기출을 가볍게 분석하는 용도로 사용해주시면 감사하겠습니다.

중복조합이란?

이거 은근 정의를 설명하지 못하시는 분들이 많더라고요.

중복조합은 **서로 다른 n개 중 k개를 중복을 허용하며 순서를 고려하지 않고 선택**하는 것을 말합니다. 예를 들어 세 문자 a, b, c를 중복을 허용하여 7개를 선택하는 경우의 수를 구해봅시다. 이때 우리는 뽑힌 문자를 알파벳 순으로 나열을 할 것입니다.

a|bbb|ccc, aaa|bb|cc처럼 말이죠. 이때 저는 알파벳 사이를 |(칸막이)로 구분을 해두었습니다. 여기서 중복조합을 계산하는 아이디어를 얻을 수 있습니다.

모든 알파벳을 일단 O라고 두겠습니다. 원래 알파벳이 3종류 있었으니 이들을 구분하기 위해서는 칸막이가 2개 필요합니다. 칸막이 앞쪽은 a, 사이에는 b, 뒤쪽에는 c가 위치하도록 하는 것입니다. **이제 7개의 알파벳과 두 칸막이 OOOOOOO||**를 배열합니다.

경우의 수는 일단 ${}_9C_2$이고, 결과 중 하나인 OOO|OO|OO는 위의 aaabbcc에 대응하죠.

참고로 OOO||OOOO 이건 칸막이 사이에 알파벳이 없으니 aaacccc가 됩니다. 이런 식으로 칸막이와 O의 배열이 중복조합과 동일한 경우의 수를 가진다는 것을 알 수 있죠.

이걸 문자로 일반화한다면 $\boldsymbol{{}_nH_k = {}_{n+k-1}C_k}$ 가 됩니다. 이제부터는 증명 없이, 중복조합을 그냥 바로 계산하도록 하겠습니다.

중복조합의 원형

특히 중복조합에서 가장 중요한 아이디어는 '**익숙한 꼴로 끌고가기**'입니다. 이번엔 그 익숙한 꼴에 해당하는 원형을 몇 가지 살펴보고, 이를 기출에서 어떻게 적용하는지 살펴보죠.

1. 문자 배열

바로 위의 예시가 여기에 해당합니다. 중복조합의 정의에 맞는 가장 직관적이고 기본적인 원형이에요. 관련 기출문제 하나만 예제로 풀고 넘어갑시다.

[예제 1번, 141109(가)]

숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 5개를 택할 때, 숫자 4가 한 개 이하가 되는 경우의 수는?

마찬가지로 5개를 크기 순으로 배열하면 끝나는 문제입니다. 이때 숫자 4가 한 개 이하가 되도록 하는 경우는 4가 한 번 선택될 경우의 수와 숫자 4가 선택되지 않을 경우의 수를 더해주면 됩니다. 물론 나중에는 더 쉽게 풀 수 있겠지만요.

숫자 4를 한 번 선택한 경우 배열은 4가 가장 마지막에 가니 _ _ _ _ 4 형태가 될 것입니다. 그리고 4개의 _ 자리에 1~3을 집어넣으면 됩니다. ${}_3H_4 = 15$가 되겠군요.

숫자 4를 선택하지 않은 경우 그냥 1~3를 5번 택해주면 됩니다. ${}_3H_5 = 21$입니다.

더해주면 경우의 수는 36이 됩니다.

2. 사탕 나눠주기

메가, 큐브, 스터디 3명의 학생에게 7개의 사탕을 나눠주도록 합시다. 예를들어 메가는 2개, 큐브는 ~~미우니까~~ 0개, 스터디에게는 5개를 준다고 해봅시다. 위처럼 표현하면 메메스스스스스 이렇게 되겠군요. 사실 이것도 문자배열과 다르지 않은 것이에요. 학생의 숫자가 n, 사탕의 개수가 k에 해당하는 중복조합이군요.

이거랑 비슷하면서도 다른게 중복순열입니다. 사탕에 번호 1~7을 부여한 후 각각의 사탕을 나눠주는 경우의 수를 생각해보면 1번 사탕을 받을 학생을 선택하는 경우의 수(3), 2번 사탕을 받을 학생을 선택하는 경우의 수(3) .... 를 모두 곱해주는 것이죠.

예제 하나만 더 풀고 넘어갑시다.

[예제 2번, 131112(나)]

같은 종류의 주스 4병, 같은 종류의 생수 2병, 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 1병도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)

아직까지는 쉽죠?

여기서 가장 주의해야 할 점은 **모든 사람은 서로 다른 사람들로 취급**한다는 것입니다. 서로 다른 3명이라는 말이 없더라도 3명은 서로 다른 사람이에요. 당연하죠.

위 문항은 주스, 생수, 우유를 독립적으로 그냥 나눠주면 됩니다. 각각의 경우의 수를 구한 후 곱해줍시다.

예시와 동일한 이유로 경우의 수는 ${}_3H_4 \times {}_3H_2 \times {}_3H_1 = 270$입니다.

3. 함수의 개수

바로 작년 수능에 나온 원형입니다. 문제부터 살펴봅시다.

[예제 3번, 211113(나)]

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는?

$f(2) \le f(3) \le f(4)$

제약이 없는 녀석 먼저 처리합시다. $f(1)$은 1~4 모두 가능하죠? 문제에 언급이 없다면 조건도 없는거고, **자유로운 것이니 먼저 처리하고 생각하시는게 편합니다.**

이제 박스 안의 조건을 풀어볼건데, 이렇게 한번 생각해봅시다. $y = f(x)$의 공역인 1~4에서 중복을 허락하여 숫자 3개를 뽑아 오름차순으로 나열합니다. 예를 들어 3을 한 번, 1을 두 번 뽑았다면 1, 1, 3으로 배열할 수 있겠죠. 이 배열 그대로 $f(2), f(3), f(4)$라고 생각해주시면 됩니다. 이때 $f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 3$이 되는거죠. 이러면 조건을 만족합니다.

살짝 일반화하자면 $y = g(x)$의 정의역이 k까지의 자연수, 공역이 n까지의 자연수이라고 할 때 $g(1) \le g(2) \le \cdots \le g(k)$이라면 공역의 n개의 자연수 중 중복을 허락하여 k개를 선택한 후, 오름차순으로 나열해주면 끝납니다. ${}_nH_m$이 되겠군요.

위 예시의 정답은 $4 \times {}_4H_3 = 80$입니다. 중복조합의 원형들을 알고 있었다면 쉽게 풀 수 있었겠군요.

4. 부정방정식의 정수해

가장 유명하고 가장 중요한 원형입니다. 기출에서도 가장 자주 등장하는 원형이구요.

방정식 $a+b+c=7$를 만족하는 음이 아닌 정수들의 순서쌍 (a, b, c)를 찾아봅시다.

음의 아닌 정수는 0과 자연수를 의미하니까 이러한 순서쌍에는 (3, 0, 4) 등등 많이 있겠죠? 이때 순서쌍 (3, 0, 4)는 a가 3개, b가 0개, c가 4개 뽑힌거라고 생각합시다. 즉 3가지 종류의 알파벳이 총 7가지 있는거죠.

느낌이 오시나요? 이 방정식의 해의 개수 역시 문자 배열과 똑같이 생각할 수 있어요. 위 순서쌍은 문자 배열에서 aaacccc에 해당하고 (2,2,3)은 aabbccc가 되겠군요.

이 원형의 가장 중요한 점은 문자들이 **음이 아닌 정수들**이라는 것입니다. 이를 만족하지 못한다면 만족하게 변형을 조금 해주어야 해요. 예를 들어 **방정식 $a+b+c=7$를 만족하는 자연수 순서쌍 (a, b, c)**를 찾아봅시다.

음... ${}_3H_7$! 하시면 큰일나요. 모두 자연수이기에 (0, 2, 5)와 같은 케이스는 빼주셔야 합니다. 중복조합 그대로 생각하면 bbccccc가 들어가지만 이건 문제에서 찾고자 하는 순서쌍에는 들어가지 않아요. 이 문제를 2가지 방법으로 풀어봅시다.

먼저 a, b, c 각각 1번씩은 사용되어야 합니다. 문자 배열로 생각한다면 abc _ _ _ _ 이렇게 되는거죠. abcaaaa, abcaabc 등등이 가능할거에요. 살짝 느낌이 오시나요? Abc는 그대로 두고 뒤에 있는 _ _ _ _ 4개에만 문자들을 배열해주면 끝납니다. 답은 ${}_3H_4$에요.

이번엔 방정식 자체를 변형하여 풀어봅시다. 조금 어려울 수 있어요.

일단 $a' = a-1$이라고 합시다. 즉 a′은 a보다 1만큼 작은 녀석이에요. b', c'역시 b, c보다 1만큼 작은 녀석이라고 할 수 있겠군요. 그러면 a, b, c는 자연수였지만 a′, b′, c′은 음이 아닌 정수들이 되겠죠? 이때 만약 $(a', b', c') = (0,1,3)$이라면 $(a,b,c) = (1,2,4)$가 될거에요. 또 $a+b+c=7 \rightarrow (a-1)+(b-1)+(c-1)=4 \rightarrow a'+b'+c'=4$ 으로 방정식을 바꿔줄 수 있어요. 이제 문제는

방정식 $a'+b'+c'=7$를 만족하는 음이 아닌 정수들의 순서쌍 (a′, b′, c′)를 찾는 문제로 바뀐거에요. 답은 마찬가지로 ${}_3H_4$입니다.

이게 가능했던 이유는 (a', b', c')와 (a, b, c)의 개수가 **일대일로 하나씩 대응**되기 때문이에요. 위에서 확인했다시피 (a', b', c')하나당 정확하게 (a, b, c)가 하나씩 대응됩니다. 왜냐면 당연하지만 $a' = a - 1$에서 a′와 a가 일대일 대응 관계기 때문이에요.

관련 예제를 풀어보고, 이렇게 일대일대응이 안될 때에는 어떻게 풀어야 하는지 알아봅시다.

[예제 4번, 180916(나)]

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는?

(가) $x + y + z = 10$
(나) $0 < y + z < 10$

(가)는 이미 우리가 배웠던 원형입니다. 문제는 (나)인데,, 일단 (가)에서 y, z는 음이 아닌 정수이니 $0 \le y + z$ 는 당연한 부분이죠. 마찬가지로 $y + z$는 애초에 10을 초과할 수 없어요. 다 합쳐서 10이 나와야 하니까

즉 (나)는 조건 (가)에서 $y + z = 0$ 또는 $y + z = 10$인 케이스를 제거해주면 됩니다.

쉽네요. (가)의 전체 경우의 수 ${}_3H_{10}$에서 $y + z = 0$인 케이스 1개, $y + z = 10$인 케이스 ${}_2H_{10}$를 빼주면 정답은 54입니다.

[예제 5번, 자작]

다음 조건을 만족시키는 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

(가) $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert + \lvert c\rvert = 9$
(나) a, b, c중에서 0의 개수는 1개이다.

짧지만 쉽지는 않아요. 가장 먼저 생각할 수 있는 풀이는 앞의 일대일 대응을 이용하여 $\lvert a\rvert = a'$로 치환하여 $a' + b' + c' = 9$로 바꿔서 푸는 것일거에요. 하지만 이렇게 풀면 답이 안나오죠. **일대일 대응이 아니거든요**.

$a' = 4$라고 하면 a는 4와 -4 2개가 가능합니다. 절댓값이니까 음수, 양수 두개씩 나오죠.

어 그러면 2배씩만 해주면 되는거 아냐? 하실 수 있을텐데 아쉽게도 $\lvert a\rvert = 0$인 경우 a 역시 0으로 하나밖에 안나옵니다. 또 조건 (나)에서 0의 개수가 1개라는 추가 조건도 있죠.

이렇게 풀어봅시다. 먼저 a, b, c 중 0이 될 문자를 고릅니다. $(\times 3)$ 저는 a가 0이라고 할게요. 이제 $\lvert b\rvert + \lvert c\rvert = 9$ 이면서 b와 c는 0이 될 수 없습니다. 이제 치환을 해줍니다. $\lvert b\rvert = b', \lvert c\rvert = c' \quad \rightarrow \quad b' + c' = 9$ 라고 해봅시다. **b' 하나당 b가 2개씩, c' 하나당 c가 2개씩 생기니 (b', c') 하나당 (b, c)는 4개씩 생기겠군요.**

예를들어 $(b', c') = (4, 5)$면 $(b, c) = (4, 5), (4, -5), (-4, 5), (-4, -5)$ 이렇게 4개가 되는거에요. 다 풀었습니다. 아까처럼 다시 $b'' = b' - 1,\ c'' = c' - 1$이라고 둔 후 방정식을 정리하여 $b'' + c'' = 7$을 만족하는 음이 아닌 정수 (b'', c'')의 개수를 구해주면 ${}_2H_7$입니다.

이건 (b', c')의 순서쌍의 개수와 같아요. 여기에 4를 곱하면 (b, c)의 순서쌍의 개수이고, 다시 처음에 a, b, c 중 0이 될 문자를 고를 때 해준 3을 곱해줍니다.

정답은 ${}_2H_7 \times 4 \times 3 = 96$이군요!

5. 정수들의 부등식

사실 아까 다룬 원형인 함수의 개수와 크게 다르지는 않습니다만 이 원형도 자주 나오는 편이라 따로 정리했습니다. 먼저 다음 예제를 한번 풀어봅시다.

[예제 6번, 자작]

자연수 a, b, c, d에 대하여 $a \leq b \leq c \leq d \leq 7$을 만족하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

이것도 결국 원형이에요. 1부터 7까지의 숫자 중 중복을 허락하여 4개를 뽑은 다음 작은 숫자부터 나열하면 그 순서대로 (a, b, c, d)에 대응됩니다. 숫자를 5, 3, 2, 3 이렇게 뽑았다면 $a = 2, b = 3, c = 3, d = 5$ 이렇게 되는거죠. 이 경우의 수 역시 ${}_7H_4$입니다.

이렇게 함수의 개수와 동일하게 부등식은 일단 숫자를 뽑기만 하면 알아서 대응이 됩니다. 중복을 허락하여 뽑기만 하면 되는거에요.

[예제 7번, 자작]

음이 아닌 정수 a, b에 대하여 $a + 2 \leq b \leq 6$을 만족하는 순서쌍 (a, b)의 개수는?

위와 아주 조금 바뀌었어요. a 대신 $a + 2$를 사용했네요. 이때 $a + 2 = a'$으로 치환을 해줍시다. a와 a'는 일대일로 대응되기에 (a', b)의 순서쌍의 개수를 구해도 됩니다. a가 음이 아닌 정수이니 a'는 2 이상의 정수겠죠? 따라서 $2 \leq a' \leq b \leq 6$이 될거에요.

2, 3, 4, 5, 6 중 중복을 허락하여 2개를 뽑습니다. 답은 ${}_5H_2$에요.

[예제 8번, 자작]

정수 a, b에 대하여 $1 \leq a^2 \leq b \leq 4$를 만족하는 순서쌍 (a, b)의 개수는?

이번에는 $a^2 = a'$이라고 합시다. 그러면 위에서 말했다시피 a′ 하나당 a가 2개씩 대응됩니다. 부등식을 그대로 변형해주면 $1 \leq a' \leq b \leq 4$니까 아싸! ${}_4H_2$!

하시면 역시 큰일납니다. a'는 임의의 정수가 아니에요. 제곱수이기에 1 또는 4입니다.

가능한 (a', b)의 순서쌍은 $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (4,4)$로 총 5개이고, 구하고자 하는 정답은 그 2배인 10가지 입니다.

이제 여러 기출문제를 풀면서 원형을 어떻게 적용할 수 있을지 같이 고민해봅시다. 문제를 먼저 푸시고 해설을 읽고, 다음 문제를 푸시고 하면 됩니다.

[22예비29(확)]

29. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a + b + c + d = 12$
(나) $a \neq 2$이고 $a + b + c \neq 10$이다.

중요한 이야기를 하나 할거에요.

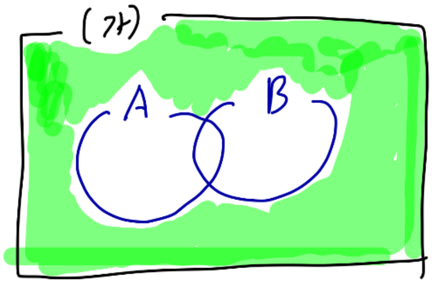
제가 확률과 통계 단원을 가르칠 때 항상 강조하는 것이 **경우의 수를 집합으로 보아라!** 입니다. 대부분의 고난도 문항들은 사건들을 복잡하게 만들고 포함과 배제를 이용하여 문제를 풀게 합니다. 이 문제를 통해 집합이 섞인 문제를 어떻게 다루는지 알아봅시다.

문제를 읽어보면 4번째 원형인 부정방정식의 정수해에 대한 문제라는 것을 쉽게 눈치 챌 수 있어요. 조건 (가)까지는 매우 익숙하지만 (나)가 문제군요.

조건 (나)를 왜 이렇게 줬는지는 잘 모르겠지만 우선 $a \neq 2$, $d \neq 2$라고 해석하면 되겠군요. 이때 **조건 (가)를 만족하고 $a = 2$인 케이스를 A, 조건 (나)를 만족하고 $d = 2$인 케이스를 D라고 할게요**. 제가 케이스라고 부르는 A와 D는 모두 **집합**입니다. 순서쌍 $(2, 4, 3, 1)$은 집합 A의 원소이고 순서쌍 $(2, 3, 3, 2)$는 집합 A, D의 원소가 될 것이에요.

마지막으로 조건 (가), (나)를 만족하는 케이스를 심플하게 각각 '가'와 '나' 라고 합시다. 이건 이 문제 말고도 앞으로도 쭉 사용할거니 알아둡시다.

우리가 구하고자 하는 경우의 수는 $n(\text{가} \cap \text{나})$입니다. 이건 결국 케이스 '가'에서 두 케이스 A, D에 해당하는 것을 빼준 경우의 수와 같아요. '나'는 $a \neq 2, d \neq 2$인데 A와 D는 각각 $a = 2, d = 2$이니까요.



이걸 좀 있어보이게 벤다이어그램으로 나타내면 위와 같습니다. 여기서 오른쪽이 B처럼 보이는건 얘가 다이어트해서 그렇고 D 맞아요.

이제 정답을 구하는 수식을 적어봅시다. **집합 '가'에서 A와 D의 합집합을 빼주면 됩니다.** 즉 합의 법칙에 의해 $n(\text{가}) - n(A) - n(D) + n(A \cap D)$라는 것이죠.

$n(\text{가})$는 그냥 원형이죠? ${}_{4}H_{12}$이고 케이스 A의 경우의 수는 $2 + b + c + d = 12$에서 ${}_{3}H_{10}$입니다. 이는 D의 경우의 수도 같죠. 케이스 $A \cap D$의 경우 $a = d = 2$를 대입하면 쉽게 ${}_{2}H_{8}$를 구할 수 있어요. 정답은 ${}_{4}H_{12} - 2 \times {}_{3}H_{10} + {}_{2}H_{8} = 332$입니다.

어떤가요? 29번 문제지만 집합과 중복조합의 원형을 이용하면 쉽게 풀리지 않나요? 이렇게 **케이스를 설정하고 합집합과 교집합을 따져가며 경우의 수를 구하는 스킬**은 자주 사용되고 매우 중요하니 꼭 배워가세요.

[211129(나) 변형]

29. 주사위 A를 3번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 x, y, z라 하고 주사위 B를 4번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라고 하자. 이때 $x+y+z=10$을 만족하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 $a+b+c+d=10$을 만족하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수의 합은?

분명 자작문제인데 읽자마자 PTSD 오시는 분들 계실거에요. 작년 수능 29번에서 핵심이 되는 경우의 수를 세는 부분만 가져왔습니다. 바로 한번 풀어보죠.

주사위는 1부터 6까지 총 6개의 눈을 가집니다. 즉 자동으로 모든 눈의 수는 1 이상 6 이하의 정수라는 조건이 붙어요. 대부분 이 조건 때문에 중복조합으로 풀지 않고 하나하나 직접 세서 구했더군요. 학생 하나는 총 3번 구했는데 3번 다 다른 답이 나왔다는 웃지 못할 일도 있었어요. (ㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋ 괜찮아요 논술로 가셨어요)

먼저 주사위 A부터 해결합시다. 먼저 $x, y, z \geq 1$이라는 조건만 있는 케이스를 A′이라고 생각합시다. 그러면 $x'+y'+z'=7$에서 $n(A')={}_3H_7$이죠. 우리가 구하고자 하는 케이스는 $1 \leq x, y, z \leq 6$이었죠? 이는 **A′에서 x, y, z 중 6 이상이 되는 숫자가 있는 케이스를 빼주면 되는거에요.**

이제 케이스 A′에서 $x>6$이라는 조건이 추가된 케이스를 A″라고 합시다. 즉 $x>6$ & $y, z \geq 1$인 케이스에요. 경우의 수는 $x''+y'+z'=1$ 에서 총 3가지 입니다.

이때 핵심은 **$x+y+z=10$에서 자동으로 y와 z는 6 이하**일 수밖에 없다는 것이에요. 즉 A″와 A′에서 $y>6$이라는 조건이 추가된 케이스, A′에서 $z>6$이라는 조건이 추가된 케이스는 서로 겹치는게 없고, 당연히 각각의 케이스의 경우의 수는 A″와 같습니다.

조금 어려우니까 직접 가능한 경우를 생각하면서 따라오세요. 주사위 A에서의 경우의 수는 따라서 $n(A')-3 \times n(A'')=27$이겠군요.

주사위 B 역시 마찬가지로 풀어줍시다 $a, b, c, d \geq 1$을 만족하는 케이스를 B′라 하고 여기서 $a>6$이라는 조건을 추가하여 케이스 B″를 설정하면 우리가 구하고자 하는 경우의 수는 $n(B')-4 \times n(B'')={}_4H_6-4=80$입니다. 답은 107이겠군요.

[200619(가)]

19. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수는?

(가) $n = 1, 2, 3$일 때, $x_{n+1} - x_n \geq 2$이다.
(나) $x_4 \leq 12$

조건 (가)의 부등식에 숫자를 대입하여 일단 나열해봅시다.

$x_4 \geq x_3 + 2$, $x_3 \geq x_2 + 2$, $x_2 \geq x_1 + 2$ 이렇게 되겠군요. 세 부등식을 연립할 수 있을 것처럼 보이지 않나요? 조건 (나)까지 한꺼번에 연립해주면

$$x_1 + 6 \leq x_2 + 4 \leq x_3 + 2 \leq x_4 \leq 12$$

이렇게 됩니다. 너무 익숙하지 않나요? 이거 우리가 예제 7번에서 **정수들의 부등식**이라고 했던 거랑 똑같네요!

바로 $x_1 + 6 = a$, $x_2 + 4 = b$, $x_3 + 2 = c$, $x_4 = d$로 치환합시다. 부등식은 다음과 같이 바뀔거에요.

$$6 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 12$$

네, 정답은 ${}_7H_4 = 210$입니다.

이제 중복조합 수업을 끝낼게요. 모두 읽으시느라 수고 많으셨어요!