1. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<2) \\ -\displaystyle\int_4^x |f'(t-2)|\,dt & (x \ge 2) \end{cases}$$

라 하자. $|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때,

$\displaystyle\int_0^4 |g(x)|\,dx$의 값을 구하시오.

〈해설〉

1) 문제해석, 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수인데 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<2) \\ -\int_4^x |f'(t-2)|\,dt & (x \ge 2) \end{cases}$라고 한답니다. 이게 무슨 함수일까요? 일단 이거부터 해석해봅시다.

$x<2$에서는 $g(x)=f(x)$입니다. 방금 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수라고 했었죠? 그걸 $x<2$ 부분만 짜른 함수네요.

그리고 $x \ge 2$에서는 $g(x)=-\int_4^x |f'(t-2)|\,dt$랍니다. 이건 뭔.... 뭐죠?

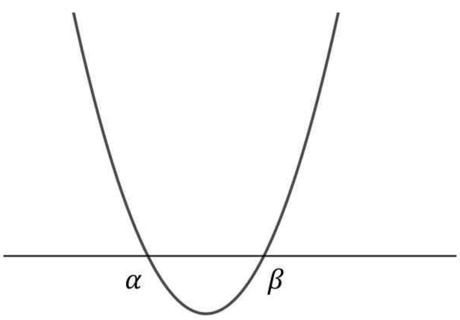
항상 일관된 원칙을 적용합시다. 정적분의 위끝에 변수가 있죠? 일단 먼저 해야 할 일은 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=4$를 넣는 거죠. 넣으면 $g(4)=0$이 됩니다. 그리고 미분해야죠? 미분하면 $g'(x)=|f'(x-2)|$입니다.

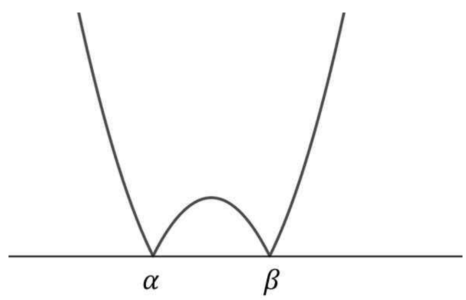
2) 절댓값 함수

$g'(x)=|f'(x-2)|$라는데 이거 좀 봅시다. 일단 $f'(x)$는 $f(x)$의 도함수입니다. $f(x)$가 삼차함수였으니 $f'(x)$는 이차함수겠죠.

그런데 저 식에는 x 대신 $x-2$가 들어가 있어요. 이건 평행이동을 하라는 이야기죠? 그러니까 $f'(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, 그러니까 오른쪽으로 2만큼 움직이면 됩니다.

그 후에는 절댓값을 씌운 거죠. 이거 대충 좀 그려볼게요. 만약 $f'(x-2)$의 그래프가



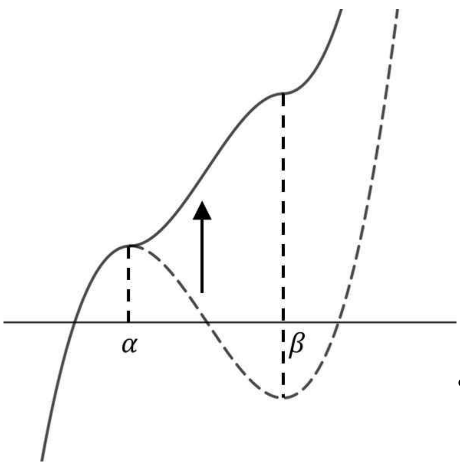


이러면 절댓값을 씌웠을 때

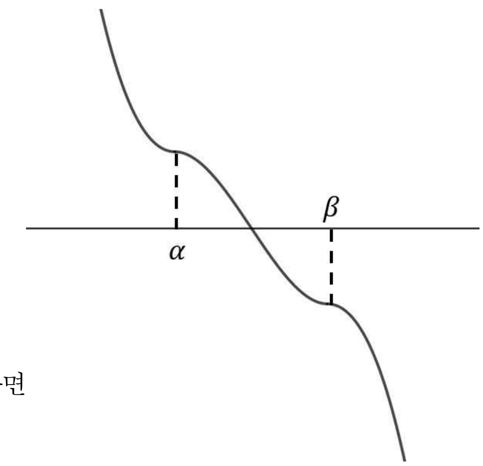
이렇게 됩니다.

그런데 우리는 이걸 적분한 그래프를 그려야 하잖아요? 그래야 $g(x)$의 그래프를 알 수 있을 테니까요.
적분해봅시다. 일단 $x<\alpha$에서는 $f'(x-2)>0$입니다. 그러다가 $x=\alpha$에서 $f'(x-2)=0$이 되죠. 그런데 $x>\alpha$에서 다시 $f'(x-2)>0$가 되네요? 부호의 변화가 없어요. 그러면 극점을 갖지 않는다는 거네요.
$x=\beta$에서도 마찬가지죠. 이러면 x^3과 같이 접선의 기울기가 0이 되지만 방향은 바뀌지 않는 점이 두 개가 있게 됩니다.

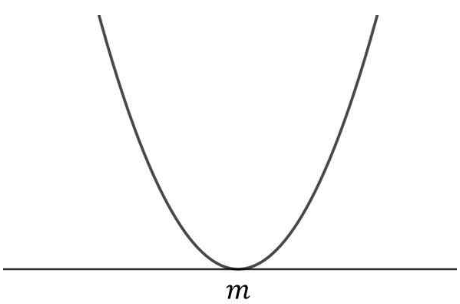
$x<\alpha$에서는 $f'(x-2)$를 적분한 그래프와 $|f'(x-2)|$을 적분한 그래프의 모양이 같습니다. 그런데 $\alpha \le x \le \beta$에서는 달라지죠. $f'(x-2)$는 음수가 되니까 적분하면 감소하는 그래프가 되지만 $|f'(x-2)|$는 양수라서 증가하는 그래프가 되거든요. 그런데 모양은 정확히 반대가 되어야 합니다. 같은 식인데 부호만 다른 거잖아요?



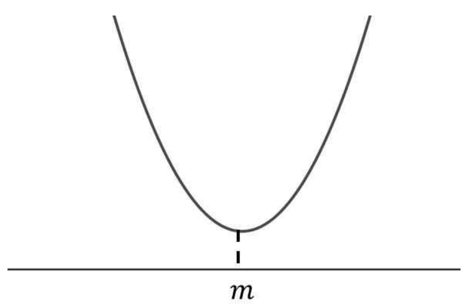
이렇게 말이죠. (−)를 곱해주면



이렇게 되네요. (실선이 $|f'(x-2)|$를 적분한 그래프, 점선이 $f'(x-2)$를 적분한 그래프입니다.) 이런 함수를 $x \ge 2$ 부분에서 짜른 함수가 $g(x)$가 되는 거네요.



이렇게 되거나

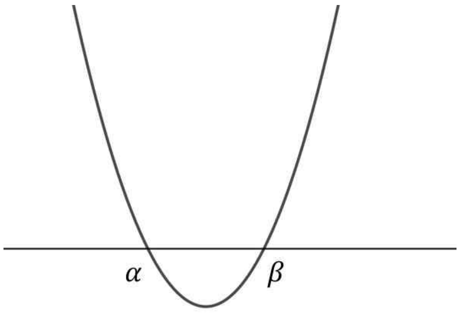


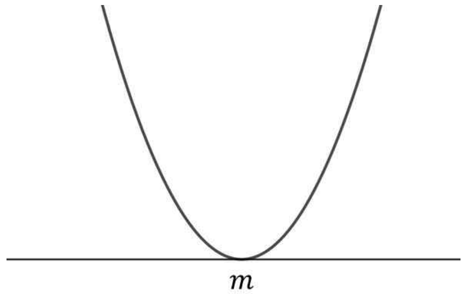
이렇게 되면

그냥 익숙한 삼차함수 모양이 나옵니다.

이때 $|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하답니다. 어...? 방금 $g(4)=0$라고 하지 않았었나요? x축과

만나는데 미분가능하려면 $g'(4)=0$이어야죠. 그래야 매끄럽게 올라가잖아요. 이게 가능하려면

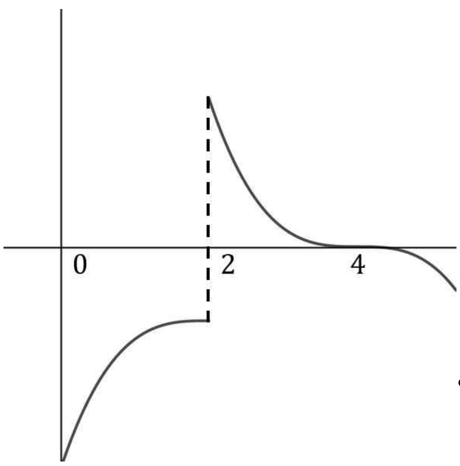




이거 아니면 이거여야

하겠네요.

그런데 $x=m$에서 접하는 그래프는 가능하지 않아요. 일단 $g'(x)=|f'(x-2)|$이니까 $g'(4)=f'(2)=0$인데 저거 그래프를 그려보면



이렇게 됩니다. 접어 올린다고 하더라도 경계가 되는 $x=2$에서 양쪽의 접선의 기울기는 같거나 부호가 반대여야 합니다. 접어 올린다는 건 $(-)$를 곱해서 부호를 반대로 바꿔버린다는 거니까 접선의 기울기의 부호 역시 반대가 되거든요. 지금은 좌미분계수는 0인데 우미분계수는 음수죠?

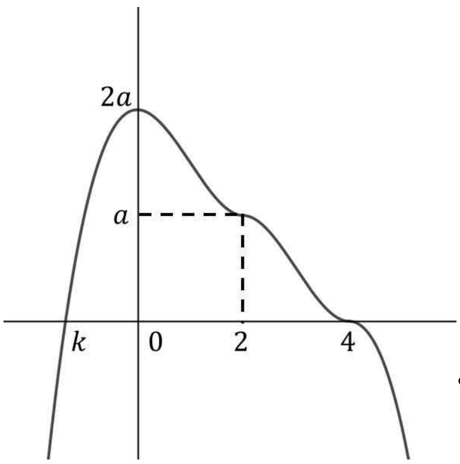
그런데 $x<2$에서 $g(x)=f(x)$인데 $f'(2)=0$이잖아요. 0과 같은 건 0밖에 없죠. 우미분계수가 0인 상황에서 $|g(x)|$가 미분가능하기 위해서는 좌미분계수도 0이어야 합니다. $g'(2)=f'(2)=0$이어야 하겠네요.

그런데 또 $x \geq 2$에서 $g'(x)=|f'(x-2)|$이잖아요? 그러면 $g'(2)=f'(0)=0$이어야 하겠네요. 연쇄적으로 조건이 나오네요. $f(x)$의 개형이 결정되었어요!

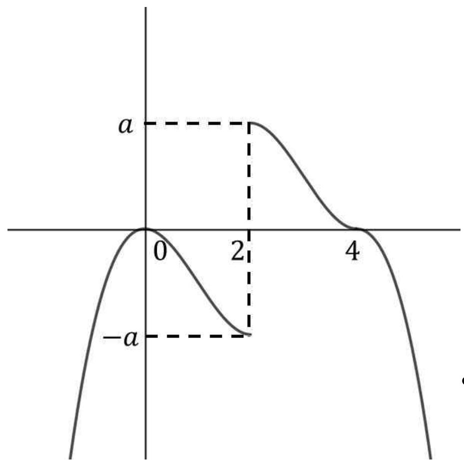
제가 아까 "$\alpha \leq x \leq \beta$에서는 달라지죠. $f'(x-2)$는 음수가 되니까 적분하면 감소하는 그래프가 되지만 $|f'(x-2)|$는 양수라서 증가하는 그래프가 되거든요. 그런데 모양은 정확히 반대가 되어야 합니다"라고

말했었던 거 기억나요? 제가 그림까지 그렸었잖아요. 지금 $f'(0)=f'(2)=0$이니까 $f'(x-2)=0$의 두 실근은 $x=2$, $x=4$겠네요. 따라서 $\alpha=2$, $\beta=4$입니다.

다시 말하면 $2\le x\le 4$에서 $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프를 2만큼 오른쪽으로 평행이동한 후에 $(-)$를 곱해서 반대로 뒤집어버린 그래프를 또다시 $(-)$를 곱해서 원래대로 바꾼 그래프라는 거에요. 사실상 평행이동한 거죠.



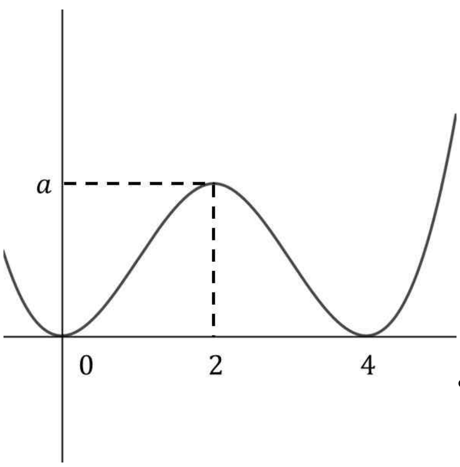
이렇게 되거나



이렇게 되어야

한다는 거죠.

하지만 왼쪽의 그림은 접어 올렸을 때 $x=k$에서 미분불가능합니다. 오른쪽의 그림은



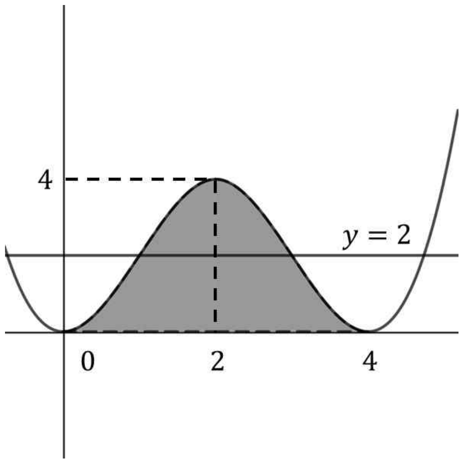
이렇게 되어서 미분가능하죠.

4) 함수 구하기 - 인수정리

함수 한 번 구해봅시다. $f'(0)=f'(2)=0$인데 $f(0)=0$이네요. $f(x)$와 x축이 만나는 점 중에서 $x=0$이 아닌 점의 x좌표를 n이라고 해볼게요. 그러면 $f(x)$는 x축과 $x=0$에서 접하고 $x=n$에서 만나니까 $f(x)=x^2(x-n)$이라 할 수 있죠? 삼차함수의 비율관계를 이용하면 $x=0$과 $x=n$의 $2:1$내분점이 $x=2$가 되니까 $\dfrac{2n}{3}=2$가 되고 $n=3$이 되네요. $f(x)=x^2(x-3)$입니다.

5) 정적분 관찰

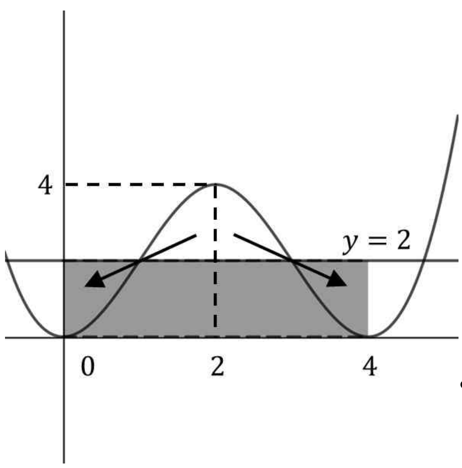
그럼 이제 $\int_0^4 |g(x)|dx$를 구해볼까요? 식이 주어져 있으니까 식 구해서 정적분해도 되지만 지금 평행이동한 그래프가 있잖아요. 이러면 정적분이 편해질 수가 있어요. 그러니까 편하게 할 수 있는지 좀 봐봅시다.



구하는 건 이 부분이에요.

아까도 말했듯이 $g(x)$에서 $0 < x < 2$ 부분과 $2 < x < 4$ 부분은 평행이동한 관계라고 했었죠? 그런데 방금 절댓값으로 $0 < x < 2$부분을 올렸으니까 $|g(x)|$에서 $0 < x < 2$ 부분과 $2 < x < 4$ 부분은 $x = 2$ 축대칭입니다.

모든 삼차함수는 점에 대하여 대칭이죠. $f(x)$의 변곡점은 두 극점의 중점인 $(1,\ -2)$입니다. 그런데 지금은 접어 올렸으니까 $(1,\ 2)$대칭이겠네요. 따라서



이렇게 바꿀 수 있습니다. 그냥 직사각형의 넓이 구하는 것이 되어버렸죠? 높이 2에 밑변 4로 넓이는 8이네요. 답은 8입니다!