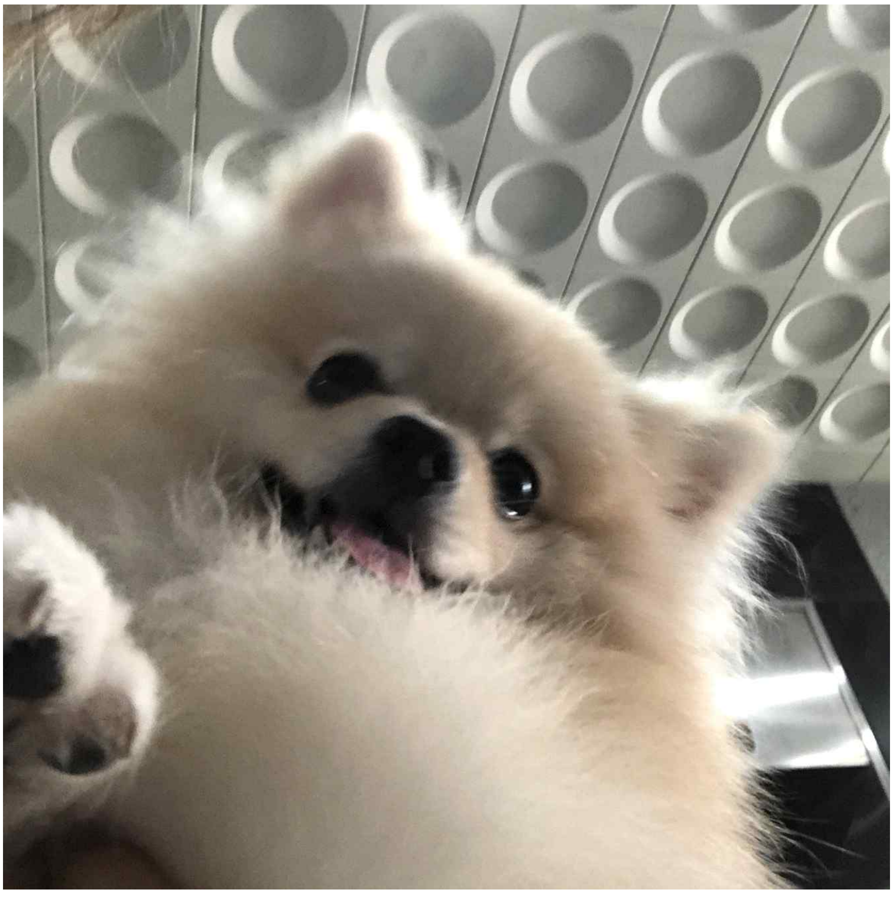
하비T 수업교재

수학 I

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

1. 지수와 로그



Ⅰ. 지수함수와 로그함수

1. 지수와 로그

1) 거듭제곱과 거듭제곱근

ASSUME : a는 실수, n은 자연수

∴ a의 n제곱 : a^n ≐ a를 n번 곱한 것

∴ a의 거듭제곱 ≐ $a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots$을 통들어 이르는 말

∴ 거듭제곱 a^n의 밑 ≐ a

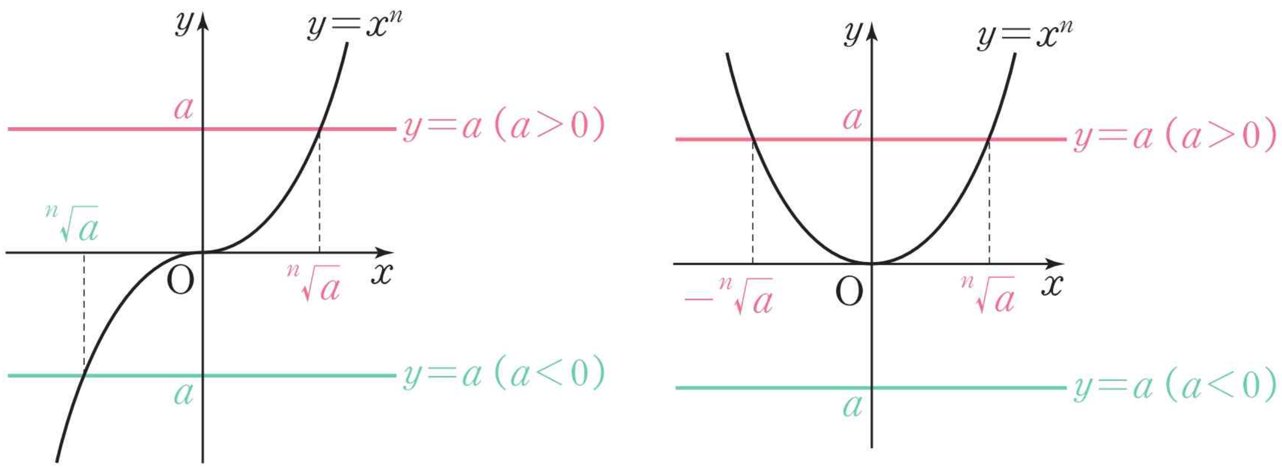
∴ 거듭제곱 a^n의 지수 ≐ n

ASSUME : a는 실수, n은 (2 이상의) 자연수

∴ x가 a의 n제곱근이다 ≐ $x^n = a$

ASSUME : a의 실수인 n제곱근이 존재

∴ $\sqrt[n]{a}$ ≐ n이 홀수일 때는 a의 n제곱근, n이 홀수일 때는 0 이상인 a의 n제곱근



NOTE : a의 실수인 n제곱근

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

★ 거듭제곱근의 성질

ASSUME : $a>0$, $b>0$이고 m, n은 2 이상의 자연수

∴ ① $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

∴ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

∴ ③ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

∴ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

STEP 1. 개념 적용하기

01. 자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은?

[3점][2020년 6월 가12]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

02. $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[4]{3}$ 일 때, $\sqrt[8]{6}$을 a, b로 나타내면?

[2점][2004년 4월 가나01]

① $\sqrt[4]{a}\sqrt{b}$ ② $\sqrt[3]{a}\sqrt{b}$ ③ $\sqrt{a}\,b$
④ a^2b ⑤ a^4b^2

03. $1 \leqq m \leqq 3$, $1 \leqq n \leqq 8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는?

[3점][2010년 9월 나26]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

STEP 2. 개념의 심화적 활용

04. 두 자연수 a, b에 대하여
$\sqrt{\dfrac{2^a \times 5^b}{2}}$ 이 자연수, $\sqrt[3]{\dfrac{3^b}{2^{a+1}}}$ 이 유리수 일 때, $a+b$의 최솟값은?

[4점][2017년 4월 나17]

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

05. 자연수 n에 대하여 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하고, $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $f(n) > g(n)$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은?

[4점][2019년 3월 나15]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

2) 지수의 확장과 지수법칙

Remind : 기존의 지수법칙

ASSUME : $a \neq 0 \wedge m, n$이 자연수
$\therefore\ a^m \times a^n = a^{m+n}$

이제부터 지수법칙을 m, n이 정수, 유리수, 심지어 실수일때까지로 확장해보자.
NOTE : 확장 시, **기존의 지수법칙이 성립하도록** 만들게 정의할 것이다!!

1. 정수로의 확장
ASSUME : $a \neq 0 \wedge n$이 자연수
$\therefore\ a^0 \doteq 1$
$\therefore\ a^{-n} \doteq \dfrac{1}{a^n}$

2. 유리수로의 확장
ASSUME : $a \neq 0 \wedge m, n$이 정수 $\wedge\ n \neq 0$
$\therefore\ a^{\frac{m}{n}} \doteq \sqrt[n]{a^m}$

3. 실수로의 확장
ASSUME : $a \neq 0 \wedge x$가 실수
ASSUME : $\{x_n\}$은 x로 수렴하는 유리수로 이루어진 수열 (언제나 존재 가능...교과외)
$\therefore\ a^x \doteq \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$

★ 지수법칙
ASSUME : $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge m, n$이 정수
$\therefore$ ① $a^m a^n = a^{m+n}$
$\therefore$ ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$
$\therefore$ ③ $(a^m)^n = a^{mn}$
$\therefore$ ④ $(ab)^m = a^m b^m$
이는 가정을 "$a > 0 \wedge b > 0 \wedge m, n$이 실수(혹은 유리수)"로 바꿔도 성립한다.

proof. ①만 증명해보도록 하겠다. 기존의 지수법칙을 잘 활용하자.
case1) m, n이 0이상의 정수일때는 기존의 지수법칙과 a^0의 정의에 의해 자명하다.
case2) $m > 0$. $n < 0$, $m+n \geq 0$일 때. $a^{m+n}a^{-n} = a^m$에 의해 자명하다.
case3) $m > 0$. $n < 0$, $m+n < 0$일 때. $a^{-(m+n)}a^m = a^{-n}$에 의해 자명하다.
case4) $m < 0$. $n > 0$일 때. case2와 case3와 유사하므로 자명하다.
case5) $m < 0$. $n < 0$일 때, $a^{-m}a^{-n} = a^{-(m+n)}$에 의해 자명하다. ■

STEP 1. 개념 적용하기

06. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k의 값을 구하시오.
(단, $a>0$, $a \neq 1$)

[3점][2004년 4월 나22]

07. 1 이 아닌 양수 a에 대하여 $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}} = a^{\frac{n}{m}}$ 일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m과 n은 서로소)

[3점][2006년 5월 나18]

08. $abc=24$인 세 실수 a, b, c가 있다. $2^a=3^2$, $3^b=5^3$ 일 때, 5^c의 값을 구하시오.

[3점][2005년 3월 나19]

★구하는 것에 집중하기★ 접근하기 어려운 문제일수록 구하는 것에 집중하는 태도가 필요하다. 일단 구하는 것을 본 후, 주어진 조건의 활용이 가능하도록 구하는 것을 바꾸어 보자!

09. 두 실수 a, b에 대하여

$$2^{a}+2^{b}=2,\ 2^{-a}+2^{-b}=\frac{9}{4}$$

일 때, 2^{a+b}의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[3점][2018년 3월 나25]

10. 이차방정식 $x^{2}-3x+1=0$의 두 실근이 α, β일 때,
$2^{\frac{1}{\alpha^{3}-1}}\times 2^{\frac{1}{\beta^{3}-1}}$ 의 값은?

[4점][2018년 대구11월 나16]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

11. $a=3^{55}$, $b=4^{44}$, $c=5^{33}$일 때, 큰 것부터 차례로 나열한 것은?

[3점][2007년 대전10월 나07]

① a, b, c ② a, c, b ③ b, c, a
④ b, a, c ⑤ c, b, a

STEP 2. 개념의 심화적 활용

12. 세 함수

$$f(x)=(1+r_1)^x,\quad g(x)=\left(1+\frac{r_2}{2}\right)^{2x},\quad h(x)=\left(1+\frac{r_3}{4}\right)^{4x}$$

에 대하여 $f(10)=g(10)=h(10)$일 때, r_1, r_2, r_3의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? (단, r_1, r_2, r_3는 양의 실수이다.)

[3점][2005년 6월 나08]

① $r_1<r_2<r_3$　② $r_1<r_3<r_2$　③ $r_2<r_1<r_3$
④ $r_2<r_3<r_1$　⑤ $r_3<r_2<r_1$

★상황이 복합적으로 얽혀있을 때★
복합적인 상황을 바로 해결한다는 쉽지 않은 일이다. 따라서 하나씩 분해하여 살펴보자!!!
예를 들어, $p\to q\to r$을 보이고 싶을 때는, $p\to q$, $q\to r$을 보이는 것이다.

★대소 비교하기 : $A>B$★
1st. 식 그 자체로 보기.
$A-B$를 이용하자!! 만약, 두 부호가 같다면 A/B를 이용할 수 있다.
기하적으로 그래프를 이용하거나 기울기, 넓이 등으로 보는 방법도 있으나 이는 나중에 알아보자.
2nd. 위에서 해결이 되지 않는다면 식을 변형할 수 있다는 사실을 활용하자!!
조건을 활용할 수 있도록, 아니면 기하적인 해석이 가능하게 식을 변형해야 한다.

13. 어느 금융상품에 초기자산 W_0을 투자하고 t년이 지난 시점에서의 기대자산 W가 다음과 같이 주어진다고 한다.

$$W = \frac{W_0}{2} 10^{at}(1 + 10^{at}) \text{ (단, } W_0 > 0,\ t \geq 0\text{이고, } a\text{는 상수이다.)}$$

이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배이다. 이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 초기자산의 k배일 때, 실수 k의 값은? (단, $w_0 > 0$)

[3점][2016학년도 수능 가10나16]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

14. 자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m = \left\{ (a,\ b) \,\middle|\, 2^a = \frac{m}{b},\ a,\ b\text{는 자연수} \right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2017년 3월 나21]

< 보 기 >

ㄱ. $A_4 = \{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$

ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m = 2^k$이면 $n(A_m) = k$이다.

ㄷ. $n(A_m) = 1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3) 로그의 뜻과 성질

ASSUME : $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$

∴ a를 **밑**으로 하는 N의 **로그** : $\log_a N \doteq a^x = N$을 만족하는 실수 x

∴ $\log_a N$의 진수 $\doteq N$

NOTE : a를 밑으로 하는 N의 로그는 일반적으로 유일하다고 알려져있다.

★ 로그의 성질

ASSUME : $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$

∴ ① $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

∴ ② $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

∴ ③ $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

∴ ④ $\log_a M^k = k \log_a M$ (단, k는 실수이다.)

∴ ⑤ $\log_{a^k} M = \dfrac{1}{k} \log_a M$ (단, k는 실수이다.)

∴ ⑥ $\log_{a^l} M^k = \dfrac{k}{l} \log_a M$ (단, l, k는 실수이다.)

proof. ②만 증명해보도록 하겠다.

$a^{\log_a MN} = MN = a^{\log_a M} a^{\log_a N} = a^{\log_a M + \log_a N}$ ■

NOTE : $\log_a x^2 \overset{?}{=} 2\log_a x$. x의 범위를 생각해보면 아닐 수도 있다. 따라서, $\log_a x^2 = 2\log_a |x|$

★ 로그의 밑의 변환

ASSUME : $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$

∴ $\log_c a \times \log_a b = \log_c b$, 즉, $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

∴ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

proof.

$x = \log_c a$, $y = \log_a b$라 하자. 그러면, $a = c^x$, $b = a^y$ 이다. a가 공통되므로, 이를 이용하면

$$a = c^x = b^{1/y} \qquad \cdots \text{(가)}$$

임을 알 수 있다. (가)의 양변에 로그를 씌워주면,

$$\log_c a = x = \log_c b^{1/y} = \frac{1}{y}\log_c b = \frac{\log_c b}{\log_a b}$$

이다. ■

★ 로그문항을 바라보는 태도

로그가 보이면 밑, 진수의 부호를 확인한다.

⇩

바꿀 수 있으면 로그의 성질을 이용하여 최대한 간편하게 바꾸어 본다.

⇩

문제를 해결하여 본다. 어려우면 식 변형이 있을 수도 있다. 식 변형의 방향은 로그연산을 가능하게 하는 방향이다!! (eg. 양변 로그 씌우기)

⇩

치환, 밑변환이나 그동안 배운, 또는 배울 수학적인 태도로 접근하여 본다.

이는 지수문항을 바라볼 때에도 유사하다!!

STEP 1. 개념 적용하기

15. $\log_{(x-2)}(-x^2+5x+14)$ 가 정의되도록 하는 모든 양의 정수 x 의 합을 구하시오.

[3점][2004년 4월 나23]

16. $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{32}\cdot\log_2\frac{1}{16}$의 값을 구하시오.

[3점][2004년 6월 나18]

17. 1보다 크고 10보다 작은 세 자연수 a, b, c에 대하여

$$\frac{\log_c b}{\log_a b}=\frac{1}{2},\quad \frac{\log_b c}{\log_a c}=\frac{1}{3}$$

일 때, $a+2b+3c$의 값은?

[4점][2014년 4월 나15]

① 21 ② 24 ③ 27 ④ 30 ⑤ 33

18. 1 보다 큰 세 실수 a, b, c 에 대하여

$$\log_a 2 = \log_b 5 = \log_c 10 = \log_{abc} x$$

가 성립할 때, 실수 x 의 값은?

[3점][2011년 3월 나06]

① $\frac{1}{10}$　② $\sqrt{10}$　③ 10　④ $10\sqrt{10}$　⑤ 100

19. $\log_2 a$ 의 정수 부분은 4 가 되고 $\log_3 a$ 의 정수 부분은 3 이 되는 자연수 a 의 최댓값을 구하시오.

[3점][2004년 6월 나20]

★정수 부분과 소수 부분★
ASSUME : x는 실수
$\therefore$ x의 정수 부분 : $\lfloor x \rfloor$ or $[x]$ $\doteq$ $n \le x < n+1$을 만족하는 정수 n
$\therefore$ x의 소수 부분 $\doteq$ $x-$(x의 정수 부분)

20. $a > 1$, $b > 1$ 일 때, $\log_{a^3} b^2 + \log_{b^4} a^3$ 의 최솟값은?

[4점][2004년 3월 나17]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

★치환의 타이밍★
① 구조의 반복성이 보일 경우 치환하자.
② 식이 너무 복잡하거나 조건이 복잡하게 얽혀 있으면 치환하여 보자.

★최대, 최소 구하기★
당연하게도 최대, 최소는 굉장히 특이한 때이다!! 그러므로, 특이할 때를 기점으로 관찰하는 것이 맞다. 그러므로, 앞으로는 최대, 최소의 관찰 시 특이할 때를 기준으로 생각하자!
아래는 어떤 식이나 함수에 대한 최대, 최소를 구하는 태도이다.
case1) 1변수일 때
① 제곱꼴의 식을 만들어내어, 제곱식이 0이 될 때를 살펴본다..
(② 극값을 관찰한다)
case2) 2변수일 때
① 주어진 식을 이용하여, 1변수일 때로 바꾸어 보자.
② 한 변수를 고정시키고 관찰하여보자.
NOTE : 산술기하평균을 이용할 수도 있다!!

STEP 2. 개념의 심화적 활용

21. $1<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{3a}{\log_a b}=\dfrac{b}{2\log_b a}=\dfrac{3a+b}{3}$가 성립할 때, $10\log_a b$의 값을 구하시오.

[3점][2009학년도 수능 나21]

22. $\log_4 2n^2 - \dfrac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$ 의 값이 40이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오.

[4점][2021학년도 수능 가27]

23. 어떤 지역의 먼지농도에 따른 대기오염 정도는 여과지에 공기를 여과시켜 헤이즈계수를 계산하여 판별한다. 광화학적 밀도가 일정 하도록 여과지 상의 빛을 분산시키는 고형물의 양을 헤이즈계수 H, 여과지 이동거리를 $L(\mathrm{m})(L>0)$, 여과지를 통과하는 빛전달률을 $S(0<S<1)$라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$H=\frac{k}{L}\log\frac{1}{S}$ (단, k는 양의 상수이다.)

두 지역 A, B의 대기오염 정도를 판별할 때, 각각의 헤이즈계수를 H_A, H_B, 여과지 이동거리를 L_A, L_B, 빛전달률을 S_A, S_B라 하자. $\sqrt{3}H_A=2H_B$, $L_A=2L_B$일 때, $S_A=(S_B)^p$을 만족시키는 실수 p의 값은?

[4점][2016년 4월 나16]

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

24. 등식 $2^a = 5^b$을 만족시키는 양의 실수 a, b에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2012년 3월 나16]

<보 기>

ㄱ. $b = \frac{1}{2}$이면 $a = \log_4 5$이다.

ㄴ. $2 < \frac{a}{b} < 3$

ㄷ. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$은 무리수이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4) 상용로그

Problem : 너무 큰 수의 자리수 파악, 대략적인 크기 파악 어려움
Solution : 상용로그의 활용!!!

상용로그 ≐ 10을 밑으로 하는 로그
$\log N \doteq \log_{10} N$

보통 상용로그의 값을 활용해야 하면 주어진다!!

★ 상용로그와 자리수
ASSUME : x는 실수
∴ ① $\log x \geq 0$
$\Rightarrow$ x의 정수 부분은 $[\log x]+1$ 자리수이다.
∴ ② $\log x < 0$
$\Rightarrow$ x는 소수점 아래 $|[\log x]|$째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

NOTE : [ ]는 "내림"을 나타내는 기호이다.

proof. ①만 증명해보도록 하겠다.
일반성을 잃지 않고, x를 n자리수라고 가정해보겠다. 그러면

$$10^{n-1} \leq x < 10^n \quad \cdots \text{ (가)}$$

가 성립한다. (가)의 양변에 상용로그를 씌워주면,

$$n-1 \leq \log x < n \quad \cdots \text{ (나)}$$

가 성립함을 알 수 있다. (나)에 의해

$$n = [\log x]+1$$

가 되어 증명이 끝난다. ■

STEP 1. 개념 적용하기

25. $10^{0.94}=k$ 라 할 때, $\log k^2+\log\frac{k}{10}$ 의 값은?

[3점][2018년 10월 나08]

① 1.82 ② 1.85 ③ 1.88 ④ 1.91 ⑤ 1.94

26. 3^{10} 은 m 자리 정수이고, $\left(\frac{3}{10}\right)^{10}$ 은 소수점 아래 n 번째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 숫자가 나타난다. 이때, $m+n$ 의 값은? (단, $\log_{10}3 = 0.4771$)

[3점][2008년 5월 나12]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

27. x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타낼 때, 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?

[3점][2006년 10월 가나10]

< 보 기 >

ㄱ. $1 < a < 10$일 때, $[\log 100a] = 2$이다.

ㄴ. $[\log x] = 3$인 정수 x의 개수는 9×10^3이다.

ㄷ. 자연수 n에 대하여 $[\log x] = n$이면 $[\log x^2] = 2n$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. <보기>의 상용로그 중 그 소수 부분이 $\log A$의 소수 부분과 항상 같은 것을 모두 고른 것은? (단, A는 양수이다.)

[3점][2005년 7월 나13]

〈 보 기 〉

ㄱ. $\log 10A$ ㄴ. $\log A^{10}$ ㄷ. $\log \dfrac{10}{A}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

STEP 2. 개념의 심화적 활용

29. 자연수 x, y에 대하여 $\log x$, $\log y$의 정수 부분을 각각 m, n이라 하자. $m^2+n^2=4$를 만족하는 x, y에 대하여 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

[4점][2005년 10월 나29]

① 16200　② 16400　③ 16600
④ 17010　⑤ 24300

★개수 세기★
① $+$
사건들의 전개과정이 다를 때 => case 분류의 관점!
② $\times$
사건들의 전개과정이 같은 때, 즉 대칭성이 존재할 때!
③ $-$
i) 여사건의 이용 : $n(A)=n(U)-n(A^C)$
ii) 포함배제의 원리 : $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

30. x, y가 각각 2자리, 3자리의 자연수일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

[4점][2006년 4월 나16]

〈보 기〉

ㄱ. xy는 4자리 또는 5자리의 자연수이다.
ㄴ. $y=10x$이면 $\log_{10}x$와 $\log_{10}y$의 소수 부분은 같다.
ㄷ. $\frac{1}{x}$은 소수 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

31. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 정수 부분과 소수 부분을 $f(n)$, $g(n)$이라 하자. 세 자연수 x, y, z가 다음 조건을 만족시킬 때, $x+f(y)+f(z)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2013년 4월 나29]

(가) $f(x)<f(y)<f(z)$
(나) $g(x)=g(y)=g(z)$
(다) $x+y+z=15873$

하비T 수업교재 - 답지

수학 I

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

1. 지수와 로그

1) ①

[출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 n의 값을 구할 수 있는가?

$-n^2+9n-18=-(n-3)(n-6)$

이므로 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하기 위해서는

(i) $-n^2+9n-18<0$ 일 때,

즉, $2\le n<3$ 또는 $6<n\le 11$ 이고 n이 홀수이어야 하므로

n은 7, 9, 11 이다.

(ii) $-n^2+9n-18>0$ 일 때,

즉, $3<n<6$ 이고 n이 짝수이어어야 하므로 n은 4이다.

(i),(ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$\therefore\ 4+7+9+11=31$

2) ①

[출제의도] 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질 이해하기

$\sqrt[8]{6}=\sqrt[8]{2}\ \sqrt[8]{3}=\sqrt[4]{\sqrt{2}}\ \sqrt{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{a}\ \sqrt{b}$

3) ④

$\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$에서 $n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되는 경우는

$n=1$ 인 경우에 $m=1,2,3$

$2\leqq n\leqq 7$인 경우에 $m=3$

$n=8$인 경우에 $m=1,2,3$

따라서 순서쌍 (m,n)의 개수는

$3+6+3=12$

4) ①

[출제의도] 지수법칙을 활용하여 추론하기

(i) $\sqrt{\dfrac{2^a\times 5^b}{2}}=2^{\frac{a-1}{2}}\times 5^{\frac{b}{2}}$ 이 자연수이므로

$a-1=2m,\ a=2m+1$(m은 음이 아닌 정수)

$a=1,\ 3,\ 5,\ \cdots$

$b=2n$(n은 자연수)

$b=2,\ 4,\ 6,\ \cdots$

(ii) $\sqrt[3]{\dfrac{3^b}{2^{a+1}}}=\dfrac{3^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{a+1}{3}}}$ 이 유리수이므로

$a+1=3k,\ a=3k-1$(k는 자연수)

$a=2,\ 5,\ 8,\ \cdots$

$b=3l$(l은 자연수)

$b=3,\ 6,\ 9,\ \cdots$

(i), (ii)에 의하여

a의 최솟값은 5, b의 최솟값은 6

따라서 $a+b$의 최솟값은 11

5) ③

[출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

자연수 n의 값과 상관없이 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로 $f(n)=1$

$n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는

(i) $n(n-4)>0$일 때, 2

(ii) $n(n-4)=0$일 때, 1

(iii) $n(n-4)<0$일 때, 0

$f(n)>g(n)$에서 $g(n)=0$이어야 하므로

$n(n-4)<0$

즉, $0<n<4$이므로 자연수 n의 값은 1, 2, 3이다.

따라서 모든 n의 값의 합은 $1+2+3=6$이다.

6) 5

[출제의도] 지수가 실수인 식 계산하기

$a^6\div a^3\times a^2=a^5=a^k\ \ \therefore k=5$

7) 11

$\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}=a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}}=a^{\frac{3}{8}}$

$\therefore\ m+n=11$

8) 16

$2^a=3^2,\ 3^b=5^3$ 에서 $3=2^{\frac{a}{2}},\ 5=3^{\frac{b}{3}}$ 이므로

$5^c=\left(3^{\frac{b}{3}}\right)^c=3^{\frac{bc}{3}}=\left(2^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{bc}{3}}=2^{\frac{abc}{6}}$

$=2^{\frac{24}{6}}=2^4=16$

9) 17

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$2^{-a}+2^{-b}=\dfrac{1}{2^a}+\dfrac{1}{2^b}=\dfrac{2^a+2^b}{2^{a+b}}=\dfrac{9}{4}$ ...... ㉠

그런데 $2^a+2^b=2$이므로 이 값을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2}{2^{a+b}}=\dfrac{9}{4}$

$2^{a+b}=2\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{8}{9}$

따라서 $p=9,\ q=8,\ p+q=17$

10) ②

[출제의도] 지수법칙 이해하기

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 실근 α, β에 대하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$이다.

$\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=1$,

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=18$

$$\frac{1}{\alpha^3-1}+\frac{1}{\beta^3-1}=\frac{\alpha^3+\beta^3-2}{\alpha^3\beta^3-(\alpha^3+\beta^3)+1}=\frac{18-2}{1-18+1}=-1$$

$$\therefore 2^{\frac{1}{\alpha^3-1}}\times 2^{\frac{1}{\beta^3-1}}=2^{\frac{1}{\alpha^3-1}+\frac{1}{\beta^3-1}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

11) ④

$a=3^{55}=(3^5)^{11}=243^{11}$

$b=4^{44}=(4^4)^{11}=256^{11}$,

$c=5^{33}=(5^3)^{11}=125^{11}$

$\therefore\ b>a>c$

12) ⑤

$f(10)=g(10)$에서

$$(1+r_1)^{10}=\left(1+\frac{r_2}{2}\right)^{20}$$

$$1+r_1=\left(1+\frac{r_2}{2}\right)^2=1+r_2+\left(\frac{r_2}{2}\right)^2$$

$$r_1=r_2+\left(\frac{r_2}{2}\right)^2$$

$\therefore\ r_1>r_2$ $\cdots$㉠

$g(10)=h(10)$에서

$$\left(1+\frac{r_2}{2}\right)^{20}=\left(1+\frac{r_3}{4}\right)^{40}$$

$$1+\frac{r_2}{2}=\left(1+\frac{r_3}{4}\right)^2=1+\frac{r_3}{2}+\left(\frac{r_3}{4}\right)^2$$

$$r_2=r_3+2\cdot\left(\frac{r_3}{4}\right)^2$$

$\therefore\ r_2>r_3$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $r_3<r_2<r_1$

13) ②

[출제의도] 실생활 문제에서 지수방정식을 활용할 수 있는가?

$$\frac{W}{W_0}=\frac{1}{2}\times 10^{at}(1+10^{at})$$

$3=\frac{1}{2}\times 10^{15a}(1+10^{15a})$에서

$(10^{15a})^2+10^{15a}-6=0$

$(10^{15a}+3)(10^{15a}-2)=0$

$10^{15a}>0$이므로 $10^{15a}=2$

$$\therefore\ k=\frac{1}{2}\times 10^{30a}(1+10^{30a})$$

$$=\frac{1}{2}\times 4\times(1+4)=10$$

14) ⑤

[출제의도] 지수의 성질을 이용하여 명제의 참과 거짓을 추론한다.

ㄱ. A_4는 $2^a=\frac{4}{b}$에서 $4=2^a\times b$인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로

$4=2^1\times 2$, $4=2^2\times 1$

$A_4=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$ (참)

ㄴ. $m=2^k$일 때, $A_m=A_{2^k}$

A_m은 $2^a=\frac{2^k}{b}$에서

$2^k=2^a\times b$인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로

A_m

$=\{(1,\ 2^{k-1}),\ (2,\ 2^{k-2}),\ (3,\ 2^{k-3}),\ \cdots,(k,\ 2^0)\}$

이다.

따라서 $n(A_m)=k$ (참)

ㄷ. A_m은 $2^a=\frac{m}{b}$에서

$m=2^a\times b$인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이다.

$n(A_m)=1$이 되기 위해서는

$b=\frac{m}{2^k}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 k가 오직 하나만 존재하므로

$k=1$이어야 한다.

따라서 $m=2^1\times$(홀수)이어야 한다.

두 자리 자연수 중에서 $2^1\times$(홀수)인 자연수는

2×5, 2×7, 2×9, $\cdots$, 2×49 이다.

따라서 $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 5, 7, 9, $\cdots$, 49의 개수와 같다.

5, 7, 9, $\cdots$, 49는 첫째항이 5이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제23항을 나타낸 것이므로 조건을 만족시키는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15) 15

[출제의도] 로그의 뜻을 이해하기

(ⅰ) $x-2>0$, $x-2\neq 1$

(ⅱ) $-x^2+5x+14>0$

$(x+2)(x-7)<0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 만족하는 정수는 4, 5, 6
∴합은 15

16) 10

$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{32}\cdot\log_2\frac{1}{16}=\log_{2^{-1}}2^{\frac{5}{2}}\cdot\log_2 2^{-4}$
$=(-\frac{5}{2})\cdot(-4)=10$

17) ④

$\log_c b=\frac{1}{2}\log_a b$이므로 $\log_b c=2\log_b a$
$\therefore\ c=a^2$
$\log_b c=\frac{1}{3}\log_a c$이므로 $\log_c b=3\log_c a$
$\therefore\ b=a^3$
$a,\ b,\ c$는 1보다 크고 10보다 작은 자연수이므로
$a=2,\ b=8,\ c=4$
따라서 $a+2b+3c=30$

18) ⑤

$\log_a 2=\log_b 5=\log_c 10=\log_{abc}x=\frac{1}{k}$ 이라고 하면,
$\log_2 a=\log_5 b=\log_{10}c=\log_x abc=k$ 이다.
따라서,
$a=2^k,\ b=5^k,\ c=10^k$ 이므로 $ab=c$ 이다.
$\therefore\ k=\log_x abc=\log_x c^2$
이때, $k=\log_x c^2=\log_x 10^{2k}=k\log_x 100$ 이므로
$x=100$
[다른 풀이]
$$\frac{\log 2}{\log a}=\frac{\log 5}{\log b}=\frac{\log 10}{\log c}=\frac{\log 2+\log 5+\log 10}{\log a+\log b+\log c}$$
$$=\frac{\log 100}{\log abc}=\log_{abc}100$$
$\therefore\ x=100$

19) 31

$\log_2 a$의 정수부분이 4이므로 $4\leqq\log_2 a<5$
$\therefore\ 16\leqq a<32\quad\cdots$ ㉠
$\log_3 a$의 정수부분이 3이므로 $3\leqq\log_3 a<4$
$\therefore\ 27\leqq a<81\quad\cdots$ ㉡
㉠,㉡에서 $27\leqq a<32$
따라서, 자연수 a의 최댓값은 31이다.

20) ②

[출제의도] 산술기하평균의 관계를 이용하여 지수로그문제를 해결할 수 있다.
$a>1,\ b>1$에서 $\log_a b>0,\ \log_b a>0$
산술기하평균의 관계에 의하여
$\therefore\ \log_{a^3}b^2+\log_{b^4}a^3=\frac{2}{3}\log_a b+\frac{3}{4}\log_b a$
$$\geqq 2\sqrt{\frac{2}{3}\log_a b\cdot\frac{3}{4}\log_b a}=\sqrt{2}$$

21) 20

$\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}=\frac{3a+b}{3}=k$로 놓으면
$3a=k\log_a b,\ b=2k\log_b a,\ 3a+b=3k$
$\therefore\ k\log_a b+2k\log_b a=3k$
$\log_a b+2\log_b a=3$
$\log_a b=t$로 놓으면 $\log_b a=\frac{1}{t}$ 이므로
$t+\frac{2}{t}=3,\ t^2-3t+2=0$
$(t-1)(t-2)=0$
$t\neq 1$이므로 $t=2$
$\therefore\ 10\log_a b=10\cdot 2=20$
[다른 풀이]
$\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}$에서
$6a\log_b a=b\log_a b,\ \frac{6a}{\log_a b}=b\log_a b$
$\frac{6a}{b}=(\log_a b)^2\quad\cdots$ ㉠
$\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}=\frac{3a+b}{3}$ 이므로
$$\left(\frac{3a+b}{3}\right)^2=\frac{3a}{\log_a b}\times\frac{b}{2\log_b a}=\frac{3ab}{2}$$
$(\because\ \log_a b\times\log_b a=1)$
$\frac{9a^2+6ab+b^2}{9}=\frac{3ab}{2}$ 에서
$18a^2+12ab+2b^2=27ab,\quad 18a^2-15ab+2b^2=0$
$b\neq 0$이므로 양변을 b^2으로 나누면
$18\left(\frac{a}{b}\right)^2-15\cdot\frac{a}{b}+2=0$
$\frac{a}{b}=t$로 놓으면 $18t^2-15t+2=0$,
$(3t-2)(6t-1)=0$
$t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=\frac{1}{6}$
$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ 이면 ㉠에서 $(\log_a b)^2=4$

$\log_a b > 1$ 이므로 $\log_a b = 2$

$\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$ 이면 ㉠에서 $(\log_a b)^2 = 1$

$\log_a b > 1$ 이므로 모순

따라서 $\log_a b = 2$ 이므로 $10\log_a b = 20$

22) 13

$\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2\sqrt{n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\log_2 n \le 40$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\log_2 n = \log_2\sqrt{2}\,n^{\frac{3}{4}} = m$ (m은 40이하의 자연수)

$\sqrt{2}\,n^{\frac{3}{4}} = 2^m$

$n^{\frac{3}{4}} = 2^{m-\frac{1}{2}}$

$n = 2^{\frac{4}{3}(m-\frac{1}{2})} = 2^{\frac{4m}{3}-\frac{2}{3}}$

에서 m이 3으로 나누어 2가 남는 자연수이면 n도 자연수가 된다. 40이하의 자연수 중 조건을 만족하는 m은

2,5,8,⋯,38의 13개

23) ②

[출제의도] 로그를 활용하여 문제해결하기

$\sqrt{3}H_A = 2H_B$, $L_A = 2L_B$이므로

$$\frac{H_A}{H_B} = \frac{\frac{k}{L_A}\log\frac{1}{S_A}}{\frac{k}{L_B}\log\frac{1}{S_B}} = \frac{\frac{k}{2L_B}\log\frac{1}{S_A}}{\frac{k}{L_B}\log\frac{1}{S_B}}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{\log S_A}{\log S_B} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\log S_A}{\log S_B} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\log_{S_B} S_A = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$S_A = (S_B)^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

$$\therefore\ p = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

24) ③

ㄱ. $b = \frac{1}{2}$ 이면 $2^a = 5^{\frac{1}{2}}$ 에서

$a = \log_2\sqrt{5} = \log_4 5$ (참)

ㄴ. $2^a = 5^b$에서 $2^{\frac{a}{b}} = 5$

$\therefore\ \frac{a}{b} = \log_2 5$

그런데 $\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8$ 에서

$2 < \log_2 5 < 3$ 이므로 $2 < \frac{a}{b} < 3$ (참)

ㄷ. (반례) $2^a = 5^b = 10$으로 놓으면

$2 = 10^{\frac{1}{a}}$, $5 = 10^{\frac{1}{b}}$ 에서 $\frac{1}{a} = \log 2$, $\frac{1}{b} = \log 5$

$\therefore\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$ (유리수)

(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른풀이]

ㄴ. $2^a = 5^b$의 양변에 상용로그를 취하면

$a\log 2 = b\log 5$

$\therefore\ \frac{a}{b} = \frac{\log 5}{\log 2} = \log_2 5$

[참고]

$2^a = 5^b = k$ $(k > 1)$로 놓으면

$2 = k^{\frac{1}{a}}$, $5 = k^{\frac{1}{b}}$ 에서

$\frac{1}{a} = \log_k 2$, $\frac{1}{b} = \log_k 5$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_k 2 + \log_k 5 = \log_k 10$

이므로 $k = 10^{\frac{n}{m}}$ (단, m, n은 자연수)일 때

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$은 유리수이다.

25) ①

[출제의도] 로그의 뜻과 성질을 이용하여 로그의 값을 구한다.

$10^{0.94} = k$ 에서 $\log k = 0.94$

$\log k^2 + \log\frac{k}{10} = 2\log k + \log k - \log 10$

$= 3\log k - 1$

$= 3\times 0.94 - 1 = 2.82 - 1 = 1.82$

26) ①

[출제의도]상용로그의 정수수분과 소수 부분의 성질 이해하기

$\log_{10} 3^{10} = 10\log_{10} 3 = 4.771$ 이므로 3^{10} 은

5 자리의 정수이고,

$\log_{10}\left(\frac{3}{10}\right)^{10} = 10\log_{10} 3 - 10 = -6 + 0.771$ 이므로

$\left(\frac{3}{10}\right)^{10}$ 은 소수점 아래 6 번째 자리에서 처음으로

0 이 아닌 수가 나타난다.

$\therefore 5+6=11$

27) ②

ㄱ. $1<a<10$에서 $0<\log a<1$이므로

$\log 100a=2+\log a$

$\therefore [\log 100a]=2$ (참)

ㄴ. $[\log x]=3$이므로 $10^3 \leqq x<10^4$

따라서, 정수 x의 개수는

$10^4-10^3=10^3(10-1)=9\times10^3$ (참)

ㄷ. $\log x=n+\alpha$ $(0\leqq\alpha<1)$

$0\leqq\alpha<\frac{1}{2}$일 때, $[\log x^2]=2n$

$\frac{1}{2}\leqq\alpha<1$일 때, $[\log x^2]=2n+1$

$\therefore [\log x^2]=2n$ 또는 $2n+1$ (거짓)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

28) ①

$\log A=n+\alpha$ (n은 정수, $0\leqq\alpha<1$)라 놓으면

ㄱ. $\log 10A=1+\log A=(1+n)+\alpha$이므로

$\log 10A$의 소수 부분은 α이다. (참)

ㄴ. $\log A^{10}=10\log A=10n+10\alpha$이므로

$\log A^{10}$의 소수 부분은 항상 α라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ. $\log\frac{10}{A}=1-\log A=-n+(1-\alpha)$이므로

$\log\frac{10}{A}$의 소수 부분은 항상 α라 할 수 없다. (거짓)

29) ①

x, y가 자연수이고 m, n이 정수 부분이므로

m, n은 $m\geqq0$, $n\geqq0$인 정수이다.

$m^2+n^2=4$인 경우는 다음 두 가지의 경우가 있다.

(ⅰ) $m=2, n=0$일 때,

$2\leqq\log x<3$이므로 $100\leqq x<1000$

$0\leqq\log y<1$이므로 $1\leqq y<10$

(x, y)의 개수는 $900\times9=8100$

(ⅱ) $m=0, n=2$일 때,

(ⅰ)의 경우와 순서만 바뀌므로

(x, y)의 개수는 8100

따라서, 순서쌍 (x, y)의 개수는

$8100+8100=16200$

30) ③

$\log_{10}x=1+\alpha$ $(0\leqq\alpha<1)$

$\log_{10}y=2+\beta$ $(0\leqq\beta<1)$

ㄱ. $\log_{10}xy=\log_{10}x+\log_{10}y=3+\alpha+\beta$이고 여기에서 $0\leqq\alpha+\beta<2$ 이므로 정수 부분은 3 또는 4이다.

$\therefore xy$는 4자리 또는 5자리 자연수이다. (참)

ㄴ. $\log_{10}y=\log_{10}10x=1+\log_{10}x=2+\alpha$ (참)

ㄷ. (반례) $x=10$일 때, $\frac{1}{10}=0.1$ (거짓)

31) 150

[출제의도] 정수 부분과 소수 부분의 성질을 이해하여 문제 해결하기

(가)에서 (x의 자릿수)$<$(y의 자릿수)$<$(z의 자릿수)

(나)에서 자연수 x, y, z의 숫자 배열은 모두 같다.

(다)에서 자연수 x는 두 자릿수 또는 세 자릿수이다.

ⅰ) x가 두 자릿수인 경우

① $y=10x$, $z=10^2x$일 때,

$x+y+z=x+10x+10^2x=111x$

$111x=15873$인 두 자릿수 자연수 x는 존재하지 않는다.

② $y=10x$, $z=10^3x$일 때,

$x+y+z=x+10x+10^3x=1011x$

$1011x=15873$인 자연수 x는 존재하지 않는다.

③ $y=10^2x$, $z=10^3x$일 때,

$x+y+z=x+10^2x+10^3x=1101x$

$1101x=15873$인 자연수 x는 존재하지 않는다.

ⅱ) x가 세 자릿수인 경우

$y=10x$, $z=10^2x$일 때,

$x+y+z=x+10x+10^2x=111x=15873$

$\therefore x=143$, $y=1430$, $z=14300$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $x=143$, $y=1430$, $z=14300$

따라서 $x+f(y)+f(z)=143+3+4=150$