2010년 11월 18일 2011학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 해설

1. [지수와 로그의 단순 계산, 95%]

$$\therefore\ 2^3 \times \frac{1}{2} = 4$$

답 ②

※ 여러분들은 지금 수능 수리 영역의 첫 관문을 들어섰습니다. 계산 실수에 대한 두려움은 잊어버리세요!

2. [행렬의 단순 계산, 96%]

문제를 풀어서 정답에 이르는 길은 여러 가지가 있습니다. 그 중에서도 최고의 길인 자신에게 가장 익숙한 길을 찾아 가세요~ 출제자는 $A(A+B)$의 모든 성분의 합을 구하라고 하고 있네요.

분배→덧셈 or 덧셈→분배 ?

를 0.1초 정도 고민하신 분들이 계실지 모르겠지만 $A+B=2E$를 눈치 챘다면 아래와 같이 **덧셈→분배** 순서로 계산 했을 거에요.

$$A(A+B) = A(2E) = 2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

이므로 모든 성분의 합은 4입니다.

답 ④

3. [공간좌표에 대한 이해, 95%]

마치 2차원 평면상에서 두 점 사이 위치 관계를 떠올리듯, 3차원 공간상의 두 점 A, B와 또 각각의 점에 이르는 거리의 비가 $2:1$이 되는 위치상의 점 P를 머릿속에서 이미지화 해보세요. (참고로 세 점은 x, y 좌표의 변화율만 보더라도 일직선상에 놓여있지 않습니다.)

$$\overline{PA}^2 = 1+4+a^2 = a^2+5$$

$$\overline{PB}^2 = 1+1+1 = 3$$

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2:1 \quad \rightarrow \quad 4\overline{PB}^2 = \overline{PA}^2$$

$$12 = a^2+5 \quad \rightarrow \quad \therefore\ a = \sqrt{7} \quad (\because a>0)$$

답 ①

4. [식을 세워 따지는 무리방정식, 95%]

유독 08, 09, 10년 평가원 시험에선 첫 페이지 4번 문제 자리에 계산이 호락호락하지 않은 문제가 나와서 학생들을 힘들게 했었습니다. 그런데 올해는 안 그렇군요.. ㅎ_ㅎ 이 문제는 여러분들이 이미 수없이 많이 풀어봤을 바로 그 유형입니다. 늘 그래왔듯이 무연근 낚시를 조심조심해서 풀면 됩니다.

무난하게 $\sqrt{4x^2-5x+7} = t \geq 0$으로 두고

$t - t^2 + 7 = 1$ 이렇게 식을 계속 풉니다.

$$t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2) = 0$$

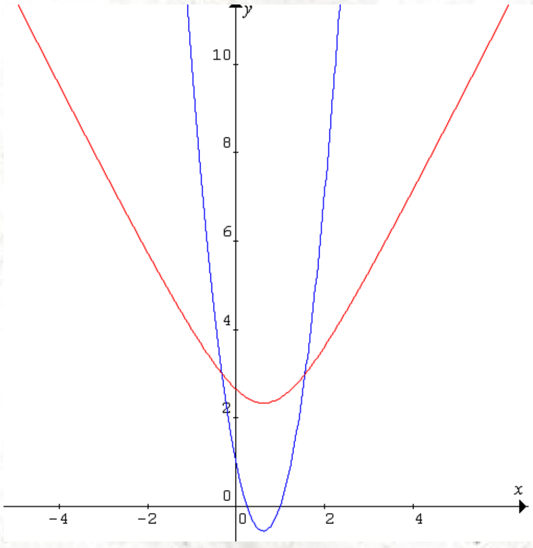
$$t = \sqrt{4x^2-5x+7} = 3 \quad (\because t \geq 0)$$

$$4x^2 - 5x + 7 = 9$$

$$4x^2 - 5x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore\ x_1x_2 = -\frac{1}{2}$$

답 ①

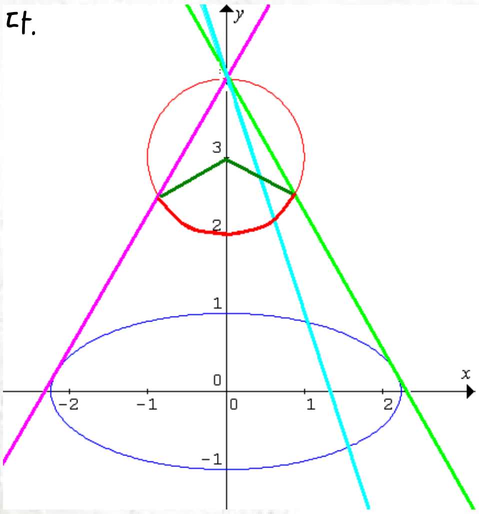
※



주어진 무리부등식을 $y = \sqrt{4x^2-5x+7}$과 $y = 4x^2-5x+1$로 나눠보면 방정식의 실근들은 결국 두 그래프의 교점의 x좌표들이 됩니다. (굳이 무리함수의 도함수를 따지지 않더라도 직관적으로, 내지는 쌍곡선의 일부임을 이용해서 그려낼 수도 있습니다.) 하지만 매번 이렇게 준 식을 그대로 기하학적으로 해석하여 풀기는 **비효율적이니까** 정방정식으로 **동치변형(해집합은 보존하되 개형을 바꾸는 것)**해서 푼 거겠죠? 여담이지만 **2008년 04월 15일 교육청 수리 (가형) 20번**에선 그래프 상에 나타나지도 않는 허근까지 물어 봤었습니다.

5. [원과 타원 그리고 자취, 58%]

드디어 본격적으로 머리를 굴려야 하는 문제가 등장했습니다. 만약 다른 시험이었다면 20~25번 즈음에서 주관식으로 물어봄직도 한 문제입니다. 암튼 제가 보기엔 **2006년 09월 06일 Kice 2007 대수능 9월 모의평가 수리 (가형) 09번** 문제와 똑같네요. 이건 아까 3번 문제와 달리 **그래프를 꼭!!! 그려봐야 합니다.**



원 위의 점 A는 고정되어 있고, 점 P가 타원 위를 뱅글뱅글 돌아다닐 때, 두 점 A, P가 휩쓸고 간 영역은 모래시계 모양의 자취를 그리고, 또 그 경계는 한 점에서 타원에 그은 두 접선이 됩니다. 바로 여기서 이 문제를 3점답게 푸는데 유용한 공식이 있다면 **타원에 대하여 기울기가 m인 접선의 방정식** $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ 입니다. (작년 10 수능 킬러 문제였던, 즉 **2009년 11월 12일 2010학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 25번** 문제 풀 때도 이 공식이 유용하게 쓰였더랬죠.) 점 A에서 타원에 그은 접선의 방정식을 요리 조리 이용해서 식을 쭉 풀어갑시다. 접선 공식의 관점에서 $y = mx + \sqrt{5m^2 + 1}$ 를 도출할 수 있고, 한편 접선의 y절편이 4임을 이용하면 $y = mx + 4$이므로, 이를 연립하면 $m = \pm\sqrt{3}$ 이 나옵니다. 그러고 보니 또 $\pm\sqrt{3}$ 이 특수각을 내포하고 있는 친근한 숫자네요!! 어쩔 수 없게도 이 부분만큼은 그저 자연스럽게 '아, 당연하지~!' 하고 눈치 채야 다음으로 넘어갈 수 있습니다. (한 때 엄청난 오답률을 자랑했던 **2009년 09월 03일 Kice 2010 대수능 9월 모의평가 수리 (가형) 23번**에서 또한 이랬습니다;;)

문제에서 구하라고 하는 점 Q의 자취는 바로 이 특수각 60°를 갖는 원주각의 호의 길이이기도 하면서, 반지름 두 개에 해당하는 (초록색) 보조선을 그어보면, 중심각이 $120^\circ = \dfrac{2\pi}{3}$인 부채꼴의 호의 길이가 됩니다. 고로 구하고자 하는 자취의 길이는

$$\therefore 1 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

막상 쓰고 나니 제가 봐도 복잡한 것 같아서 문제를 푼 순서를 다시 요약해드리자면 아래와 같습니다.

0. 문제 읽기
→ 1. 그래프 그리기
→ 2. 접선이 경계임을 파악하기
→ 3. 공식으로 접선의 기울기 구하기
→ 4. 중심각이 특수각임을 알아채기
→ 5. 원주각에서 부채꼴 호의 길이 구하기

답 ④

※ 만약 그래프를 그리지 않고서 풀 수 있다면 대부분의 4점짜리 문제를 암산으로 풀어버리는 진~짜진짜 초고수거나, 혹은 귀찮아서 아예 그릴 생각도 않고 찍신에게 운명을 맡긴 학생일 겁니다;

잠깐 여러분들이 수능 수리영역 출제위원으로 뽑혀서 평가원에 납치되었다고 가정해봅시다. 평가원장느님께서 수능은 무조건 쉽게 내겠다고 언론에 연막을 폈으니, 방심하고 있을 수험생들의 점수를 최대한 빼앗을 수 있도록 어렵게 내라고 할 텐데요. 그러면 여러분들은 아마

'알고 보면 스며든 내용은 결코 어렵지 않은데, 그림을 꼭 그려서 풀어야만 하게끔 문제를 만들면 정답률이 팍팍 떨어지더라.'

는 단순한 사실을 이용할 겁니다. (실제로 지금 메가스터디에서의 1, 2, 3, 4, 5, 6번의 정답률을 보니 95, 97, 95, 96, 58, 83% 네요.) 그러니 수험생의 입장에선 귀찮더라도 평소에 수학 문제 풀 때 그림 그려보는 연습을 많이 하는 게 당연하겠죠^^?

written by ictteru_

6. [적절한 기준을 세워 푸는 경우, 83%]

경우의 수는 아무리 많은 문제들을 풀어 제껴도 불안한 부분입니다. 여기에 그나마 몇 가지 팁(?!)을 알려 드리자면, 경우의 수 문제를 풀 때에는 **문제에서 제시하고 있는 상황과 일치하는 간단한 수학적 경우로 바꾸어 생각하되, 적절한 기준을 세워서 꼼꼼하게 구한 후에, 문제에서 요구하는 바를 들어주는 것**입니다. 이 문제 또한 찬찬히 잘 읽어보니까 A, B, B, B, B, C, C를 일렬로 줄 세우기임을 알 수 있고, (가), (나) 두 가지 제약조건이 걸려있네요. 여기서 또 직관적으로(;;) B가

"제발 나를 기준으로 세워줘~"

하는 소리를 들어야 합니다. 그래서

$(i)\ A, B, B, C, C$

$(ii)\ A, B, B, B, C$

$(iii)\ A, B, B, B, B$

이렇게 나누고 각 경우의 수를 모두 더하면 되네요.

$$\therefore\ \frac{5!}{2!2!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{4!}=55$$

답 ①

7. [언어 영역 문제, 84%]

6번과 아주 흡사한 유형입니다. 마치 아이큐 테스트나 상황 판단 능력을 물어보는 시험에나 나올 법한 문제 같네요. 암튼 흔하기도 흔하거니와 점수를 퍼주는 문제인데, 이 타이밍에 어떤 모의고사나 문제집에서 이 수능 문제를 적중했다고 말하는 사람이 있다면 나쁜 사람입니다;

$$(i)\ 40+30\ ;\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$$

$$(ii)\ 30+40\ ;\ \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$(iii)\ 20+50\ ;\ \frac{1}{6}\times\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{36}(3+4+3)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

답 ③

8. [함수의 연속성 & 그래프 간 연산, 52%]

7차 초창기만 하더라도 이런 문제들이 드물었었는데 7차 막바지에 들어서니까 온갖 응용 문제들이 Level-up 해서 만렙을 찍고 나오기 시작했습니다. 그나마 다행히 $f(x)$그래프를 밑에 그려줬네요.

ㄱ은 2007년 11월 15일 2008학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 08번

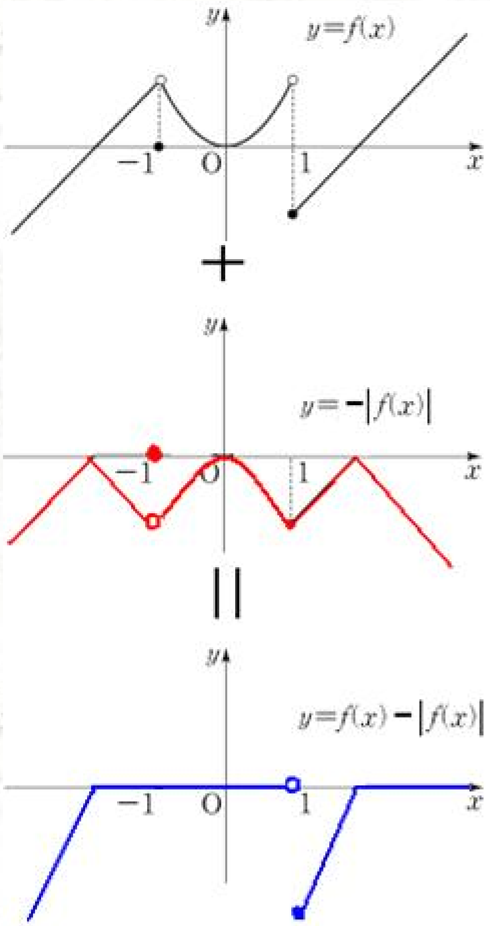
ㄴ은 굳이 뽑자면 2010년 09월 평가원 대비 포카칩 모의고사 수리 가형 16번

ㄷ은 2006년 11월 16일 2007학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 07번

과 싱크로율이 99.999…%쯤 되네요. (착실히 기출문제를 풀어야 함을 역설하기 위해..☞☜..)

ㄱ은 $f(1+0)+f(-1-0)=0$이고,

ㄴ에선 $f(x)$의 x축 아랫부분 접어 올린 $|f(x)|$를 → 다시 위아래를 뒤집은 후 → 원래 $f(x)$에 다시 더한 함수 → 에서의 연속성을 묻는데, 시키는 대로 다 해야 합니다;;;



written by ictteru_

x축 대칭인 부분은 설령 그게 곡선이나 불연속 지점이라 할지라도 서로 상쇄가 되고, 직선끼리 더하면 직선이 된다는 사실을 떠올리세요! (혹시나 **2010년 09월 평가원 대비 포카칩 모의고사 수리 가형 16번**을 풀어보신 분들은 오~ 하셨을지도 모르겠네요. ^^;)

ㄷ을 풀기 위해서 다시 한 번 연속의 조건을 짚어 봅시다. **함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라 함은 $x=a$에서의 극한값과 함숫값이 같아야 합**니다. 즉, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$가 되어야 하죠.

문제로 돌아와서, $f(x)$ **자체는 불연속점을 두 개 갖고 있는데, 그걸 x축 양의 방향으로 a만큼 평행이동 한 $f(x-a)$와 곱한 새로운 함수에선 연속성이 어떻게 될지에 대해서 묻고 있습니다.** $f(x)$와 $f(x-a)$의 **'불연속 가능점'** (저는 편의상 이렇게 부릅니다.)은 최대 $x=-1, 0, a-1, a$의 네 군데입니다. 대충 a를 잡아서 곱했다간 불연속 가능점 네 군데가 모조리 불연속이 되어버릴 수도 있습니다. 그동안 수없이 풀어왔던 기출문제들에선 **$x=a$에서 불연속인 함수를 연속함수로 만들기 위해 $x=a$에서 x축과 교점을 갖는, 즉 y값이 0인 함수를 곱해 준게 기억나세요?**

$x=0$ 에서의..	연속성	미분가능성
$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$	×	×
$g(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$	○	×
$h(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$	○	○

꼬꼬마 시절의 여러분들을 괴롭혔던 문제입니다만, **샌드위치 정리를 써서 극한값, 함숫값이 동시에 0으로 수렴시키는 전략을 사용했죠.** 이 문제에서도 마찬가지입니다. 비록 복잡한 것 같아도 $f(x)$를 주의 깊게 살펴보면 $x=-2,-1,0,1,2$에서 순서대로 **함숫값이 0, 불연속, 함숫값이 0, 불연속, 함숫값이 0**입니다. 그래서 $a=1$로 잡으면 불연속 가능점들을 연속이 되게 할 수 있습니다.

답 ②

※ ㄴ풀 때 꼭 그래프 상에서 연산을 하지 않아도 됩니다. 식을 세워 풀어도 $g(x)=f(x)-|f(x)|$를

$$g(x)=\begin{cases} 2x+4 & (x \le -2) \\ 0 & (-2<x<1) \\ 2x-4 & (1<x<2) \\ 0 & (x \ge 2) \end{cases}$$

이렇게 두면 그만인데, 이 중에서 자기가 편한 방식을 취하면 됩니다.

9. [언어 영역 문제, 89%]

주어진 수치들을 수식의 적절한 위치에 대입하여 원하는 값을 계산해야 합니다. 아래는 이럴 때 유용한 이항관계입니다.. ㅎ_ㅎ

지반의 상대밀도를 구하기 위하여 지반에 시험기를 넣어 조사하는 방법이 있다. 지반의 유효수직응력을 S, 시험기가 지반에 들어가면서 받는 저항력을 R라 할 때, 지반의 상대밀도 $D(\%)$는 다음과 같이 구할 수 있다고 한다.

$$D=-98+66\log\frac{R}{\sqrt{S}}$$

(단, S와 R의 단위는 metric ton/m^{2}이다.)

지반 A의 유효수직응력은 지반 B의 유효수직응력의 1.44배이고, 시험기가 ~~지반 A에 들어가면서 받는 저항력은~~ 시험기가 ~~지반 B에 들어가면서 받는 저항력~~의 1.5배이다. 지반 B의 상대밀도가 65(%)일 때, 지반 A의 상대밀도(%)는? (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.) [3점]

문제를 채 다 읽기도 전에 이미 어떻게 식들을 처리할지 나름의 전략을 세우고서, 아래와 같이 푸셨겠죠..ㅇ_ㅇ?

$65=-98+66\log\dfrac{R_B}{\sqrt{S_B}}$ 임을 이용하면

$$\begin{aligned} \therefore\ -98+66\log\frac{1.5R_B}{\sqrt{1.44S_B}} &= 65+66\log\frac{1.5}{\sqrt{1.44}} \\ &= 65+66\log\frac{5}{4}=71.6 \end{aligned}$$

답 ④

10. [무한등비급수의 합 공식을 얼마나 잘 쓰는지, 89%]

무한등비급수는 고등학교 수준에서 그 값을 구할 수 있는 급수 중 몇 안 되는 대표적인 예입니다. 알맹이만 끄집어내어 말하자면 초항과 공비만 알면 끝이죠.

$$\therefore \frac{\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 1\right\}\times 2}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

이렇게 실전에선, 주어진 그림 상에서 닮음비를 파악한 다음 바로 한 줄 만에 식 쓰고 답을 계산하는 것이 이상적이겠죠?

일단 어떻게 해서 저 식이 나왔는지를 봅시다. 문제에선 그림의 색칠된 삼각형 넓이들의 총합을 구하라고 하고 있는데, 굳이 '삼각형 한 변의 길이비'로 따지지 않아도 됩니다. 계산하기 쉬운 '직사각형들의 길이비'로 구해도 됩니다. 여기서 질문을 하나 던져 볼게요.

"구하라고 한 건 삼각형 넓이들의 무한 합인데, 직사각형들은 왜 그려놨을까요?"

여러가지 훌륭한 답변들이 있겠지만, 제가 원한 답변은 **"삼각형들 간의 닮음비를 고정시키기 위해서"** 입니다. 삼각형만 대충 비슷하게 그려나간다면 의도치 않게 줄어드는 비율이 부정확해질 수도 있고, 그림이 삐뚤빼뚤해질 수도 있습니다. 하지만 직사각형들과 함께 삼각형들을 저런 식으로 그려나간다면 닮음비가 유지 되거든요. 이 때 삼각형들의 닮음비나 직사각형들의 닮음비가 서로 같습니다! 그래서 닮음비를 $\overline{B_1C_1}:\overline{B_2C_2}=2:\frac{2}{\sqrt{3}}$로 둘 수도 있는거구요. 그리고 **공비는 넓이비니까 닮음비를 제곱한 수치를 공식에 사용해야겠죠?** 삼각형 넓이야 그냥 구하면 되구요.

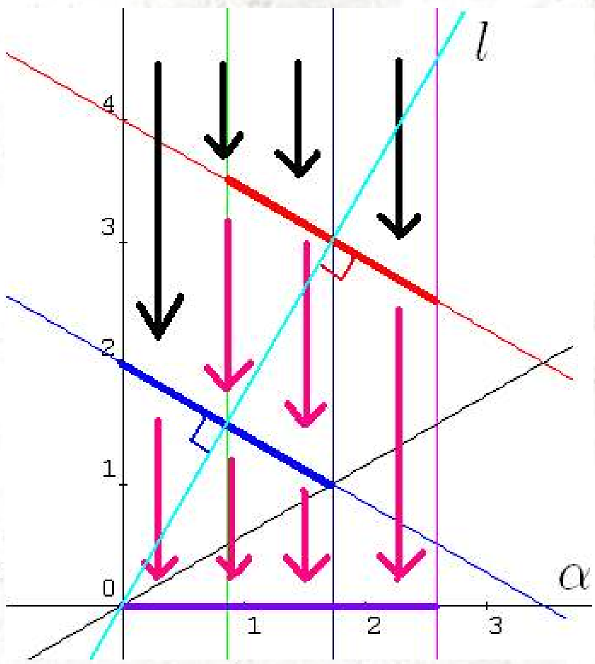
답 ②

※ 작년 6, 9월엔 이 문제가 둘 다 3점짜리로 쉽게 나왔었는데, 막상 수능에선 4점짜리 초항을 구하기 까다로운 형태로 나와서 뒤통수를 쳤습니다. 그래도 올해는 이 문제가 9월과 비슷한 난이도로 나왔네요.

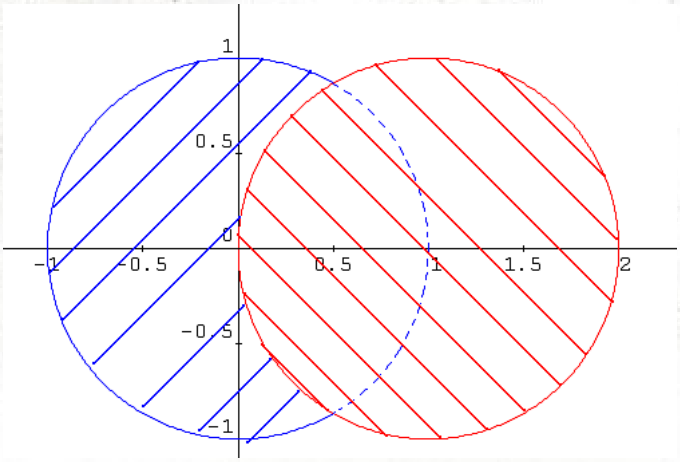
11. [정사영에 대한 종합적 이해, 47%]

정사영 문제들의 응용은 $S'=S\cdot\cos\theta$ 이 공식에서 모든 것이 시작됩니다. 이 문제는 S와 θ만 파악하면 끝나는 문제구요. 헌데, S나 $\cos\theta$ 둘 중 하나만 구하기 어렵게 내는 게 일반적인데, 이 문제는 둘 다 생각을 해야 하네요.

문제가 3차원 공간도형 문제로 나왔다고 해서 절대로 겁먹을 필요 없습니다! 일단 2차원으로 간략하게 축소시켜서 생각해보면 이해가 더 잘됩니다. 이 때 상황을 **정면에서 바라본 그림**은 아래와 같습니다.



네. 죄다 특수각들입니다. 이렇게 상황이 예쁘니까 계산도 딱딱 맞아 떨어집니다. 물론 빨간 부분과 파란 부분은 이렇게 보면 선분이지만 실제론 모두 원을 나타냅니다. 그리고 각각이 평면 α와 이루는 각도 θ는 그림에 적혀져 있는 60°가 아니라 30°입니다. (초보적인 낚시에 낚이시면 안 됩니다 ㅠ) 그리고 지금 출제자가 요구하고 있는 건 아래 보라색 부분인 그림자의 넓이니까 정사영 되기 전의 원래 면적 S에 해당하는, 빛의 진행방향 쪽이 아닌 직선 l 쪽에서 바라 본 면적값만 구하면 되겠네요!



아마도 이렇게 생겼을 겁니다. (단, 처음부터 바로 정사영 된 타원 두 개가 겹친 도형의 넓이 S'을 구하려고 한다면 계산이 지나치게 복잡해집니다.)
계산이 귀찮더라도 딱 절반인 (부채꼴 + 삼각형) 넓이를 구해서 두 배 해주면 되겠네요.

$$S = \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\right)\times 2$$

$$= \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이제 코사인 값을 적절하게 곱해주면 끝입니다.

$$\therefore\ S\cdot\cos 30^\circ = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ⑤

※ 정사영 문제에선 빛이 어떤 방향에서 오는지, 특히 그 빛이 그림자가 놓일 평면에 수직한지를 섬세하게 체크 해보는 것이 중요합니다. 그렇다고 모든 유형들을 여기서 설명해드릴 수 없기에, 대신 이에 관해서 생각해 볼 수 있는 좋은 문제들을 소개합니다.. ~ . ~ ;;

2007년 10월 10일 교육청 수리 (가형) 07번
2009학년도 공군사관학교 1차 선발시험 문제지 (수리 영역 - 자연) 23번
2008년 09월 04일 Kice 2009 대수능 9월 모의평가 수리 (가형) 25번
2009년 09월 평가원 대비 포카칩 모의고사 수리 가형 24번

12. [행렬의 탈을 쓴 언어 문제, 62%]

문자 관계만 파악하면 별 어려운 문제가 아닌데, 11번의 영향 때문에 정답률이 낮은 것 같네요.
$A, B \in S,\ P \in T$ 이고, $a+b \neq 0, pq \neq 0$ 임을 염두에 두고 문제에서 시키는 대로 풀어갑시다.

ㄱ. $PA = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}(a\ b) = \begin{pmatrix} ap & bp \\ aq & bq \end{pmatrix}$는 $D=0$이므로 당연히 역행렬을 갖지 않습니다.

ㄴ. $PB = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}(c\ d) = \begin{pmatrix} cp & dp \\ cq & dq \end{pmatrix}$는 $pq \neq 0$라는 초기조건에 의해서 $A = B$일 수 밖에 없습니다.

ㄷ. $PA\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+bp \\ aq+bq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 즉,
$(a+b)p = 1, (a+b)q = 1$을 만족하는 P가 존재하냐고 묻고 있는데요, 걍 간단하게 $a=1, b=0$ $p=1, q=1$로 잡아도 되네요.

답 ⑤

13. [정규분포 + 조건부확률, 80%]

재래시장을 이용하는 고객의 집에서 시장까지 이르는 거리를 X라 하면, 확률변수 X는 정규분포 $N(1740, 500^2)$을 따릅니다. 이 때 집에서 시장까지의 거리가 $2000m$ 이상인 고객과 $2000m$ 미만인 고객 중에서 자가용을 이용하여 시장에 왔을 확률 p_1, p_2는

$$p_1 = P(X \geq 2000)\times 0.15$$
$$= P(Z \geq 0.52)\times 0.15 = 0.045$$
$$p_2 = P(X < 2000)\times 0.05$$
$$= P(Z < 0.52)\times 0.05 = 0.035$$

이고, 따라서 구하고자 하는 확률은

$$\therefore\ \frac{p_2}{p_1+p_2} = \frac{35}{45+35} = \frac{35}{80} = \frac{7}{16}$$

답 ②

※ 이와 아주 흡사한 7차 기출 교육청, 평가원 문제만 하더라도

2004년 05월 20일 교육청 수리 (가형) 10번
2005년 03월 30일 교육청 수리 (가형) 26번

2005년 07월 14일 교육청 수리 (가형) 20번
2005년 10월 13일 교육청 수리 (가형) 14번
2006년 05월 19일 교육청 수리 (가형) 24번
2006년 10월 12일 교육청 수리 (가형) 17번
2008년 11월 13일 2009학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 08번
2009년 11월 12일 2010학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 09번

이렇게 많았습니다. 그럼에도 불구하고 여전히 이 문제가 이상하다고 생각하시는 분은 한 번 클릭 해주세요..+_+!

http://orbi.wizet.com/bbs/board.php?bo_table=xi_orbi_mat&wr_id=88886

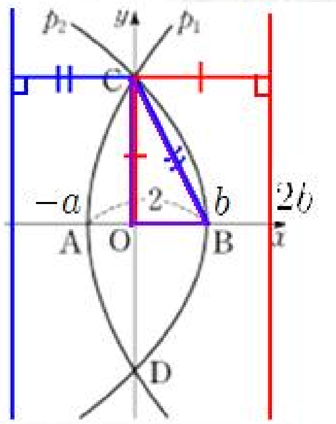
14. [두 포물선의 성질, 61%]

이번에도 여러분들이 출제위원이라고 생각해보세요. 이차곡선 파트에서 문제를 내긴 내야 하는데, 고등학생들이 잘 모르는 이심률 같은 내용을 물어봐야 할까요? 아니면 누구나 다 알고 있는(?) 당연한 사실을 요리조리 스크류바처럼 꼬아서 문제를 내야 할까요? 두 말할 필요도 없이 후자입니다. 그래야 수능이죠..ㅇ_ㅇ? 문제에선 지금 포물선 두 개를 병행해서 물어보고 있는데, 뭐 어떻게 풀어야 할지 감이 안 잡힌다고 합시다. 그럴 때마다 정의(Definition)로 돌아가면 됩니다. 포물선의 정의는 **평면 위의 한 점(=초점)에서 정직선(=준선)에 이르는 거리가 같은 점들의 자취**입니다. 행여나

'이보시오~ 해설자 양반!! 그 정의쯤이야 충분히 잘 아는데도 이 문제를 이해하지 못하겠구려..'

하시는 분들은 문제 풀이 경험 부족이 원인입니다. 실전에서 문제 푸는데 정의를 능수능란하게 활용할 수 있도록 연습해야 합니다. (사실 관련 평가원 기출 문제만 다 풀어 봐도 충분합니다 ㅎ)

암튼 이 문제는 두 포물선의 초점이 일치하지 않아서 위치관계를 파악하고 보조선(준선) 긋기가 까다롭습니다. 하지만 뒤집어 말하자면 그걸 파악하는 것이 남들보다 빠르고 쉽고 정확하게 푸는 비결이 되기도 합니다. 착실하게 공부해 온 학생이라면 누구나 맞출 수 있는 게 수능 문제 아니겠습니까..



$\overline{AB}=2$ 에서

$a+b=2$

$\triangle OBC$에서 피타고라스 정리를 적용하면

$(a+2)^2=b^2+(2b)^2$

이제 이 두 가지 식을 연립합시다.

$(4-b)^2=5b^2$

$b^2+2b-4=0 \;\rightarrow\; b=-1+\sqrt{5}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2b=2(\sqrt{5}-1)$

답 ③

15. [귀납법 속에 축차대입법 있다, 46%]

올해 6, 9월 평가원 시험을 통해서 누누이 강조된 문제였습니다. 아마도 증명 부분의 생략한 행간을 추적하지 않고, 숫자 대입해가며 출제자의 의도를 무시해서 푸니까 문제를 진화시킨 모양입니다. 그래도 9월보단 점화식이 쉬운 구조를 띄고 있네요.

$\boxed{a_1a_2\cdots a_n}a_{n+1}=\boxed{a_1a_2\cdots a_n}\times(n+1)+(n-1)!$

여기서 양변을 $(n+1)!$로 나누면

(가) $=f(n)=\frac{(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)n}$

이 때 (가)는 축차대입법을 써서 구하는 것이 일반적이죠. (자주 나오니까 아예 일반항을 외우고 계신 분들도 있겠네요.+_+;)

$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 에서 양변에

$n\Rightarrow 1, 2, \cdots, (n-1)$을 대입하여 변변 더하면

$b_n-b_1=1-\frac{1}{n}$

$\rightarrow\; b_n=$ (나) $=g(n)=2-\frac{1}{n}$

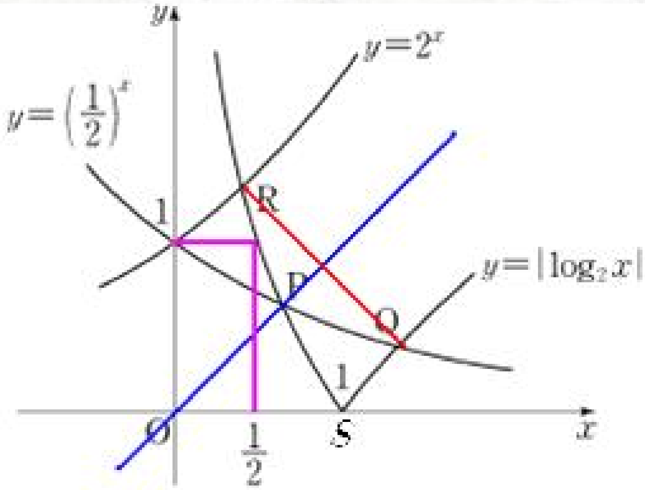
$\therefore f(13)\times g(7)=\frac{1}{14\cdot 13}\times\left(2-\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{98}$

답 ⑤

written by ictteru_

16. [고난도 지수로그함수 그래프, 45%]

ㄱ, ㄴ은 이미 기출 된 유형이고, ㄷ이 이전보다 조금 더 심화시킨 버전입니다. 보통 평가원에서 이러한 신유형을 선보이면 온갖 문제집과 사설 모의고사들에서 뒤쫓아 가기에 급급해하는데, 확실히 그럴 만도 하다는 생각이 드네요. 암튼 문제를 풀어봅시다. 보조선들은 이정도면 충분합니다.



ㄱ. x_1이 1보다 작다는 건 당연한데, 문제는 $\frac{1}{2}$과의 대소 관계입니다. 하지만 분홍색 보조선을 그어보면 금방 보이죠. 2009년 11월 12일 2010학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 16번 ㄱ과 겹칩니다. 그러고 보니 문제 번호까지 똑같군요!

ㄴ. 2007년 11월 15일 2008학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 16번 ㄷ과 아주 흡사합니다. $xy=k$가 k값이 변함에 따라 어떻게 개형이 달라지는지 생각해보면 당연합니다. 하지만, 이렇게 풀면 ㄷ과 깔끔하게 연관 짓지 못합니다. 출제자는 ㄷ 하나를 묻고 싶었는데, 그것만 물어보면 학생들이 힘들어 할까봐 넌지시 ㄴ에서 힌트를 던져준 셈이거든요. (물론 개인적인 견해입니다;;)

ㄷ. 임의의 지수, 로그, 직선 그래프 간에 교점이 설령 눈에 빤히 보일지라도 근을 구할 수 있는 경우는 극히 드뭅니다. 출제자가 2005년 04월 26일 교육청 수리 (가형) 16번처럼 수치를 미리 조작해서 제시하되 교점 좌표를 가르쳐주기도 하지만, 그렇지 않는 경우가 더 많습니다. 이 문제 또한 P, Q, R의 좌표를 하나도 구할 수 없습니다. 심지어 대학 수준에서도 이러한 경우엔 계산기 등의 힘을 빌려서 근삿값을 구하는 정도거든요. 하지만 이 문제는 수능에 나왔고, 충분히 풀 수 있는 문제이기도 합니다.

다 아는 말들을 읽느라 지루해 하실 분들은 벌써 눈치 채셨겠지만ㅠ, 여태껏 사용하지 않은 성질인, **지수함수와 로그함수가 특정 부분끼리 서로 적절하게 역함수 관계이므로 대칭성을 이용하는 것이 열쇠**입니다. $x_1=y_1$, $x_2=y_3$, $x_3=y_2$이므로 ㄴ은 당연히 참이고, ㄷ에서 물어 보는 건

$$x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1)\,?$$

$$\Leftrightarrow y_3(x_1-1)>y_1(x_3-1)\,?$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_3}{x_3-1}>\frac{y_1}{x_1-1}\,?$$

$$(\because -1<x_3-1<x_1-1<0)$$

가 됩니다. 아직도 감이 안 오시나요? 그렇담

$$\frac{y_3-0}{x_3-1}>\frac{y_1-0}{x_1-1}\,?$$

이렇게 한다면요...ㅇ_ㅇ? 2007년 03월 14일 교육청 수리 (가형) 10번과 비슷하게 기하학적으로 해석하자면 부등식이 의미하는 건

(직선 SR의 기울기) > (직선 SP의 기울기)?

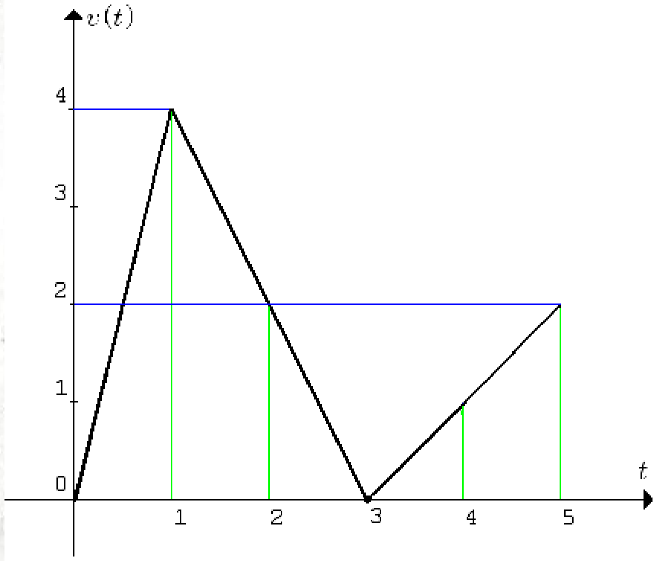
가 됩니다. 고로 이것은 거짓입니다. 참고로 S는 제가 임의로 써놨습니다. 종종 몇몇 기출문제들에선 필요한 수치 등을 그래프 상에서 일부러 지워 놓기도 하거든요. 그땐 당연히 푸는 사람이 필요에 의해 써넣어서 풀어야 겠죠?

답 ③

※ 실전 수능에서 수험생들의 이 문제의 답을 선택한 비율이 3, 1, 45, 3, 46% 인걸로 봐서 ㄷ이 정답률을 50% 가까이 깎아놨군요. 참고로 포카칩님 말씀하시길 '이번 수능에선 어려운 문제들마다 ㄷ이 전부 오답이었다' 고 합니다. 늘 그래왔지만 '아, 이건 어려운 문제니까 당연히 ㄷ도 맞겠지...' 라는 안일+안이한 생각에서 벗어나 본질을 꿰뚫은 원론적인 학습만이 유일한 해결책인가 봅니다.

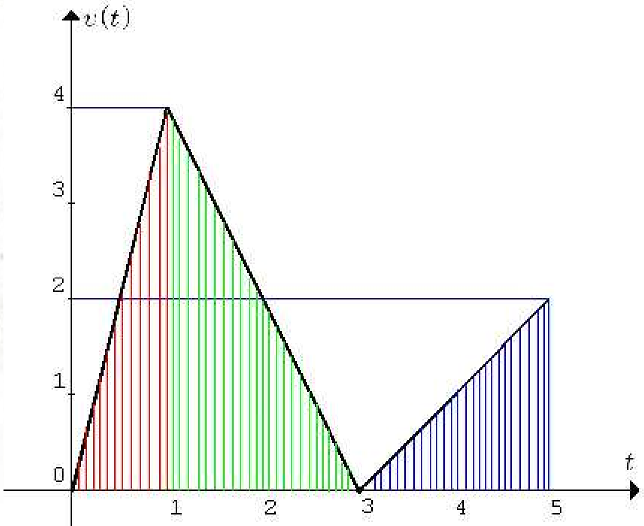
17. [미적분을 이용한 그래프 해석, 29%]

일단 문제 상황을 정확히 이해해야 한다는 점에서 **2009년 11월 12일 2010학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 24번** 문제와 매우 흡사했습니다. <보 기>를 살펴보기 전에 문제를 자세하게 읽고 $f(x)$의 정체를 파악해야 하는데요..



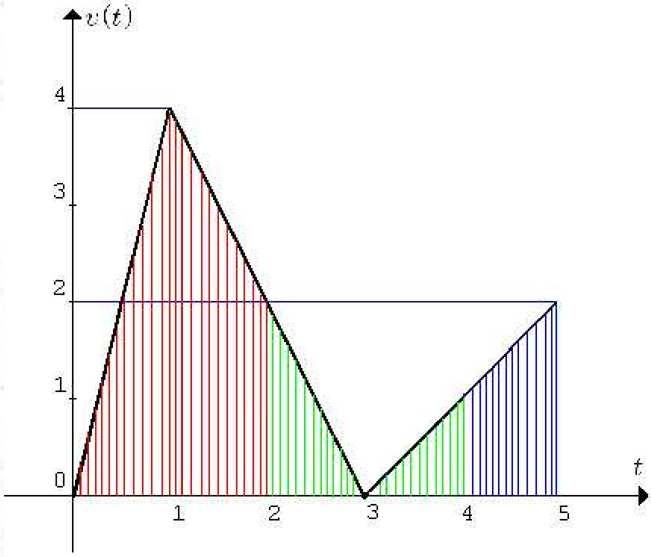
이렇게만 그래프를 그리고서 <보 기>로 바로 눈이 갔다면 아마 ㄴ에서 낚일 겁니다. 문제에서 그 아래 부분에도 설명이 계속 있잖아요? ㄱ, ㄴ, ㄷ에서 묻고 있는 건 $v(t)$가 아니라 $f(x)$입니다! 쉬운 문제였더라면 $v(t)$에서 물리 시험에나 나올법한 질문들을 했을 텐데, 여기선 $f(x)$를 정의하길 위 그래프를 $[0, x]$, $[x, x+2]$, $[x+2, 5]$ **까지 각각 적분한 수치 중에서 최솟값을 취한 것**이라 했습니다. 여기서 판단을 잘해야 합니다. **무지막지한 계산들을 통해서 $f(x)$를 다 구할 것인가 vs ㄱ, ㄴ, ㄷ을 풀 정도로만 최소한으로 정보를 파악 하느냐.** 수능은 주어진 시간 내에 누가 얼마나 많은 문제를 맞췄냐를 측정하는 시험입니다. 따라서 시간 또한 평가 대상에 속하니까 어떤 풀이를 택해야 할지 아시겠죠?

ㄱ. x의 범위가 일단은 $0 < x < 3$이라고 하는데, $f(x)$의 정체를 파악하기 위해서 범위 내의 만만한(?) x값 하나를 아무거나 집어넣어 봅시다. 저는 ㄱ에서 묻고 있기도 한 $x = 1$을 대입해봤습니다. 그러면 영역이 다음과 같이 나뉩니다.



세 부분 중에서 빨간 부분과 파란 부분의 넓이가 2인데 최솟값으로써 같습니다. 일단 ㄱ은 참이네요.

ㄴ. $f(x)$가 어떻게 정의 되었는지 파악하기 위해 우선은 $f(2)$를 직접 구해 봐야 합니다.



보시다시피 넓이가 최소인 부분은 연두색or파란색 부분이므로 $f(2) = \frac{3}{2}$이 됩니다. 이 때 ㄴ에서의 우변은 3이기에 $\frac{3}{2} - 2 \neq 3$이므로 거짓입니다.

ㄷ. 이 문항을 보니까

2009년 06월 평가원 대비 포카칩 모의고사 수리 가형 10번

2010년 06월 평가원 대비 포카칩 모의고사 수리 가형 05번

이 떠오르네요. 복잡한 함수에서의 연속성을 넘어 미

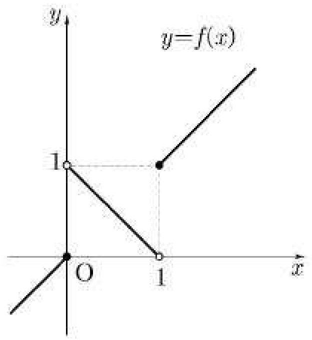
분 가능성까지를 묻고 있습니다. 사설 모의고사까지 범위를 넓혀서 유사한 문항들을 찾자면,

2009년 10월 16일 티치미 수리영역 모의고사 가형 제3회 3차 09번

9. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x & (x \le 0,\ x \ge 1) \\ 1-x & (0<x<1) \end{cases}$$

의 그래프가 그림과 같다. $g(x)=f(1-x)$라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? [4점]



〈보기〉

ㄱ. $f(x)+g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
ㄴ. $f(g(x))$는 모든 실수에서 연속이다.
ㄷ. $f(x)g(x)$는 모든 실수에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2010년 05월 26일 중앙 수리 (가형) 15번

15. 삼차함수 $f(x)=x^3-4x$와 이차함수 $g(x)=2x^2-8$에 대하여 함수 $h(x)$는 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 함숫값 $h(a)$는 함숫값 $f(a)$와 함숫값 $g(a)$ 중 하나이다.
(나) 함수 $h(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.
(다) 함수 $h(x)$의 극댓값이 존재한다.

이때, 항상 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

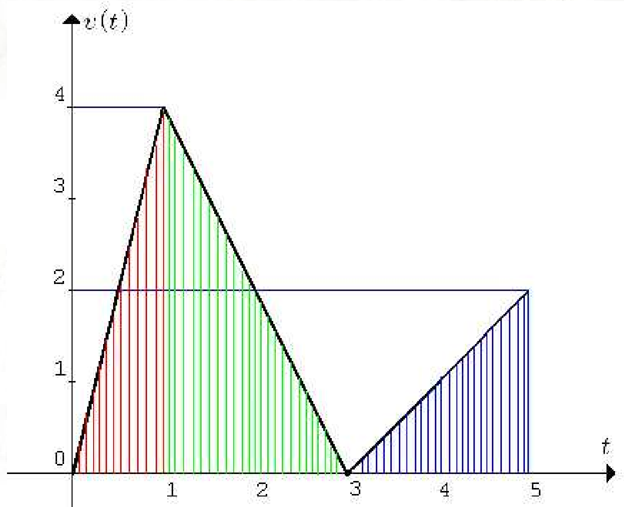
〈보 기〉

ㄱ. $h(0)=0$
ㄴ. 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.
ㄷ. 주어진 조건을 만족시키는 함수 $h(x)$의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ
⑤ ㄴ, ㄷ

이런 문항들도 있습니다만, 그렇다고 사설들마저도 다 풀어보란 말은 결코 아닙니다. 무엇보다 어떤 문제가 주어져도 맞출 수 있는 절대적인 실력을 갖추는 것이 최고겠죠?

암튼 $f(x)$를 주어진 구간에서 다 구할 필요 없이 $x=1$의 근방만을 살펴봅시다. 이 때는 빨간 부분과 파란 부분의 넓이가 2로써 일종의 평형 관계를 이루고 있습니다. x값이 왼쪽으로 치우치면 빨간 부분의 넓이를, 오른쪽으로 치우치면 파란 부분의 넓이를 $f(x)$로 취합니다.



$x<1$인 경우, 그러니까 x가 1보다 아주 조금 더 작은 경우엔 빨간 부분의 넓이에 대하여 $f(x)$가 정의되므로 $f(x)=2x^2\,(0<x<1)$이므로 좌미분계수는 4가 됩니다.

반면 $x>1$인 경우, 즉 x가 1보다 아주 조금 더 큰 경우엔 파란 부분의 넓이에 대하여 $f(x)$가 정의되므로 $f(x)=2-\dfrac{1}{2}(x-1)^2\,(1<x<?)$에서 우미분계수는 0이 됩니다. (참고로 EBS 해설 자료에서는 이 부분 함수를 잘못 구해놨습니다.) 고로 ㄷ은 거짓!

답 ①

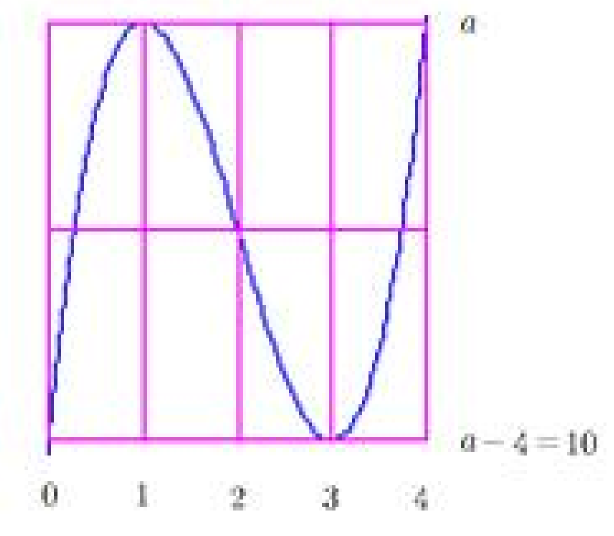
※ 메가스터디를 보니까 이 문제에서 1~5번으로 정답 택한 사람들 비율이 29, 3, 17, 42, 7%인 걸로 봐서 ㄷ이 단단히 한 몫 했나보네요. 아마도 대다수의 수험생들이 실전에서 시간에 쫓기기도 했거니와 '이건 수능이니까 왠지 ㄷ이 맞을 거야.' 라는 마인드가 작용했나 봅니다. +_+;

18. [삼차함수의 극값, 83%]

f를 미분 해보면 주어진 삼차함수가 $x=3$에서 극솟값을 갖는다는 걸 그리 어렵지 않게 알 수 있습니다. (절대로 수식을 입력하기 귀찮아서 요러는 게 아닙니다. ^^;) 그 값이 $f(3)=a-4=10$이므로, $a=14$입니다.

답 14

※ 일전에 제가 오르비에다 삼차함수 관련 글을 쓴 적이 있었는데, 그 이후 중요한 시험들에 대해서 피드백을 못 해드린 점 죄송합니다...(_ _)a 이 문제나마 삼차함수 틀로 풀자면 아래와 같습니다



19. [분수방정식에 대한 감각, 73%]

본능적으로 준 식을 정리합시다.

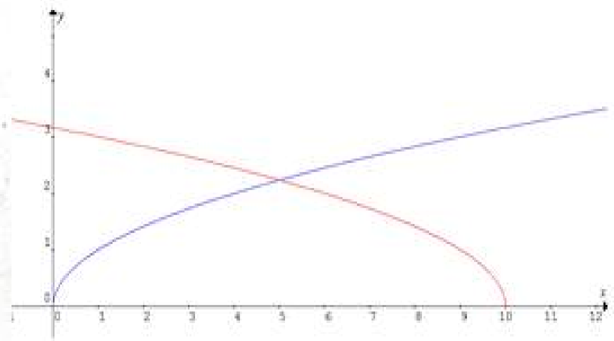
$$\frac{x}{x-k}-\frac{1}{x-1}=\frac{x^2-2x+k}{(x-1)(x-k)}\le 0$$

이 때 정수 x의 개수가 3개가 되도록 자연수 k의 값을 정하라고 하고 있네요. 정수근의 개수가 몇 개 없으니까 $k=1,2,3,\cdots$을 차곡차곡 넣어봅시다. 그러면 (분모)≥ 0이 되어서 한결 계산이 수월해지고, 만족하는 k가 5임을 알 수 있습니다. 물론 여러 분들은 수직선 그리고서, 범위 조절해가면서 체크하셨죠?

답 5

20. [단순한 회전체 적분, 74%]

면적이 아니라 부피를 구해야 합니다!



이걸 x축 둘레로 회전시켜야 합니다. 그나마 계산을 몇 줄 덜 하려면, 그래프가 $x=5$대칭임을 이용하면 됩니다.

$$\left(\pi\int_0^5 y^2\,dx\right)\times 2=2\pi\int_0^5 x\,dx=25\pi$$

$\therefore\ a=25$

답 25

21. [3차원 상황의 이해, 65%]

(쓰고 보니까 설명이 좀 길어졌는데, 읽고 나면 그래도 생각에 정리가 될 거에요.)

3차원 공간상에서 중점적으로 다루는 것이 크게 직선, 평면, 그리고 구의 방정식입니다. 우선 직선의 방정식을 구하기 위해서는 한 점 $A(a,b,c)$와, 방향벡터 $\vec{u}=(p,q,r)$이 필요합니다. (임의의 순서쌍이 한 점의 좌표를 나타낼 수도 있고, 위치벡터를 나타낼 수 있습니다!) 그러면

$$\boxed{\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r}}$$

그리고 하나 더~! **직선은 매개변수를 이용해서 다르게 나타낼 수 있습니다.** 전체 식을 $=t$로 두면

$$x=pt+a,\ y=qt+b,\ z=rt+c$$

이렇게 바뀝니다. 물론 경우에 따라 문제 푸는데 적합한 형태를 취하면 됩니다.

그 다음 평면의 방정식을 구하기 위해선 한 점 $A(a,b,c)$와, 법선벡터 $\vec{u}=(p,q,r)$이 필요합니다. 앞서 설명한 직선의 경우에서 방향이 법선이란 용어로 바뀌었죠? 그러면 해당 평면 위의 임의의 점 $X(x,y,z)$를 잡고 $\overrightarrow{AX}\cdot\vec{u}=0$를 풀면

written by ictteru_

$$p(x-a)+q(y-b)+r(z-c)=0$$

그런데 직선과 달리 **평면은 매개변수로 나타낼 수 없습니다.**

그 다음 구의 방정식은 설명을 생략합니다ㅎ

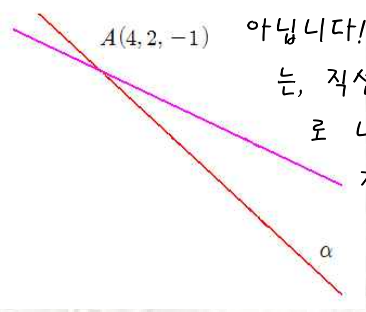
이렇게 개별적인 특성만을 짚고 넘어갈 게 아니라, 저것들을 병행한 케이스도 따져야 합니다. 먼저 두 직선간의 관계는 다시 또, 일치, 평행, 한 점에서 만나는 경우, 꼬인 위치가 있겠고, 이것들을 파악하려면 방향벡터를 보든지, 각각을 서로 다른 매개변수로 바꿔서 교점을 관찰하면 됩니다.

두 평면간의 관계는 일치, 평행, 한 교선을 갖는 경우가 있겠고, 이것들을 파악하려면 법선벡터만 보면 됩니다.

끝으로 직선과 평면간의 위치관계를 파악하려면 **직선을 매개변수 식으로 나타내어서 평면에 대입하면 됩니다.** 항등식이면 직선이 평면에 포함되어있고, 교점이 하나 존재한다면 한 점에서 만나는 거고, 교점이 존재하지 않는다면 직선과 평면이 평행한 경우입니다.

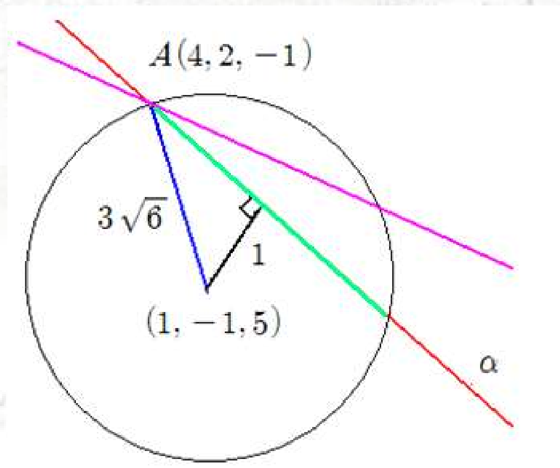
비슷한 방식으로 구와 구, 구와 직선, 구와 평면간에 위치 관계를 파악할 수 있겠죠? 암튼 여기까지가 수리 (가형)을 치는 수험생으로서 갖추어야할 예의입니다! 이제 문제 풀이로 들어가겠습니다.

주어진 상황을 2차원으로 축소하여 나타냅시다. 그러면 공간상의 위치관계가 더 잘 보이거든요. 차근차근 하나씩 이미지화 해봅시다. **2004년 11월 17일 2005학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 06번**에서처럼요. 직선과 평면 α가 점 A에서 만납니다. ('직선 두 개가 A에서 만나네..' 가



아닙니다!!) 문제의 A의 좌표는, 직선 위의 점을 매개변수로 나타내어서 평면 식에 집어 넣어보면 되겠죠?

그리고 이 때 A를 지나는 중심이 $(1,-1,5)$인 구가 있다 합니다. 구의 반지름은 계산해보면 $3\sqrt{6}$인데, 구의 중심과 평면 α에 이르는 (최단)거리는 점과 평면상의 거리 공식으로 계산해보면 1이므로, 아래와 같이, 내지는 비슷하게 그려야 합니다.



이 때 구와 평면 α가 만나서 생기는 도형, 즉 원 넓이는 $\pi\left((3\sqrt{6})^2-1\right)=53\pi$

답 53

22. [성분 분해를 이용한 벡터의 내적, 14%]

*2010년 09월 02일 Kice 2011 대수능 9월 모의평가 수리 (가형) 14번*에서 이미 예고한 문제입니다. 차이점이 있다면, 그 문제는 기하학적 의미를 따지지 않고 좌표를 도입해서 쭉쭉 계산만 해도 괜찮게 풀리는 문제였는데, 이 문제는 그렇지 않습니다. 구태여 좌표를 잡을 수도 있지만, D가 참 계산하기 번거로운 위치에 있기에 주어진 내적이 의미하는 바를 따져보는 게 더 빠르겠네요. 정 생각이 안 난다면 이 문제에서도 직선 OB를 x축으로, 직선 AC를 y축으로 잡고 푸는 수 밖에 없겠지요..ㅠ

어쨌거나 이 문제에서의 핵심 아이디어는 **가만있질 않고 돌아다니는 성분을 지닌 벡터를 분해하는 것입니다.** 이와 유사한 평가원 기출만 해도

2005년 09월 07일 Kice 2006 대수능 9월 모의평가 수리 (가형) 21번

2007년 11월 15일 2008학년도 대학수학능력시험 수리 영역 (가형) 09번

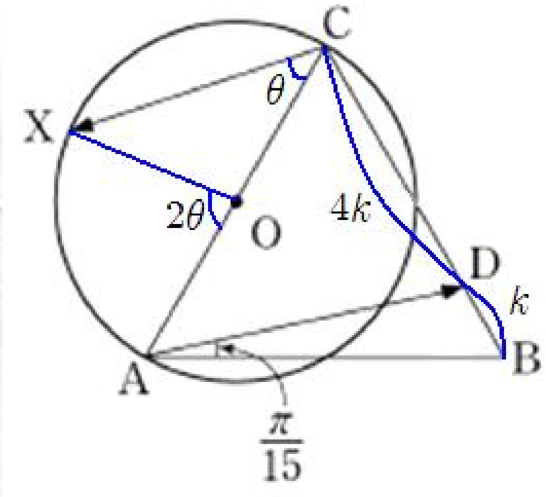
written by ictteru_

요런게 있었고, 시험 한 달 전인 **2010년 10월 14일 교육청 수리 (가형) 11번**에서도 여러분들 까먹지 말라고 나왔었으니, 절대 수능 시험장에서 풀 수 없는 문제가 아닙니다!

문제를 잘 보면 A, D, C, X 중에서 X만 움직이고 있네요. 그래서 주어진 성분을 다음과 같이 분해 해봅니다. (벼룩 잡기 위해 초가삼간을 태울 일 없이 필요한 부분만 적절하게 계산해 내는 것이죠.)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX} &= \overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC})\\ &= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}\\ &= |\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{OX}|\cos\alpha-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

여기서 A, D, O, C는 고정된 위치니까 내적 한 값이 변하지 않습니다. 문제는 $\overrightarrow{AD}$와 $\overrightarrow{OX}$의 사잇각인 α죠. (이 때는 벡터를 평행이동 해서 사잇각을 따져도 됩니다!) 위 식이 최솟값을 가지려면 $\cos\alpha=-1$이 되어야 합니다. 이쯤에서 주어진 그림에다 보조선 OX와 각도 등을 표시해 줍시다.



$\cos\alpha=-1$이 되려면 $\overrightarrow{AD}\,//\,\overrightarrow{OX}$ 즉,

$$2\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{15}=\frac{4}{15}\pi$$

가 되어야 합니다. 그리고 이 때의 X가 P이므로

$$\therefore\ \angle ACP=\theta=\frac{2}{15}\pi \quad\rightarrow\quad p+q=17$$

답 17

※ **2010년 09월 평가원 대비 포카칩 모의고사 수리 가형 11번** ☜ 요런 걸 보고 적중이라고 하죠ㅎ

23. [수열에 대한 이해, 53%]

수능에도 케케묵은 문제가 나오네요. 약간 어려운 문제집에서 수열 단원에 빠지지 않는 유형입니다. 이 문제를 남들보다 빠르고, 정확하게 풀기 위해 사용할 짧막한 등차수열의 공식 두 개를 소개합니다.

☆ **등차수열**에서 적어도 두 항 a_m, a_n이 주어졌을 때 공차 d를 구하는 공식은

$$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$$

(직선에서의 기울기 개념에서 나왔습니다.)

★ **등차수열**의 합을 빠르게 구하는 공식은

(등차수열의 합) = (평균) × (항수)

(가우스가 초등학생 때 1부터 100까지의 자연수 합을 몇 초 만에 구해서 담임 선생님을 깜놀시켰던 공식에서 나왔습니다.)

이 점에 착안하여 문제를 풀어봅시다.

$S=\{3^4, 3^6, \cdots, 3^{4n-4}\}$이고, 항수를 구하기 위해 지수 부분에 주목해서 식을 세우면

$$\frac{(4n-4)-4}{f(n)-1}=2 \quad\rightarrow\quad f(n)=2n-3$$

따라서 답은

$$\therefore\ \sum_{n=2}^{11}(2n-3)=1+3+\cdots+19$$

$$=\frac{1+19}{2}\times10=100$$

답 100

24. [다항함수의 미분 가능성, 4%]

다항함수란 다음의 형태를 항상 만족시킵니다.

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

물론 여기서 최고차항의 계수는 $a_n\neq0$이고, $a_i(i=0,1,\cdots,n-1,n)$는 실수입니다. (그래서 상수함수는 다항함수이고, 절댓값 포함한 함수처럼 구간별로 서로 다른 다항함수를 연결한 것들은 다항함수가 아니죠. 다른 문제들을 풀 때도 이 사실을 염

두에 두고 진리가 흔들리지 않게끔 하세요!)

그리고 이러한 다항함수가 갖는 특징이 크게 3가지가 있습니다.

1. 모든 실수에서 연속
2. 모든 실수에서 미분 가능
3. 차수 개념이 존재

게 중에서도 이 문제는 미분 가능성을 심화시켜 물어본 것입니다. 특히 **2009년 06월 04일 Kice 2010 대수능 6월 모의평가 수리 (가형) 25번**을 약간 변형시켰습니다. 그 문제는 변곡점과 극솟값을 갖는 사차함수를 물어봤었는데, 여기선 극값을 3개 갖는 사차함수를 문제화했거든요. '평가원에서 이런 문제를 선보인 이래로 죄다 변곡점 + 극솟값 갖는 케이스만 나왔으니까 요번엔 아마 극값만 갖는 경우가 나올 것이다~' 하고 개형을 예측하신 분들도 있겠네요ㅎ 이게 문제 풀이에 의한 감이란 겁니다.

어쨌든 $f(x)$만 놓고 보면 가만있는 사차함수니까 미분 불가능한 점이 존재하지 않아야 합니다. 그런데 거기다가 t만큼 $f(x)$를 ↑or↓방향으로 평행이동한 후에, 다시 절댓값을 취해서 x축 아랫부분은 위로 접어올린 새로운 함수를 정의했습니다. (그게 $g(t)$가 아닙니다!) 그리고 그 함수의 미분 불가능한 점의 개수를 $g(t)$라고 정의했구요. (약간 어려운 말이지만 S는 $g(t)$를 수학적으로 좀 더 깔끔하게 정의하기 위해서 도입한 집합입니다.) 문제에선 결국 $f(-2)$를 구하라고 하였으니 $f(x)$의 구체적 식을 찾아야하나 봅니다. 이 때 최고차항 계수, $f(0), f'(3)$에 관한 조건들은 답을 유일하게 만들기 위해 거들 뿐이겠구요ㅋ

이번엔 $g(t)$를 봅시다. $t=3, 19$에서만 불연속이라는 말의 뜻이, $|f(x)-t|$에선

$t<3$일 때 미분 불가능한 지점이 a개,

$3<t<19$일 때 b개,

$t>19$ 일 때 c개란 소립니다. 여기서 극한을 취해보면

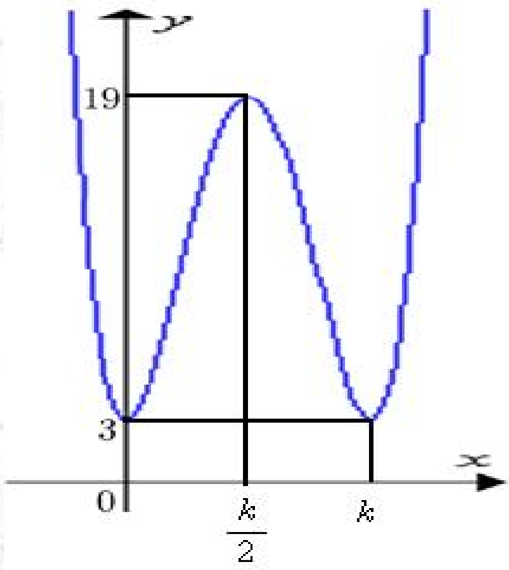
$t\to\infty$이면 미분 불가능한 점이 2개이므로 $c=2$

$t\to-\infty$이면 0개이므로 $a=0$ 임을 알 수 있습니다. 그리고 남은 구간인 $3<t<19$에서는 범위 내의 어떤 t값을 취하든 불연속점의 개수가 일정해야 합니다. 만약에 그 일정하다는 값이 0이나 2가 된다면 $t=3, 19$ 근방에서의 $g(t)$까지 따져줘야겠구요.(그러나 그런 일은 일어나지 않았습니다ㅎ)

그래서 $f(x)$의 최고차항이 1이라고 하였으므로 가능한 개형들로는

i) 극값 3개
ii) 극값 1개 + 변곡점 1개
iii) 극값 1개

뿐인데, 문제 상황을 만족시키는 것은 극댓값 하나와 극솟값 둘을 갖는 i)뿐이고, 그 중에서도 그 극솟값이 서로 같아야 하는 경우뿐입니다. 그러면 $t=3, 19$가 각각 $f(x)$의 극솟값과 극댓값이구요.



$f(x)$는 대충 이런 개형이 나와야 합니다. 고로 최고차항 계수와 극솟값 수치를 감안하여 함수를 잡으면 $f(x)=1\cdot x^2\cdot(x-k)^2+3$이라 둘 수 있고, 극댓값은 $f(\frac{k}{2})=\frac{k^2}{4}\cdot\frac{k^2}{4}+3=19$ 입니다. 끝으로 아직 안 쓴 조건인 $f'(3)<0$에 의해서 $k=4$로 확정이 됩니다.

따라서 $f(x)=x^2(x-4)^2+3$

$\therefore\ f(-2)=4\cdot 36+3=147$

답 147

25. [수열에 대한 감각, 14%]

문제에서 구하라는 것은 $f(2^n)$ 자체가 아니라 그것들을 요리조리 변형시킨 $\dfrac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}$ 에다가 $\lim_{n\to\infty}$를 취한 것이죠. 그런데 이건 수I 수열의 극한 단원에 속하는 문제입니다! 저 자체로는 부정형의 형태로 $\dfrac{\infty}{\infty}$나 $\dfrac{0}{0}$ 중 하나가 되어야겠고, $f(2^n)$이 증가하고 있으니 $\dfrac{\infty}{\infty}$가 되겠죠? 이 때 극한값은 **분모, 분자에서 각각 가장 크게 변하는 항들만의 계수 부분만 계산한 것**(최고차항이란 개념은 다항식에서만 쓰이는 개념이므로)입니다. 그러니까 뒤집어 말하자면, $\dfrac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}$ 의 형태를 꼼꼼하게 계산하는데 시간을 소모하지 않아도 된다는 것이죠.

나름 이런 것이야 말로 수학적인 그 무엇을 향상시킬 수 있다고 생각되기에 잠시만 옆길로 새서 한 마디 하겠습니다. 여러분들이 훗날 어엿한 직업인이 되었다고 상상 해보세요. 그러면 당연히도 여러 문제 상황을 만나게 될텐데, 이를 해결하기 위해서 때로는 남들처럼 관성에 의한 것이 아닌 창의성에 의한 극복을 할 수 있는 사람이 되어야 하지 않을까요? 마찬가지로 수학 문제를 풀 때도, 똑같은 공식들을 알고 있고, 똑같은 문제를 푸는 데에도 누군가는 몇 줄 만에 답을 찾고, 누군가는 시간은 시간대로 까먹고도 못 풀었다면 그 차이가 바로 이러한 사고력에서 비롯된 게 아닌가 싶네요.

다시 문제로 돌아와서, 언급하고 있는 규칙들을 음미해봅시다. 마치 빨랫줄에 널린 옷들의 수분이 증발하듯이, 1부터 2^n까지의 정렬된 자연수들에서 짝수 인자를 모조리 약분해버린 수열들의 합을 $f(2^n)$이라고 정의하고 있습니다. 여기서 두 가지 풀이법으로 가보겠습니다. 먼저 제 풀이부터..+_+!

$sol.1)$

홀수는 문제가 없는데, 짝수들이 골치 아프네요. 암튼 $f(2^n)$은 분명, 짝수들을 전부 1이 된다고 간주하고 쭉 계산한

$$g(2^n)=\{1+3+5+\cdots+(2^n-1)\}$$
$$+(1+1+1+\cdots+1)$$
$$=\frac{1+(2^n-1)}{2}\times 2^{n-1}+n$$
$$=4^{n-1}+n$$ 보다는 당연히 커야할 테고,

짝수들을 약분하지 않고 그대로 계산한

$$h(2^n)=1+2+3+\cdots+2^n$$
$$=\frac{2^n(2^n+1)}{2}$$ 보다는 당연히 작아야 겠죠?

대충 $f(2^n)$의 윤곽이 $p\cdot 4^n+q(n)$로 드러나네요. 여기서 p는 적절한 양수이고, $q(n)$은 $p\cdot 4^n$보다 영향력이 작아서 무시해도 될 부분들입니다. 이걸 $\dfrac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}$ 에 대입하되 최고차항만 끄집어내서 계산해보면

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{4p-p}{16p}=\frac{3}{16}$$

$sol.2)$

1열부터 2^n열까지 블록이 몇 개 남는지 보면

$1,1,3,1,5,3,7,1,9,5,11,3,13,7,15,1,\cdots$

이 때 다시 $f(2^n)$을 나열해봅시다.

$\{f(2^n)\}:2,6,22,86,\cdots$

규칙이 잘 보이시나요? 함수를 분석하기 위해선 미분을 하면 되지만, 수열을 분석하기 위해선 계차를 따져주면 됩니다. 그래도 규칙이 안 보이면 보일 때까지 계차의 계차의 … 계차를 구하면 되구요.

$\{f(2^{n+1})-f(2^n)\}:4,16,64,\cdots,4^n,\cdots$

이렇게 보이네요. 따라서 $f(2^n)$을 구해보면

$$f(2^n)=2+\frac{4\cdot(4^{n-1}-1)}{4-1}=\frac{4^n+2}{3}$$

$\cdots$

답 19

written by ictteru_

※ 요런 문제들은 작년 나형 수능 킬러 문제를 비롯해서 주로 나형 시험에서 가장 어려운 문제로 나오곤 합니다만, 올해(!!!) 가형 시험에도 몇 번 나왔었습니다.

2010년 04월 13일 교육청 수리 (가형) 17번

2010년 10월 14일 교육청 수리 (가형) 16번

그리고 이런 문제들의 원조(?)격인

2007년 10월 10일 교육청 수리 (가형) 17번

미분과 적분

26. [삼각함수 계산, 89%]

$sol.1)$

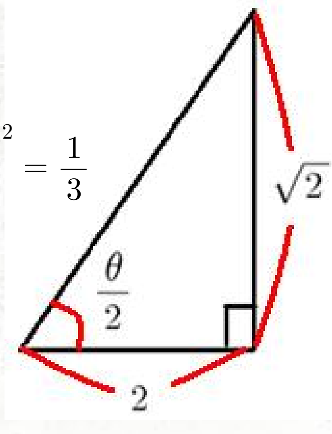
이런 문제는 보통 직각 삼각형을 그려보면 쉽게 파악이 됩니다. 설령 각이 둔각이라 할지라도 직각삼각형을 그리되, sine, cosine, tangent의 부호를 만족하도록 적절한 변의 길이를 음수로 처리해주면 됩니다. 다행히 여기서 음수는 등장하지 않네요.

$0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{4}$이므로 모든 변의 길이가 양수거든요.

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = 3$$



$sol.2)$

삼각함수 파트에서 '이런걸 왜 하지?' 하면서 풀고 넘어갔을 부분 중에 요런 것이 있었습니다.

$\tan\theta = t$라고 두면, $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$,

$$\sin 2\theta = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

바이어슈트라스(Weierstrass) 치환이라고 하며, 이 역시 대학 미적분학 내용입니다만, 수많은 모의고사들에서 바이어슈트라스 치환을 알고만 있다면 바로 바로 풀리는 문제들이 자주 등장합니다. 이걸 이용해서 적분하라는 더 심화된 문제는 안 나오지만요. 암튼 증명은 $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$를 만족하는 직각삼각형의 세 변을 찾아보면 쉽게 알 수 있습니다.

하여, 이 문제를 한 줄 만에 풀자면

$$\cos\theta = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \therefore\ \sec\theta = 3$$

답 ①

27. [초월함수의 미분, 76%]

양변을 x에 관해서 음함수 미분 합시다.

$$3y^2 \cdot y' = \frac{-2x}{5-x^2} + y + xy'$$

이쯤에서 $(x,y) \Rightarrow (2,2)$ 대입하면

$$12y' = -4 + 2 + 2y'$$

$$\therefore\ y' = -\frac{1}{5}$$

답 ⑤

28. [부분 적분 그리고 치환, 17%]

이번 시험 미분과 적분 파트 통틀어서 가장 어려운 문제였습니다. 누군가에겐 이 문제가 26, 27, 29, 30번 푸는데 들인 시간보다 더 쓰고도 결국엔 찍어야만 했을 수도 있겠네요. 솔직히 이 문제만큼은 출제자분의 무리수였던 것 같습니다; 객관식 문제의 정답률이 20% 언저리라면 다들 찍었다는 말이나 다름없으니까요;

여기서 잠깐!!!(참 뜬금없죠?;;) 여러분들은 적분을 공부하다가 이런 생각 해보셨는지요..?

☞ 부분적분 파트에서 지수, 삼각, 다항, 로그함수의 4종류 함수 중에서 2가지를 곱해 부분적분을 물어볼

수 있는 전체 경우의 수는 6가지인데, 왜 $e^x(\ln x)$ 나 $(\tan x)(\ln x)$ 같은 경우는 안 물어볼까..?

☞ 내가 아는 함수들을 임의로 갖다 붙여서 구성한 $\frac{\sin x}{x}$ 요런 함수를 미분은 전부 다 할 수 있겠는데, 적분도 과연 전부 다 할 수 있을까?

☞ 어떻게 부정적분은 못 구하면서 정적분 값은 구할 수 있을까?

여기서 두 번째에 해당하는 의문을 가져보고서, 나름의 해결책을 얻으신 분들에게는 극도로 유리한 문제이기도 합니다. 물론 깊숙한 내용은 대학 과정이지만 그래도 수험생이 생각은 해볼 수 있는 부분이거든요. (지금 이 글을 쓰고 있는 저마저도 손이 부들부들 떨리네요. '아~ 요런 거 보면 현기증 난단 말이에요ㅠ' 하시는 분들은 정신건강에 해로울 수도 있으니 그 다음 ★를 찾아 읽어주세요~)

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

주로 고교에서 다루는 적분 문제는, 이미 잘 알려진 함수들에 한정해서 물어봅니다. 수학자들이 견고하게 다져 놓은 *field* 위에서, 우리들은 달리기 연습을 하는 거죠. 그러니까 '난 이제 적분 마스터 했으니 어떤 적분 문제라도 풀 수 있어~!' 하면서 교과서 범위 밖의 적분들을 풀려고 덤벼들었다간 어느 시의 구절처럼 '청무우밭인가 해서 내려갔다가는 어린 날개가 물결에 절어서 공주(公主)처럼 지쳐서 돌아' 올 수도 있습니다. 하지만 그 *field*를 넓혀가야 할 의무가 있는 수학자들은 계속 의문을 가져가면서 연구를 합니다. 여기서 등장하는 개념이 바로 비초등(*nonelementary*) 적분이란 것입니다. 간단히 말해 고등학교 수학 문제집 수 십 권을 풀어도 적분을 못 하는 게 당연한 함수란 말이죠. 예를 들어

$$\int \sin(x^2)\,dx,\ \int \sqrt{1+x^4}\,dx,\ \int \ln(\ln x)\,dx$$

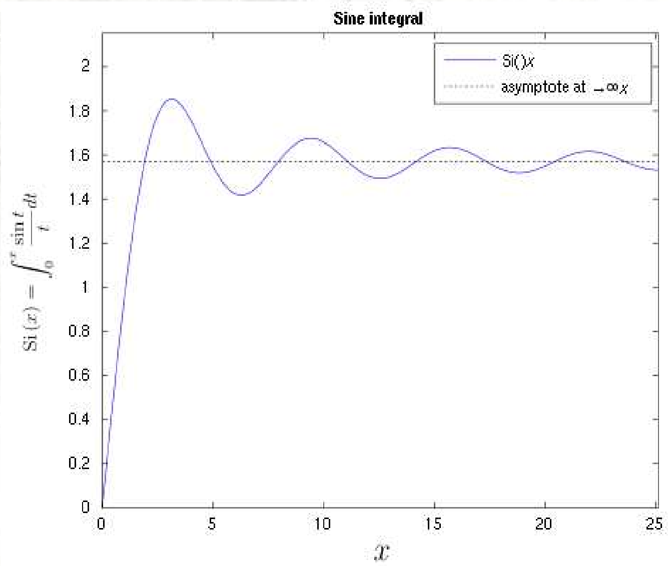
$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int \frac{e^x}{x}\,dx$$

이런 게 있습니다. (이에 반해 여지껏 공부해 왔던 함수들은 전부 유한개의 초등함수들의 조합으로 표현될 수 있었습니다.) 지금 이 문제는 *sine integral* 이라고도 불리는 $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ 를 소재로 하여 고등학생이 풀 수 있을 정도만큼만 물어보고 있구요. 출제자분들이 참 잔인하죠?;;

$f(x)$의 정체를 파악하기 위해서 다항함수라 가정하고, 그 특징 중 하나인 차수 개념을 $f(2x)=2f(x)f'(x)$에 적용시켜보면 $f(x)$는 일차함수가 될 수 밖에 없는데, $f(a)$의 조건 때문에 일차함수가 될 수 없다는 결론이 나옵니다. 즉, $f(x)$가 다항함수란 가정이 잘못된 거죠. 만약에 다항함수였다면 그 구체적 식을 $\int_a^{2a} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2}\,dx$ 에 대입하여 계산하면 답을 쉽게 찾을 수 있었을텐데 말이죠. 아쉽지만 다른 방법을 찾읍시다.

그러고 보니 $f(2x)=2f(x)f'(x)$ 형태를 어디서 많이 본 것 같지 않나요? 아마 맨 처음 삼각함수 공식들을 외우던 풋풋한 시절, 손에 생긴 굳은 살이 다 기억하고 있을 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$입니다. 억지로 끼워 맞춘 감이 없잖아 있지만, 일단은 $f(x)=\sin x$ 입니다. 그러면 $a=\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ 겠구요. 이렇게 문제에서 주어진 단서들로부터 윤곽이 드러나고 있습니다. 마치 여러분들에게 명탐정 코난이 빙의태어 사소한 것들로부터 중요한 것을 추리해내듯, 수학 문제도 그렇게 풀어야 진정한 분석이라고 할 수 있지 않을까 합니다.

이제 남은 문자인 k에 주목합시다. 범위는 왜 줬을까요? 하지만 실전에선 이걸 고려하지 않더라도 문제 푸는데 전~혀 지장이 없습니다. 마치 **2007년 09월 07일 Kice 2008 대수능 9월 모의평가 수리 (가형) 27번**에서 괜히 이계도함수의 존재성을 언급한 것과 비슷한 맥락입니다. 그래도 지금은 실전이 아니니까 한번 WIKIPEDIA를 검색해봤습니다.



그러니 요런 그래프가 나오는군요. 이건 MATLAB이란 프로그램을 돌려서 그린 겁니다. 그리고 내친김에 한 번 그 수치들을 확인 해봤습니다.

우측의 적절히 편집한 표는

$$k = \int_{2a}^{4a} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$= Si(4a) - Si(2a)$$

로 두고 계산한 것이고, 엄밀하게 말하자면 근삿값이지만 오차의 정도가 무시해도 될 정도네요. 암튼 정말로 그러한 함수가 존재하긴 하는데, 구태여 k 범위를 줘서 혼란스럽게 한 것입니다.

(거듭 말하지만 지금 이 부분은 문제 푸는데 몰라도 상관없습니다!)

a	k
3.1416	0.0740
6.2832	0.0390
9.4248	0.0263
12.5664	0.0198
15.7080	0.0159
18.8496	0.0132
21.9911	0.0113
25.1327	0.0099
28.2743	0.0088
31.4159	0.0080
34.5575	0.0072
37.6991	0.0066
40.8407	0.0061
43.9823	0.0057
47.1239	0.0053
50.2655	0.0050

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

아까 스킵하셨던 분들은 여기서부터 다시 읽어주세요! 암튼 그래서 알아낸 게 $f(x) = \sin x$란 것과 $f(2a) = f(4a) = 0$정도 뿐입니다.

앞으로 써야할 개념 중에 도표적분법이란 것이 남아 있습니다. 겨우 수능 한 문제 풀기 위해 이러느냐고 생각하지 마시고, 이 한 문제를 완전히 이해함으로서 Level-up 하겠다는 생각으로 읽어주세요~!

도표적분법(Tabular Integration by Parts)이란 게, 귀찮은 부분 적분 계산을 빠르고 간단하게 하는 방법입니다. 요즘엔 쉬마큐라우데에도 나와있고, 다른 분들도 이 내용을 가르치는 분들이 많습니다만, 인터넷 강의가 막 활성화 될 무렵엔, 오르비 게시판에서 누군가가 "(강대/서메) 박승동 선생님 가르쳐주신대로 하면 부분 적분을 한 줄만에 할 수 있다." 고 해서 궁금증을 자아내기도 했던 부분이죠. 옛말에 백문(百聞)이 불여일견(不如一見)이라 하였으니 EXAMPLE을 몇 개만 풀다가 자연스럽게 28번 문제로 넘어가겠습니다.

EXAMPLE 1.

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

$+$	x^2	e^x
$-$	$2x$	e^x
$+$	2	e^x
$-$	0	e^x

주로 $\int A(x)B(x) dx$ 모양을 적분해야 하는데, $A(x)$나 $B(x)$ 중에서 미분하기 쉬운 것은 표와 같이 0이 나올 때까지 미분을 계속하고, 다른 하나는 계속 적분만 해줍니다. 맨 왼쪽에는 $+/-$부호를 교대로 써주고요. 빨간 대각선은 왼쪽의 부호를 고려하면서 그냥 곱하면 되고, 파란 선은 역시 왼쪽의 부호를 고려하여 곱하되 $\int$기호를 붙여줍니다. 그래서 그렇게 다 곱한 것들을 더해주면 끝이구요. 마지막 파란 부분이 적분하면 상수니까 끝에 C를 붙인거겠죠?

EXAMPLE 2.

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

$+$	$\sin x$	e^x
$-$	$\cos x$	e^x
$+$	$-\sin x$	e^x

여기서 살짝 테크닉을 발휘해야 합니다. e^x나 $\sin x$ 어느 쪽을 미분만 계속하고 적분만 계속하든 반복되거든요. 그래서 위와 같이 적절한 순간에 끊어야 주어야 합니다. $I = \int e^x \sin x\, dx$로 놓으면

$I = e^x(\sin x - \cos x) - I$ 가 되므로

$$I = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C$$

EXAMPLE 3.

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{6}x^3 + C$$

$+$	$\ln x$	x^2
	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{3}x^3$
$-$	1	$\frac{1}{3}x^2$
$+$	0	$\frac{1}{6}x^3$

여기가 하이라이트입니다. $\frac{1}{x}$는 무한히 미분 가능한 형태죠? 그래서 한번 곱해서 뭉쳐준 뒤에, 계산하기 편하게 미분할 부분과 적분할 부분으로 나눠줍니다. 이 때 $+/-$ 부호를 잘 보세요~!

그리고 만약에 부정적분이 아닌 정적분이였다면 우변 $F(x)$의 적분상수 C는 생략하고 나머지 항들에 $[F(x)]_a^b$를 취하면 되겠죠?

EXAMPLE 4.

$$\int_a^{2a} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2} dx$$

$$= -\left[\frac{\{f(x)\}^2}{x}\right]_a^{2a} + \int_a^{2a} \frac{f(2x)}{x} dx$$

$$= 0 + \int_a^{2a} \frac{f(2x)}{x} dx \quad (\because f(2a) = f(a) = 0)$$

$+$	$\{f(x)\}^2$	x^{-2}
$-$	$-f(2x)$	$-x^{-1}$

여기서 $2x = t$로 치환해야 합니다.

$$\therefore \int_a^{2a} \frac{f(2x)}{x} dx = \int_{2a}^{4a} \frac{f(t)}{(t/2)} \frac{1}{2} dt$$

$$= \int_{2a}^{4a} \frac{f(t)}{t} dt = k$$

답 ④

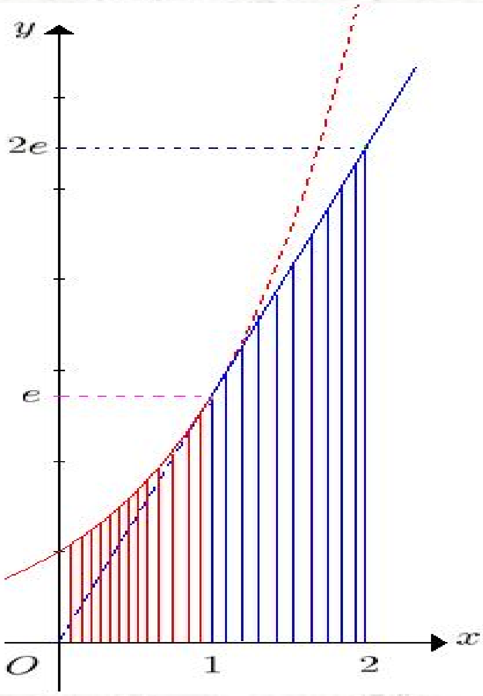
29. [초월함수의 미분 가능성, 53%]

(가), (다) 조건에 의하여 구간 $(0, 1)$에서 $f(x) = e^x$임을 알 수 있습니다. 문제는 (나) 인데요, 결론적으로 $\int_0^2 f(x)\,dx$의 최솟값을 물어보고 있고, $\int_0^1 f(x)\,dx$일 때 해결 됐으니, $\int_1^2 f(x)\,dx$ 즉, 구간 $[1, 2)$에서 $f(x)$의 정체만 파악하면 됩니다. 이쯤에서 직관적으로, 최솟값을 물어보고 있으니 (나)에서 등호 성립 순간임을 파악하고서,

$f'(a) = f'(b) = f'(0) = e$ 즉, 구간 $[1, 2)$에서 $f(x) = e(x-1) + e$ 임을 알 수도 있겠지만, 일단 좀 더 정확하게 흐름을 이어가며 풀어보도록 하겠습니다.

$\int_1^2 f(x)\,dx$가 최솟값을 가지려면 그 값이 작으면 작을수록 좋겠죠? 구간 $[1, 2)$에서 $f(x)$는 연

결부분인 $(1,e)$를 지나면서 또 미분 가능해야 한다고 문제에서 조건을 걸어놨습니다. 전 구간에서 미분 가능하다고 했으니 좌미분계수로부터 $f'(1)=e$ 임을 알 수 있고, 구간 $[1,2)$에서는 기울기가 증가하거나 같다고(그러니까 적어도 감소하지는 않는다고) (나)에서 말하고 있으므로, 기울기가 e인 직선으로 증가하면 되겠네요!



이때 적분값은 곡선 아랫부분 + 사다리꼴로

$$\therefore \int_0^1 e^x\,dx + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(e+2e)$$

$$= e-1+\frac{3}{2}e$$

$$= \frac{5}{2}e-1$$

답 ③

※이 문제 푸는데 사용된 가장 중요했던 내용은 고등학교 교과서에는 나오지 않아서, 그저 직관적으로 파악해야 했던 부분이었습니다. 하지만 대학 미적분학 정적분파트의 한 정리(Theorem)에서 '지배성'이라고 나옵니다.

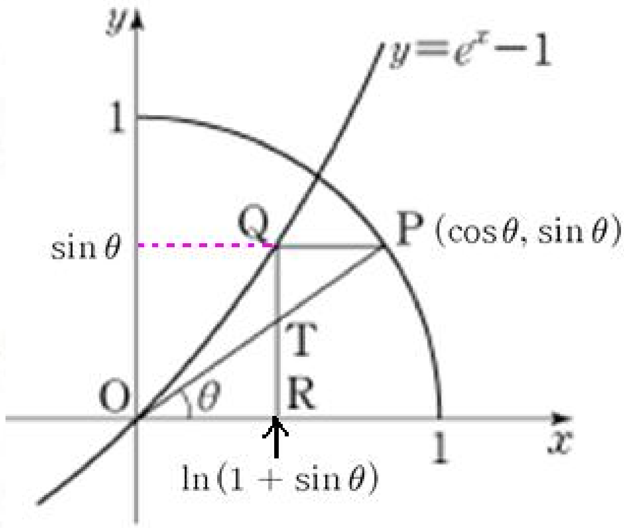
f와 g가 적분 가능하면
정적분은 다음 성질을 만족시킨다.

$[a,b]$에서 $f(x)\geq g(x)$ 이면

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

이런 걸 언급하는 이유가, 수능 공부하는데 대학 미적분학까지 공부해야 한다고 말하기 위함이 결코 아닙니다. 기초 개념은 확실하게 알고 있는데도 이 문제가 잘 안 풀렸던 분들에게 그 정체를 보여주고, 또 생각하게 하기 위함입니다. 언뜻 보면 지극히 당연한 말인데, 엄밀한 증명도 원래는 수반되어야 합니다. 하지만 그건 대학에서 수학을 공부할 사람들의 몫이고, 적어도 수험생들은 이해만 하면 된다는 거죠.

30. [초월함수의 극한, 70%]



위와 같이 필요한 성분을 표시하고 식을 세우면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{OR}\cdot\overline{OT}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OR}^2\cdot\tan\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\{\ln(1+\sin\theta)\}^2\cdot\tan\theta$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{2},\quad 60a=30$$

답 30

※ 여담이지만 08수능 마지막 문제는 아주아주 쉬웠고, 09땐 잔인하리만치 어려웠다가 10때는 계산이 약간 있었습니다. 그리고 이번엔 쉽게 나왔네요. 물론 28번의 포스가 장난 아니었지만; 암튼 남은 기간 동안 열공열공열매 드셨다 생각하시고 치열하게 공부하세요! 수능 성적표 받고 웃을 수 있게끔 ㅎ

written by ictteru_