기·출·의 파·급·효·과

미적분 (상)

미적분 (상)

기출의 파급효과

orbi.kr

미적분의 도구와 태도 (상)

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 3년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 미적분 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예시해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 기출에 대한 태도와 도구들을 바로 활용할 수 있도록 준킬러 이상급의 기출들을 본문 속 예시로 들었습니다. 21학년도 수능 경향과 해당 기출까지 반영되어 있습니다.

미적분 기출 중 평가원 21, 30번은 물론 오답률이 높은 문제들을 예시로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 더욱 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예시로 든 들어주는 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예시들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 21번, 29번, 30번을 풀 생각이 없어 과거의 21번, 29번, 30번을 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

최근 교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 19학년도 수능 29번의 경우 14학년도 사관학교 15번과 매우 유사하고 20학년도 6월 평가원 21번, 30번은 18년 10월 교육청 21번, 30번과 매우 유사합니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 현재 수능을 대비하기는 힘듭니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 그리고 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. 본문과 함께 있는 예시 문제들은 미적분 교재의 경우 대략 150문제 정도입니다. 예시에 있는 문제 수만으로 부족함을 느끼실 분들을 위해 예시보다는 다소 쉬운 유제들도 기출에 대한 태도와 도구를 체화시키기 위해 충분히 넣었습니다. 미적분 교재의 경우 유제는 대략 200문제입니다. 본문 속 예시뿐만 아니라 유제들도 단순 단원별로 분리된 것이 아니라 기출에 대한 태도와 도구를 기준으로 분리되었습니다.

4. 칼럼 속 예시해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예시 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 가독성이 좋아 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다. 유제는 칼럼과 예시들을 잘 학습했다면 무리없이 풀 수 있는 수준입니다.

하루에 예시를 포함한 Chapter 하나만 완료하고 유제 15문제만 푸세요! 이를 실천하면 미적분 교재를 모두 끝내는 데에 2주가 걸립니다. 이 교재를 최소 2번 이상 볼 수 있습니다.

수학 가형 4등급 초반이 1등급 컷 이상 받는 데 1달에서 2달 사이로 걸립니다.
약 파는 것 아닙니다. 과장된 광고를 극히 싫어하는 편입니다.

저도 18학년도 6월 평가원 때 3등급 받고 여름방학 때 이 책의 내용대로 기출을 학습하고
18학년도 9월 평가원, 18학년도 수능 1등급을 가볍게 받아냈습니다.

제 과외 학생은 19학년도 6월 평가원 때 4등급에 가까운 3등급이었으나 이 방법대로 1달간 기출을 학습하고 19학년도 수능 96점을 받아내었습니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

CHAPTER

05 그래프 그리기, 조건 해석

미적분의 시작과 끝은 그래프 그리기이다. 미적분이 수학 2보다 어렵다고 하는 결정적인 이유가 뭘까? 미분하기 전에 그래프 개형을 미리 모르는 경우가 많기 때문이다. 하지만 **미분하기 전에 미리 그래프 개형을 안다면? 수학2와 난이도가 크게 다르지 않을 것이다.**

미적분 킬러 문제를 풀 때는 특수한 경우부터 따진다. 특수한 경우에 답이 나오는 경우가 매우 많다. **특수한 경우에 답이 나온다면 시험장에서 엄밀한 증명까진 필요 없고 문제의 조건과 충돌하는 지점이 없는지만 확인하자.**
다만 특수한 경우에서 답이 안 나온다면 바로 일반적인 경우도 고려하여 좀 더 엄밀하게 풀어야 한다.

이 교재의 예시 해설에서는 시험장에서의 생각과 일반적인 경우 모두 담고 있어 해설이 길어질 수 있다.
하지만 참고 읽다 보면 얻어가는 것이 있을 것이며 시험장에서는 무리 없이 특수한 경우부터 고려하는 자신감이 생길 것이다.

그래프 개형 그리기

미적분의 시작과 끝이다. 미분 없이 충분히 그래프 개형을 그릴 수 있는 상황에서 미분부터 먼저 하고 있다면 시간과 에너지가 너무 낭비되어 정작 필요한 조건 해석을 못 하는 불상사가 발생한다.

웬만한 문제에서는 미분 없이 그래프 개형을 그릴 수 있다. 이때 **미분은 그래프 개형을 알아내는 주요 도구가 아닌 극점이나 변곡점 좌표를 구할 때 쓰는 보조도구로 전락**한다. **미분 없이 그래프 개형을 그리는 방법은 이 책 전반에 걸쳐 제일 많이 쓰이는 도구이니 꼭 체화하자.**

웬만한 문제에서는 미분 없이 그래프 개형을 그릴 수 있으나 분명 **한계가 존재할 때**도 있다. 이를 위해 **미분을 하여 도함수를 얻고 이로부터 원함수의 그래프 개형을 그리는 방법**도 가볍게 소개한다.

◆ 1. 미분 없이 그래프 개형 그리기

x축을 먼저 그린다. y축은 원점 위치를 정확히 알 때 그린다. 킬러 문제에서는 함수 $f(x)$가 확정되지 않은 경우가 많기에 원점 위치를 모를 때가 많다. **원점 위치를 모를 때 y축은 문제 상황 파악과 조건 파악에 방해만 될 뿐이다.**

x축을 먼저 그리고 밑의 5가지를 '순서대로' 따지면 **미분 없이 함수 $f(x)$그래프 개형을 쉽게 그릴 수 있다.**

1. **우함수나 기함수인가?** 우함수일 때는 그래프가 y축 대칭임을, 기함수일 때는 그래프가 원점 대칭임을 염두에 두자.

2. $\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$**의 값을 표시하자.**

3. $x=\alpha$**에서** $y=f(x)$**가 수직 점근선을 갖는다면** $\lim_{x \to \alpha+} f(x)$, $\lim_{x \to \alpha-} f(x)$**의 값을 표시하자.**

4. x**축과의 교점은 몇 개일까?** 직접적인 $f(x)=0$의 해를 구하면 시간이 너무 오래 걸린다. 그래프 개형 그릴 땐 x**축과의 교점 개수 정도만 표시하자.**

5. 위의 4가지를 고려하면 직관적으로 그래프 개형을 예상할 수 있고 이를 바탕으로 그래프 개형을 완성할 수 있다. 예상이 틀릴까 봐 걱정하지 말자. 예상이 대체로 잘 맞는다. 극점의 개수가 애매할 때는 이후에 미분하여 확인하면 된다.

다만, **극한 처리를 할 때 주의할 점**이 있다.

예를 들어 $\lim_{x \to \infty} f(x)=0$라고 하자. 그래프 개형을 그리기 위해서 x가 무한히 커질 때 $f(x)$가 0보다 큰 곳에서 0으로 접근하는지, 0보다 작은 곳에서 0으로 접근하는지, 0에서 0으로 접근하는지 표시가 필요하다. **x가 무한히 커질 때 $f(x)$가 0보다 큰 곳에서 0으로 접근한다면 $\lim_{x \to \infty} f(x)=0+$, 0보다 작은 곳에서 0으로 접근한다면 $\lim_{x \to \infty} f(x)=0-$, 0에서 0으로 접근한다면 $\lim_{x \to \infty} f(x)=0$으로 표기하도록 하자.**

$\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to \alpha+} f(x)$, $\lim_{x \to \alpha-} f(x)$에서 $\pm\frac{\infty}{\infty}$또는 $\pm\infty \times 0$ 꼴이 나오는 경우가 있다.
이럴 땐 어떻게 해야 할까? **증가함수에서 로그함수<무리함수<다항함수<지수함수 순으로 더 강한 영향력을 가진다고 생각하면 편하다.** 증명은 교과 외인 로피탈 정리를 사용한다.

예를 들어 극한이 $\pm\frac{\infty}{\infty}$또는 $\pm\infty \times 0$ 꼴이 나올 때 e^x은 x^{100}보다, x^2은 $10^{10}\sqrt{x}$보다, $\sqrt{x}$은 $10^{10}\ln x$ 보다도 강한 영향력을 가진다. 따라서 $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}=0$, $\lim_{x \to 0+} x\ln x=0$, $\lim_{x \to \infty} xe^{-x}=0$이다.

$f(x)=(x-2)(x-3)e^{-x}$의 그래프 개형을 그려보자.

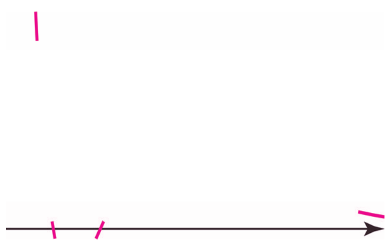
1. 우함수나 기함수가 아니다.
2. $\lim_{x \to \infty} f(x)=0+$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)=\infty$를 표시하자.

※ $\lim_{x \to \infty} f(x)=0+$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)=\infty$임을 어떻게 알아냈을까?

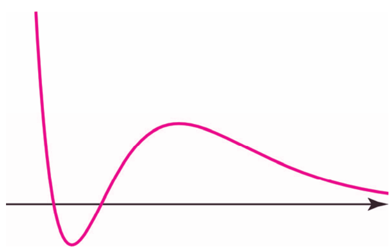
지수함수는 다항함수보다 더 큰 영향력을 가지므로 $\lim_{x \to \infty}(x-2)(x-3)e^{-x}=\infty \times 0+=0+$이다.

$\lim_{x \to -\infty}(x-2)(x-3)e^{-x}=\infty \times \infty=\infty$이다.

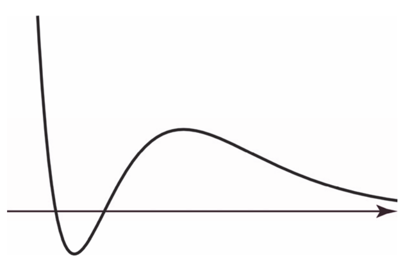
3. **함수 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 정의되므로 $y=f(x)$는 수직 점근선을 갖지 않는다.**
4. x축과의 교점이 2개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다.



예상이 실제로 맞다!



$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$의 그래프 개형을 그려보자.

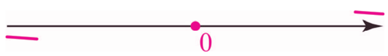
1. **기함수이다. 그래프가 원점 대칭임을 염두에 두자.**
2. $\lim_{x\to\infty}f(x)=0+$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0-$를 표시하자.

※ $\lim_{x\to\infty}f(x)=0+$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0-$임을 어떻게 알아냈을까?

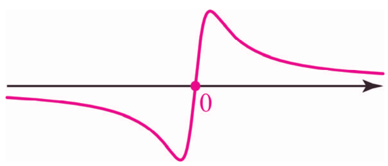
이차함수는 일차함수보다 더 큰 영향력을 가지므로 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=0+$이다.

이차함수는 일차함수보다 더 큰 영향력을 가지므로 $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{-\infty}{\infty}=0-$이다.

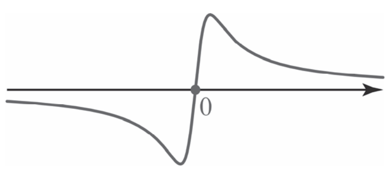
3. **함수 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 정의되므로 $y=f(x)$는 수직 점근선을 갖지 않는다.**
4. x축과의 교점은 원점 1개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다. **원점 대칭임을 반영하자.**



예상이 실제로 맞다!



$f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$의 그래프 개형을 그려보자.

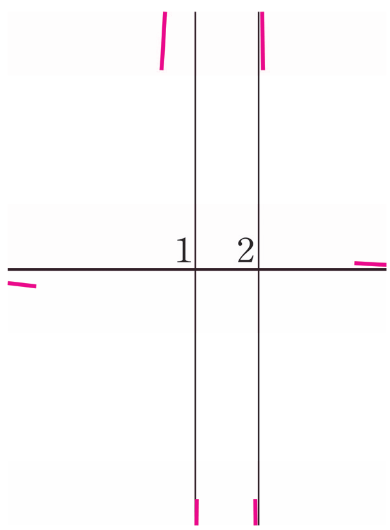
1. 우함수나 기함수가 아니다.
2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0-$를 표시하자.

※ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0-$임을 어떻게 알아냈을까?

이차함수는 일차함수보다 더 큰 영향력을 가지므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{\infty}{\infty}=0+$이다.

이차함수는 일차함수보다 더 큰 영향력을 가지므로 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{-\infty}{\infty}=0-$이다.

3. **함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$일 때 정의되지 않는다.** $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to2+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to2-} f(x)=-\infty$ **이므로 $y=f(x)$는 $x=1$, $x=2$에서 수직 점근선을 갖는다.** $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to2+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to2-} f(x)=-\infty$**를 표시하자.**

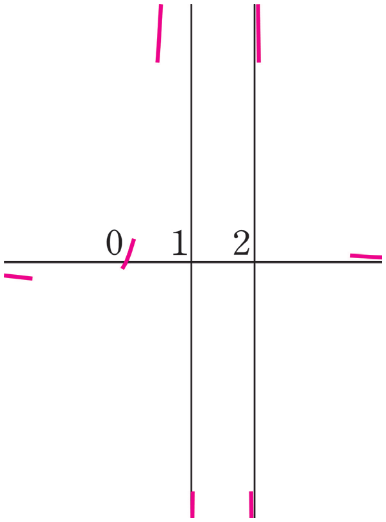


※ $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to2+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to2-} f(x)=-\infty$임을 어떻게 알아냈을까?

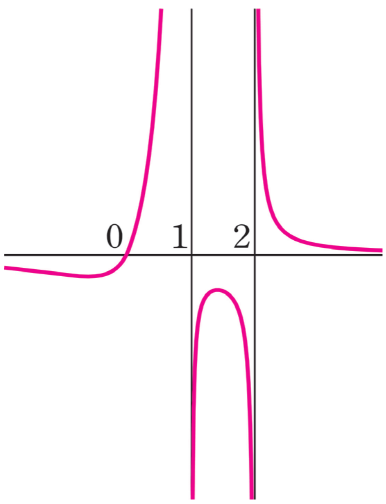
$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{0-}=-\infty$이다. $\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{0+}=\infty$이다.

$\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{0+}=\infty$이다. $\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{0-}=-\infty$이다.

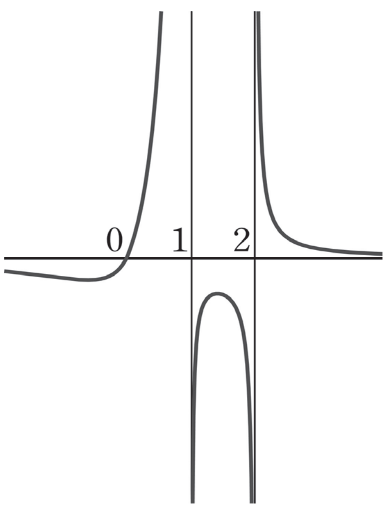
4. x축과의 교점은 원점 1개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다.



예상이 실제로 맞다!



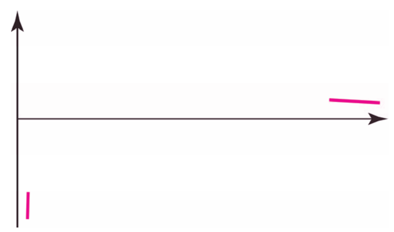
$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$의 그래프 개형을 그려보자.

0. Chapter 13에서도 말하겠지만 **로그함수가 나오면 모든 것을 멈추고 밑, 진수 조건을 따져야 한다.**
   $\ln x$**는** $x>0$**에서만 정의된다.**
1. 우함수나 기함수가 아니다.
2. $x>0$**에서만 정의되기에** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$만 따지면 된다. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0+$를 표시하자.

※ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0+$임을 어떻게 알아냈을까?

다항함수는 로그함수보다 더 큰 영향력을 가지므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}=0+$이다.

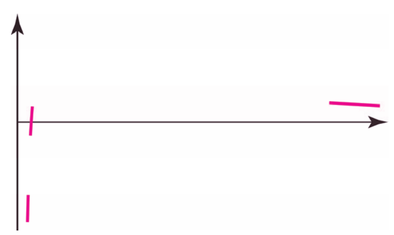
3. **함수** $f(x)$**는** $x=0$**일 때 정의되지 않는다.** $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-\infty$**이므로** **$y=f(x)$는 $x=0$에서 수직 점근선을 갖는다.** $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-\infty$를 표시하자.



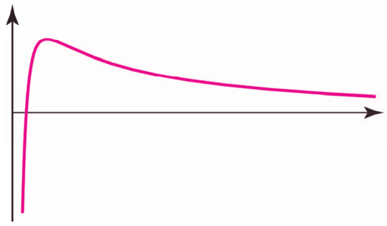
※ $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-\infty$임을 어떻게 알아냈을까?

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{-\infty}{0+}=-\infty$이다.

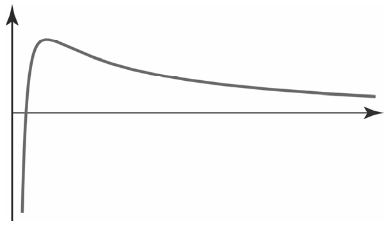
4. x축과의 교점이 1개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다.



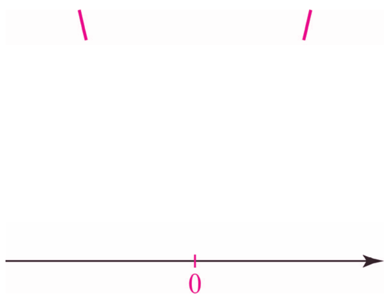
예상이 실제로 맞다!



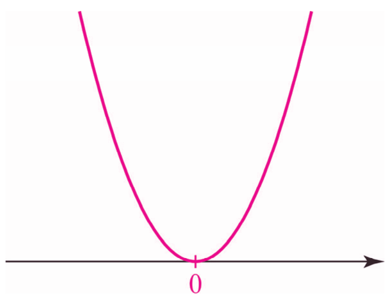
$f(x)=\ln(x^2+1)$의 그래프 개형을 그려보자.

0. Chapter 13에서도 말하겠지만 **로그함수가 나오면 모든 것을 멈추고 밑, 진수 조건을 따져야 한다.**
   $\ln(x^2+1)$에서 항상 $x^2+1>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 정의된다.
1. **우함수이다. 그래프가 y축 대칭임을 염두에 두자.**
2. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$를 표시하자.

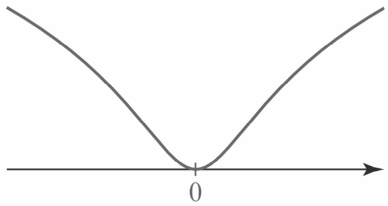
3. **함수 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 정의가 되므로 수직 점근선을 갖지 않는다.**
4. x축과의 교점은 원점 1개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다.



예상이 실제와 살짝 다르다. 우리가 그린 그래프 개형은 $y=x^2+1$과 유사하다. 하지만 $x>0$에서 $y=\ln x$**는 $y=x$보다 증가속도가 훨씬 느리기에 $y=\ln(x^2+1)$ 역시 $y=x^2+1$보다 증가속도가 훨씬 느리다.** 이를 반영해 그래프 개형을 수정하면 아래와 같다.



변곡점이 생긴다는 점에 주목하자.

5가지만 순서대로 따져주면 그래프 개형이 비교적 쉽고 정확하게 그려진다는 것을 확인할 수 있다. **다만, 삼각함수×다항함수나 삼각함수×초월함수 꼴은 실수 전체 집합이 아닌 삼각함수의 한 주기 내에서 5가지를 순서대로 따져주며 한 주기 내의 그래프 개형을 그려주자.** 그 후에 실수 전체 집합에서의 그래프 개형을 그리면 된다.

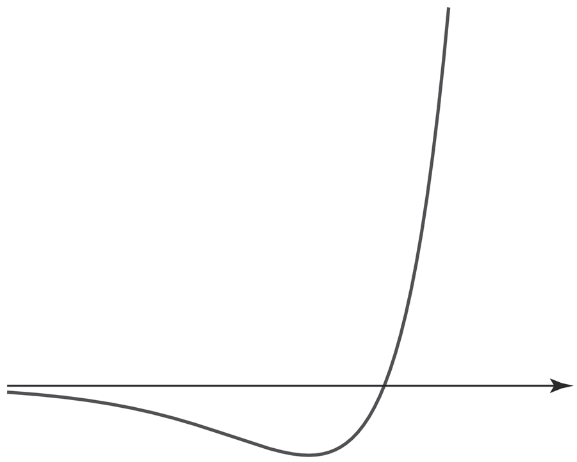
◆ 2. 암기해야 할 그래프 개형

자주 나오는 그래프 개형들을 소개한다. 전에 소개한 미분 없이 그래프 개형 그리기로 직접 그려보고 자연스럽게 암기하자.

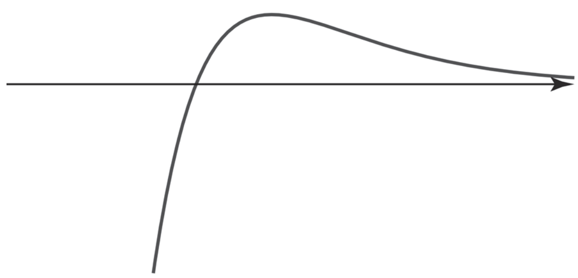
(1) $(\text{다항함수})\times e^{\pm x}$ 꼴

최다 빈출 꼴이다. 다항함수 최고차항 계수가 음수이면 x축 대칭 시키면 된다.

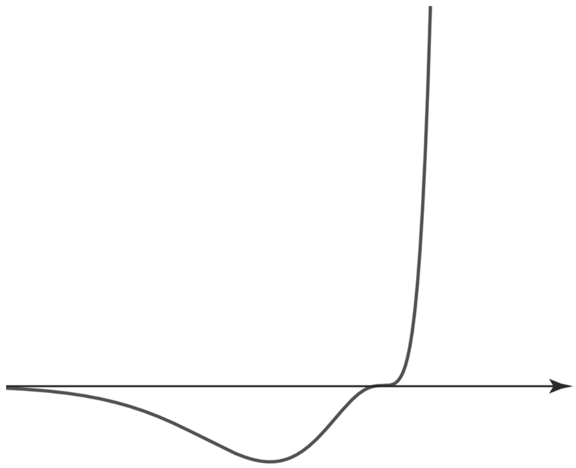
$y=xe^{x}$, $(\text{일차함수})\times e^{x}$ 꼴



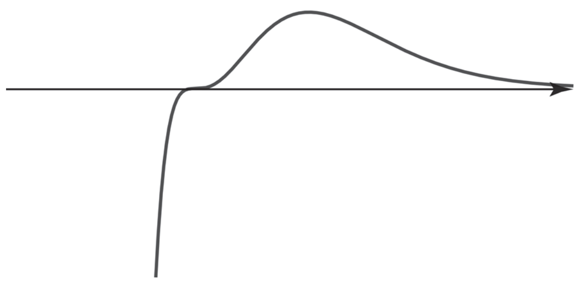
$y=xe^{-x}$, $(\text{일차함수})\times e^{-x}$ 꼴



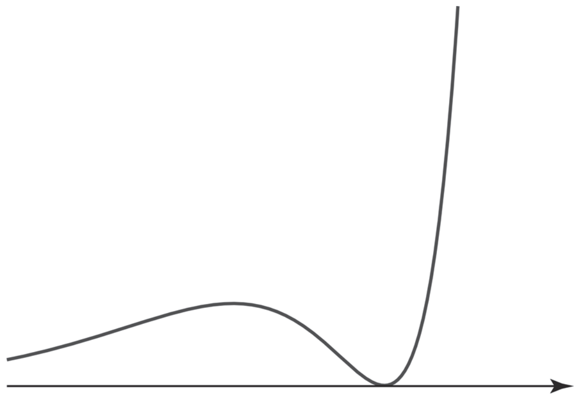
$y=x^{2k-1}e^{x}$ **꼴** (k는 2 이상의 자연수)



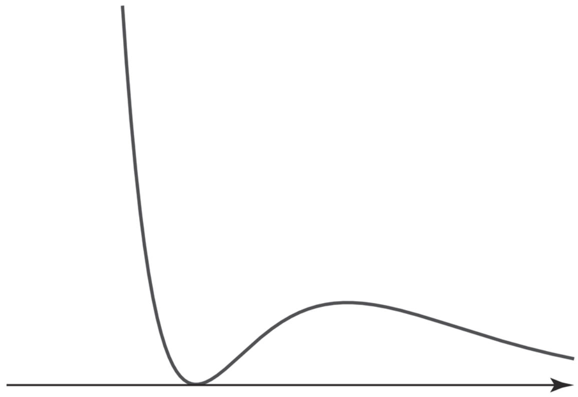
$y=x^{2k-1}e^{-x}$ **꼴** (k는 2 이상의 자연수)



$y=x^{2k}e^{x}$ 꼴 (k는 자연수)

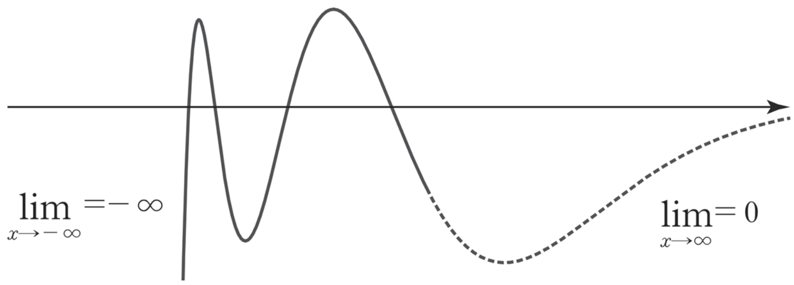


$y=x^{2k}e^{-x}$ 꼴 (k는 자연수)



결론적으로 $(\text{다항함수})\times e^{\pm x}$ **꼴은 다항함수 그래프처럼 그린 다음** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$**의 값을 표시하면 된다.**

예를 들어 최고차항 계수가 음수일 때 일반적인 $(\text{사차함수})\times e^{-x}$는 아래와 같이 그려진다.



(2) (다항함수) $\times \ln x$ 또는 (분수함수) $\times \ln x$ 꼴

$\dfrac{(\text{다항함수})}{(\text{다항함수})}$ 꼴의 분수함수 중 **분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같은 꼴을 '가분수 꼴'**이라고 부르겠다.

이런 '가분수 꼴'은 '대분수 꼴'로 꼭 분리하자!

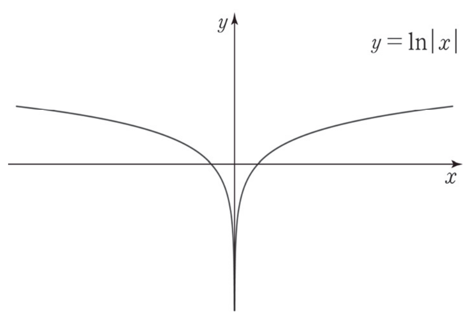
예를 들어 $\dfrac{x^2}{x+1} = x-1+\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{x}{x+2} = 1-\dfrac{2}{x+2}$로 바꿔주자. 등식의 우변을 '대분수 꼴'이라고 부르겠다. **그래프 개형을 그리거나 x에 대해 미분, 적분할 때 훨씬 유리**하다.

다만, 분수함수가 우함수나 기함수일 때는 예외이다. 우함수나 기함수인 것을 쉽게 알아볼 수 있는 형태로 분수함수를 두는 것이 그래프 개형을 그릴 때 유리하다.

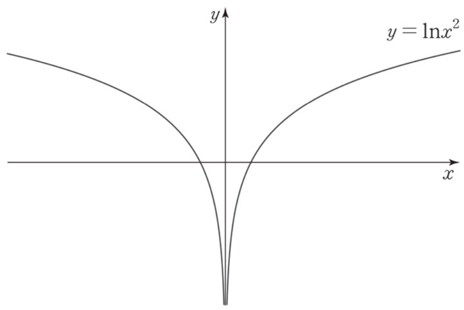
예를 들어 $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$의 그래프 개형을 그릴 때는 $x-\dfrac{x}{x^2+1}$보다 $\dfrac{x^3}{x^2+1}$꼴일 때 기함수임을 쉽게 알아볼 수 있기 때문에 $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ 형태로 두고 그래프 개형을 그린다.

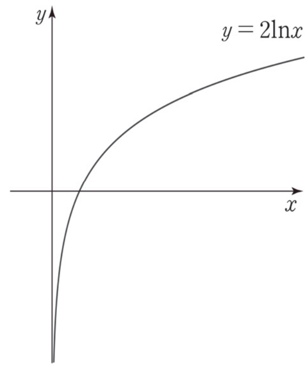
Chapter 13에서도 나오는 내용이지만 중요하기에 미리 소개하겠다.
로그함수가 나오면 모든 것을 멈추고 밑, 진수 조건을 따져야 한다. 예를 들어 $\ln f(x)$를 보면 $f(x)>0$임을 꼭 적어주자.

$y=\ln|x|$의 그래프를 그려보자. $y=\ln|x|$은 $x\neq 0$에서 정의되는 함수이다.
$y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x & (x>0)\\ \ln(-x) & (x<0)\end{cases}$ 이다. 따라서 $y=\ln|x|$의 그래프는 아래와 같다.

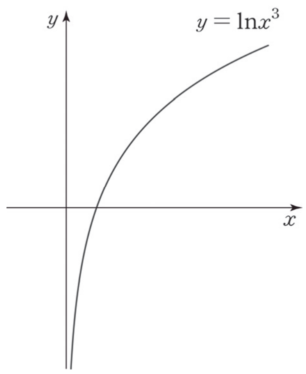


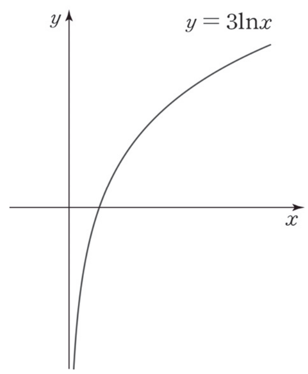
n이 자연수일 때, $\ln x^{2n} \neq 2n\ln x$이다. $\ln x^{2n}$는 $x \neq 0$에서 정의되는 함수이고 $2n\ln x$는 $x > 0$에서 정의되는 함수이기 때문이다. $x > 0$에서만 $\ln x^{2n} = 2n\ln x$이다.
따라서 $y = \ln x^2$, $y = 2\ln x$의 그래프는 아래와 같다.





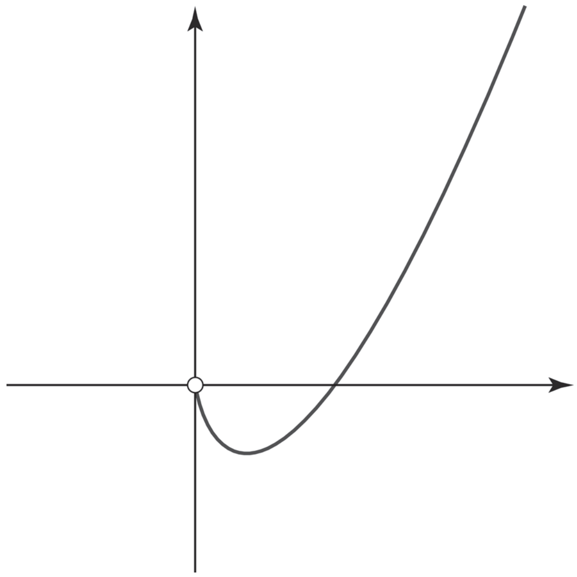
n이 자연수일 때, $\ln x^{2n-1} = (2n-1)\ln x$ 이다. $\ln x^{2n-1}$, $(2n-1)\ln x$은 **모두 $x > 0$일 때만 정의되기 때문이다.**
따라서 $a > 1$일 때, $y = \ln x^3$, $y = 3\ln x$의 그래프는 아래와 같다.



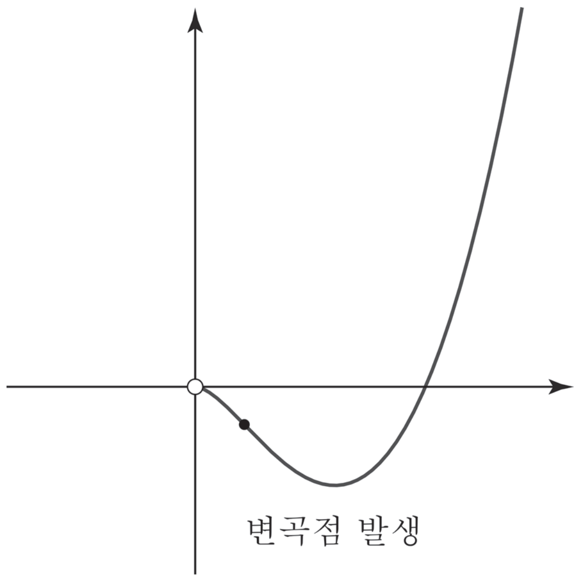


로그함수의 성질을 최대한 잘 이용하자. $y = \ln 2x$**는** $\ln 2 + \ln x$**로 바꾸고,** $y = \log_2 x$**는** $y = \frac{\ln x}{\ln 2}$**로 바꾸자.**
그래프 그릴 때도 수월하고 무엇보다도 미분할 때 실수를 줄일 수 있다.

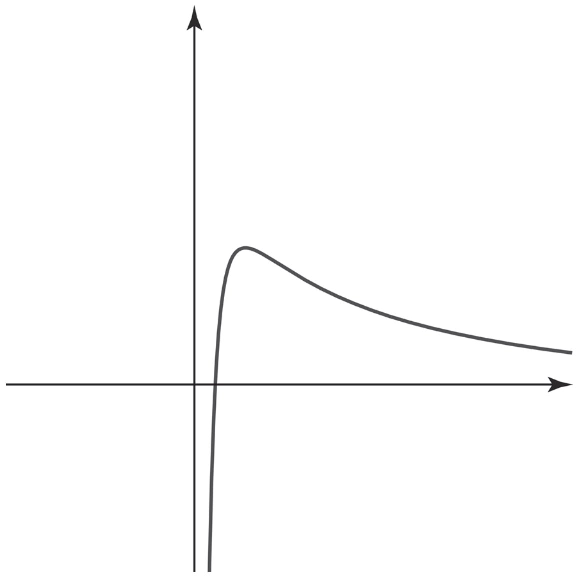
$y = x \ln x$ **꼴** $\left(\lim_{x \to 0+} x \ln x = 0 \right)$



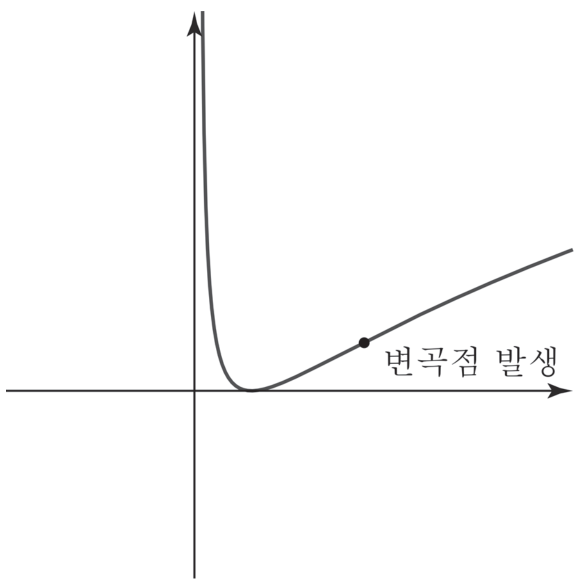
$y = x^2 \ln x$ **꼴** $\left(\lim_{x \to 0+} x^2 \ln x = 0 \right)$



$y=\dfrac{\ln x}{x^n}$ 꼴 (n은 자연수)



$y=(\ln x)^2$ 꼴



※ $y=\ln x$는 증가함수이고 $y=(\ln x)^2$는 $y=x^2$에 $y=\ln x$를 합성한 것이므로 $y=x^2$의 그래프 개형과 비슷하다는 것을 예측할 수 있다. **하지만 $x>0$에서 $y=\ln x$는 $y=x$보다 증가속도가 훨씬 느리기에 $y=(\ln x)^2$ 역시 $y=x^2$보다 증가속도가 훨씬 느리다. 따라서 그래프 개형을 그릴 때 변곡점이 생긴다는 것을 고려하자.**

20년 10월 교육청 20번

자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{nx}{x^n+1} & (x \neq -1) \\ -2 & (x=-1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

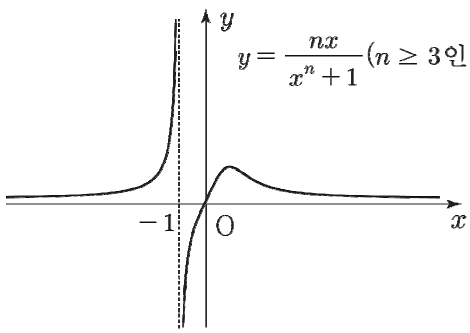
ㄱ. $n=3$일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 증가한다.

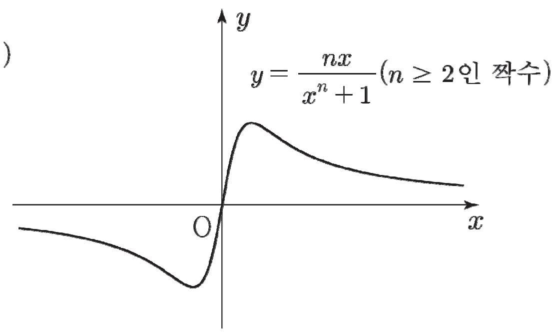
ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 n에 대하여 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 구간 $(-1, \infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은 24이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. $y=\dfrac{nx}{x^n+1}$ 의 그래프는 '미분 없이' 그릴 수 있다.





n이 홀수일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가한다. 선지 (ㄱ)은 참.

2. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면 n은 짝수여야 하고, $f(-1)=\dfrac{-n}{2}=-2$에서 $n=4$이다.

함수 $f(x)$의 극댓값을 구하기 위해 미분하자. $f'(x)=\dfrac{n-(n^2-n)x^n}{(x^n+1)^2}$에서 $n=4$일 때

$f'(x)=\dfrac{4-12x^4}{(x^4+1)^2}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3^{-\frac{1}{4}}$에서 극댓값을 갖는다.

$f\left(3^{-\frac{1}{4}}\right)=\dfrac{4\cdot 3^{-\frac{1}{4}}}{\left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^4+1}=\dfrac{4\cdot 3^{-\frac{1}{4}}}{\frac{4}{3}}=3^{\frac{3}{4}}>2$이므로 선지 (ㄴ)은 참.

3. 함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\ \infty)$에서 극솟값을 가지려면 n은 짝수여야 한다.

$f'(x)=\dfrac{n-(n^2-n)x^n}{(x^n+1)^2}$에서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{-1}{\sqrt[n]{n-1}}$에서 극솟값을 갖는다.

(1) $n=2$일 때, $x=-1$이므로 구간 $(-1,\ \infty)$을 벗어난다. (x)

(2) $n\geq 4$일 때, $x=\dfrac{-1}{\sqrt[n]{n-1}}>-1$이므로 구간 $(-1,\ \infty)$에 포함된다.

따라서 구간 $(-1,\ \infty)$에서 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 자연수 n은 4, 6, 8, 10이므로 합은 28이다. 선지 (ㄷ)은 거짓.

답은 ②!!

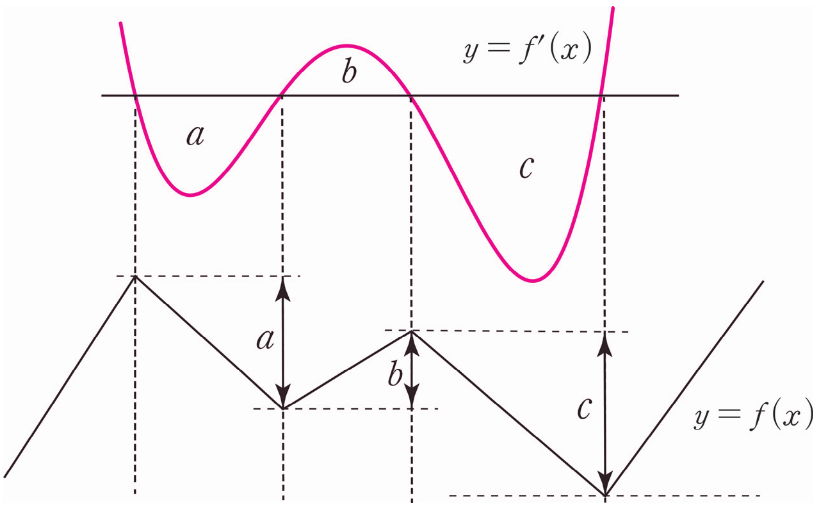
◆ 3. 미분을 이용한 그래프 그리기

$f(x)$가 미분가능한 함수라고 하자. 미분 없이 그래프 그리기가 잘 안 통할 때,
$y=f'(x)$로부터 $y=f(x)$ 그래프 개형을 그려낸다.

어떤 구간에서 $f'(x)$의 정적분 값은 $f(x)$의 함숫값 차이이다.

$\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a)$를 이용하여 $y=f'(x)$로부터 $y=f(x)$의 그래프 개형을 알아낼 수 있다.

단, $y=f(x)$ 그래프의 정확한 x축 위치는 적어도 하나의 $f(k)$ 값을 알아야 확정할 수 있다. (k는 상수)



a, b, c는 $y=f'(x)$와 x축이 둘러싸인 넓이이다. $y=f(x)$를 **간편하게 위처럼 그렸지만 실제로는 smooth 한 곡선임을 염두에 두자.**

◆ 조건 해석

그래프 개형과 관련된 기본적인 조건인 대칭성과 주기성을 소개하고 **특수한 경우를 암시하는 조건**을 살펴볼 것이다. 극점, 변곡점, 연속성, 미분가능성, 사잇값 정리, 평균값 정리 등등 더 심화된 조건 해석은 Chapter 8, Chapter 12에서 다룰 것이다.

◆ 1. 대칭성

(1) 대칭의 핵심, 테크닉, 주의점

① **대칭의 핵심 개념 : 대칭은 곧 평균이다.** 만약 두 함수가 어떤 직선에 대하여 대칭이면, 두 함수의 평균은 직선이다. 만약 두 함수가 어떤 점에 대하여 대칭이면, 두 함수의 평균은 점이다. **따라서 모든 대칭성 공식은 평균을 나타내는 식인 $\frac{a+b}{2}=c$와 연결된다.**

② **대칭이동의 핵심 테크닉 : 대신 대입**

함수의 그래프를 $x=a$에 대해 대칭 시키려면 x 대신 $2a-x$를 대입하자. $\frac{x+(2a-x)}{2}=a$

함수의 그래프를 $y=a$에 대해 대칭 시키려면 y 대신 $2a-y$를 대입하자. $\frac{y+(2a-y)}{2}=a$

함수의 그래프를 점 (a,b)에 대해 대칭 시키려면 x 대신 $2a-x$를 대입하고, y 대신 $2a-y$를 대입하자. 이 또한 평균과 연결지으면 쉽게 이해할 수 있다.

③ **대칭에서 주의해야 할 포인트 :** 대칭성에 관한 문제를 본다면 다음의 두 가지를 잘 구분하자.

(ⅰ) 함수 $y=f(x)$의 그래프 자체가 직선 $x=a$에 대하여 대칭인가?
(ⅱ) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 또 다른 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=a$에 대하여 대칭인가?

예를 들어,
(ⅰ) 이차함수 $y=a(x-b)^2+c$(a,b,c는 실수)는 그래프 자체가 직선 $x=b$에 대하여 대칭이다.
(ⅱ) 함수 $y=2^x$의 그래프와 함수 $y=2^{-x}$의 그래프는 y축($x=0$)에 대하여 대칭이다.

대칭의 핵심 개념, 테크닉, 주의점을 머리에 각인했다면 본격적으로 대칭성 공식을 알아보자.

단, 지금부터 효율적 표현과 빠른 이해를 위해 **'그래프, 직선, 함수 표현'은 모두 생략**하겠다. 예를 들어, '함수 $f(x)$의 그래프가 $x=a$에 대해 대칭이다'를 '$f(x)$가 $x=a$에 대해 대칭이다.'로 표현하겠다.

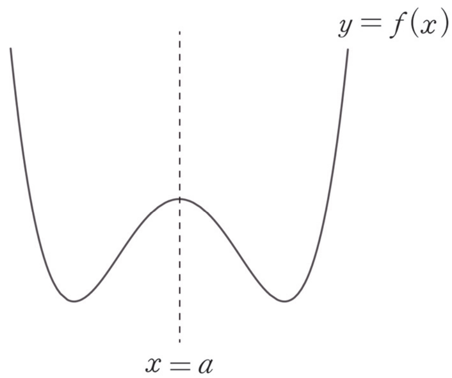
(2) $x=a$ 대칭

① **형성 :** $f(x)$를 $x=a$에 대해 대칭 시키면 $f(2a-x)$이다. 즉, $f(x)$에 x 대신 $2a-x$를 대입하면 $f(x)$를 $x=a$에 대해 대칭 시킬 수 있다.

② $x=a$**에 대해 대칭인 함수** : 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(2a-x)$이면, 즉 $f(x)$가 $f(x)$를 $x=a$에 대해 대칭 시킨 $f(2a-x)$와 같다면 $f(x)$는 $x=a$에 대해 대칭이다.

단, 두 함수가 $x=a$에 대칭임을 알려주는 항등식이 항상 저러한 형태로 제시되지는 않는다. 예를 들어, x에 관한 항등식 $f(x)=f(2a-x)$에 x 대신 $a+x$를 대입하면 $f(a+x)=f(a-x)$가 되는데, $f(a+x)=f(a-x)$도 많이 등장한다. **'공식의 형태'를 외우려 하지 말자.**

따라서 대칭의 핵심 개념인 **'평균'을 기억**해야 한다. $f(x)=f(2a-x)$에서 괄호 속 문자의 평균을 구해보면 $\dfrac{x+(2a-x)}{2}=a$이다. 또한 $f(a+x)=f(a-x)$에서 괄호 속 문자의 평균을 구해보면 마찬가지로 $\dfrac{(a+x)+(a-x)}{2}=a$이다. **'평균'을 기억하자!**



③ $x=a$**에 대해 대칭인 두 함수 :** 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=g(2a-x)$이면, 즉 $f(x)$가 $g(x)$를 $x=a$에 대해 대칭 시킨 $g(2a-x)$와 같다면, $f(x)$와 $g(x)$는 $x=a$에 대해 대칭이다.

②는 하나의 함수 자체가 $x=a$에 대해 대칭인 경우이고, ③은 두 함수가 $x=a$에 대해 대칭인 경우이다. **②가 압도적으로 많이 등장하지만** 둘을 헷갈리지 않기 위해 **②와 ③의 차이점도 정확히 알아둬야 한다.**

※ $x=a$ **대칭과 절댓값 함수**

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq a) \\ f(2a-x) & (x<a) \end{cases}$ (혹은 절댓값을 이용하여 $f(|x-a|+a)$로 표현 가능)

일 때, $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프에서 $x \geq a$인 부분은 그대로 두고, $x<a$인 부분은 $x \geq a$인 부분을 $x=a$에 대하여 대칭 시킨 개형이 된다. 즉, $g(x)$는 $x=a$에 대해 대칭인 함수다.

(3) $y=a$ 대칭

① 형성

$f(x)$를 직선 $y=a$에 대해 대칭 시키면 $2a-f(x)$이다. 즉, $y=f(x)$에 대해 y 대신 $2a-y$를 대입하면 $2a-y=f(x)$, $y=2a-f(x)$가 되어 $y=f(x)$를 $y=a$에 대해 대칭 시킬 수 있다. 평균 공식을 적용해 보면 $\dfrac{f(x)+\{2a-f(x)\}}{2}=a$이다.

② $y=a$에 대해 대칭인 함수

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=2a-f(x)$이면, 즉 $f(x)$가 $f(x)$를 $y=a$에 대해 대칭 시킨 $2a-f(x)$와 같다면 $f(x)$는 $y=a$에 대해 대칭이다. 단, 이 경우 $f(x)=a$로 상수함수이므로 문제에 거의 등장하지 않는다.

※ $y=a$ 대칭과 절댓값 함수

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq k) \\ 2k-f(x) & (f(x)<k) \end{cases}$ (혹은 절댓값을 이용하여 $|f(x)-k|+k$로 표현 가능)

에서 $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프에서 $y=k$의 윗부분은 그대로 두고, $y=k$의 아랫부분은 $y=k$에 대해 대칭 시킨(접어 올린) 개형이 된다. 기출에서 상당히 많이 등장한 함수이다.

(4) 점 $(a,\ b)$ 대칭

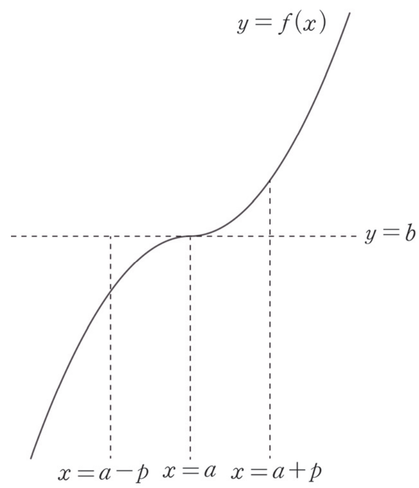
① **형성** : $f(x)$를 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭 시키면 $2b-f(2a-x)$이다. $y=f(x)$에 x 대신 $2a-x$를 대입하고, y 대신 $2b-y$를 대입하면 $2b-y=f(2a-x)$, $y=2b-f(2a-x)$가 되어 $y=f(x)$를 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭 시킬 수 있다.

※ x 대신 $2a-x$를 대입하는 것은 그래프를 $x=a$에 대칭하는 것이고, y 대신 $2b-y$를 대입하는 것은 그래프를 $y=b$에 대칭하는 것이다. 즉, $x=a$과 $y=b$ 모두에 대해 한 번씩 대칭 이동시키면 이동 전의 그래프와 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭인 관계가 된다.

② **점 $(a,\ b)$에 대해 대칭인 함수 :** 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=2b-f(2a-x)$이면, 즉 $f(x)$가 $f(x)$를 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭 시킨 $2b-f(2a-x)$와 같다면, $f(x)$는 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭이다.

단, 함수가 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭임을 알려주는 항등식이 항상 저러한 형태로 제시되지는 않는다.
예를 들어, x에 관한 항등식 $f(x)+f(2a-x)=2b$에 x 대신 $a+x$를 대입하면
$f(a+x)+f(a-x)=2b$가 되는데 이 형태도 다소 등장한다. **'공식의 형태'를 외우려 하지 말자.**

대칭의 핵심 개념인 '평균'을 기억하자.
$f(x)+f(2a-x)=2b$에서 괄호 속 문자의 평균을 구해보면
$\dfrac{x+(2a-x)}{2}=a$이고 $f(a+x)+f(a-x)=2b$에서
괄호 속 문자의 평균을 구해보면
$\dfrac{(a+x)+(a-x)}{2}=a$이다. 그래프를 곁들여 이해하면 더할 나위 없다.



※ 〈$y=a$ 대칭〉과 〈점 $(a,\ b)$ 대칭〉에는 ③ **대칭인 두 함수** 항목을 넣지 않았지만, 항등식에 있는 하나의 f에 대해 f 대신 g만 대입하면 끝이다. $f(x)=2a-g(x)$이면 $f(x)$와 $g(x)$는 $y=a$에 대해 대칭이고, $f(x)+g(2a-x)=2b$이면 $f(x)$와 $g(x)$는 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭이다.

comment

문제에서 대칭성과 관련된 식을 봤을 때 대칭성을 파악할 수 있도록 연습해 두자. 대칭성 파트는 아무리 개념을 빠삭하게 알고 있어도 실전에서 빠르게 파악하지 못하는 경우가 많다. 위의 조건들을 자유자재로 말로 표현하고, 수식으로 나타내고, 그래프로 표현할 수 있어야 한다.

(5) 우함수와 기함수

① 우함수 (y축 대칭)

$f(x)$를 y축에 대해 대칭 시키면 $f(-x)$이다. '$f(x)$가 우함수이다.' 또는 '$f(x)$가 y축 대칭이다.'는 곧 '$f(x)$와 $f(x)$를 y축에 대해 대칭 시킨 $f(-x)$와 같다.'라는 의미이다. 따라서 $f(x)=f(-x)$이면 $f(x)$는 우함수 (y축 대칭)이다. (혹은 $f(x)$가 우함수이면 $f(x)=f(-x)$이다.)
단, $f(x)-f(-x)=0$으로 제시될 수도 있으므로 '형태'에 주목하지 말고, '의미'에 주목하자.

$f(x)=f(-x)$를 보고 $f(x)$가 우함수임을 파악하는 것은 누구나 할 수 있지만, 어떤 함수의 y축 대칭 여부를 판정하기 위해 $f(x)=f(-x)$를 적용하는 것은 아무나 하지 못한다. 후자의 처리도 당연히 할 수 있어야 한다.

② 기함수 (원점 대칭)

$f(x)$를 원점에 대해 대칭 시키면 $-f(-x)$이다. '$f(x)$가 기함수이다.' 또는 '$f(x)$가 원점 대칭이다.'는 곧 '$f(x)$와 $f(x)$를 원점에 대해 대칭 시킨 $-f(-x)$와 같다.'라는 의미이다. 따라서 $f(x)=-f(-x)$ 이면 $f(x)$는 기함수(원점 대칭)이다. (혹은 $f(x)$가 기함수이면 $f(x)=-f(-x)$이다.)
단, $f(x)+f(-x)=0$으로 제시될 수도 있으므로 '형태'에 주목하지 말고, '의미'에 주목하자.

기함수는 우함수와 달리 한 가지 정보를 더 캐낼 수 있다. 만약 기함수 $f(x)$가 $x=0$에서 정의된 함수인 경우 $f(x)=-f(-x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=-f(0)$이므로 $f(0)=0$이 된다.
즉, $x=0$에서 정의된 기함수는 항상 원점을 지난다.

$f(x)=-f(-x)$를 보고 $f(x)$가 기함수임을 파악하는 것은 누구나 할 수 있지만, 어떤 함수의 원점 대칭 여부를 판정하기 위해 $f(x)=-f(-x)$를 적용하는 것은 아무나 하지 못한다. 후자의 처리도 당연히 할 수 있어야 한다.

③ 미분·적분에서의 대칭성

함수 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 미분가능하다.

우함수 $f(x)$를 x에 대해 미분하면 $f'(x)$는 기함수이다.
$f(x)$가 우함수라면 실수 전체 집합에서 $f(x)=f(-x)$을 만족시킨다.
$f(x)=f(-x)$의 양변을 x에 대해 미분하면 $f'(x)=-f'(-x)$이다. $f'(x)$는 기함수이다.

기함수 $f(x)$를 x에 대해 미분하면 $f'(x)$는 우함수이다.
$f(x)$가 기함수라면 실수 전체 집합에서 $f(x)=-f(-x)$을 만족시킨다.
$f(x)=-f(-x)$의 양변을 x에 대해 미분하면 $f'(x)=f'(-x)$이다. $f'(x)$는 우함수이다.

우함수 $f(x)$를 x에 대해 적분하면 $F(x)=\int f(x)dx$는 점 $(0,k)$ 대칭 함수이다. (k는 상수)
$f(x)$가 우함수라면 실수 전체 집합에서 $f(x)=f(-x)$을 만족시킨다. $f(x)=f(-x)$의 양변을 x에 대해 적분하면 $F(x)=-F(-x)+2k$이다. $F(x)$는 점 $(0,k)$ 대칭 함수이다.
단, $F(0)=0$이라는 조건이 추가적으로 주어진다면 $F(x)$는 기함수이다.

기함수 $f(x)$를 x에 대해 적분하면 $F(x)=\int f(x)dx$는 우함수이다.
$f(x)$가 기함수라면 실수 전체 집합에서 $f(x)=-f(-x)$을 만족시킨다. $f(x)=-f(-x)$의 양변을 x에 대해 적분하면 $F(x)=F(-x)+\mathrm{C}$이다. $F(x)=F(-x)+\mathrm{C}$에 $x=0$을 대입하면 $F(0)=F(0)+\mathrm{C}$이므로 $\mathrm{C}=0$이다. 따라서 $F(x)=F(-x)$이다. $F(x)$는 우함수이다. (C는 상수)

④ 합성함수에서의 대칭성

우함수 $f(x)$에 우함수 $g(x)$를 합성한 $h(x)=f(g(x))$는 우함수이다.
$h(-x)=f(g(-x))=f(g(x))=h(x)$이므로 $h(x)$는 우함수이다.
다만, $f(x)$가 꼭 우함수가 아니더라도 $g(x)$가 우함수라면 $h(x)$가 우함수라는 것을 알 수 있다.

우함수 $f(x)$에 기함수 $g(x)$를 합성한 $f(g(x))$는 우함수이다.
$h(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x))=h(x)$이므로 $h(x)$는 우함수이다.

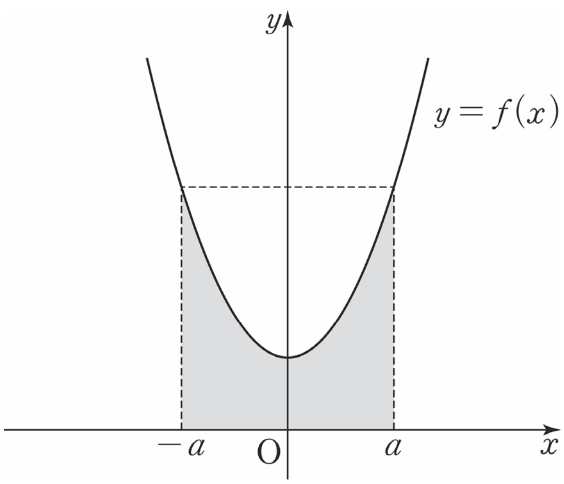
기함수 $f(x)$에 우함수 $g(x)$를 합성한 $h(x)=f(g(x))$는 우함수이다.
$h(-x)=f(g(-x))=f(g(x))=h(x)$이므로 $h(x)$는 우함수이다.
다만, $f(x)$가 꼭 우함수가 아니더라도 $g(x)$가 우함수라면 $h(x)$가 우함수라는 것을 알 수 있다.

기함수 $f(x)$에 기함수 $g(x)$를 합성한 $f(g(x))$는 기함수이다.
$h(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))=-h(x)$이므로 $h(x)$는 기함수이다.

(6) 대칭성을 이용한 정적분 계산

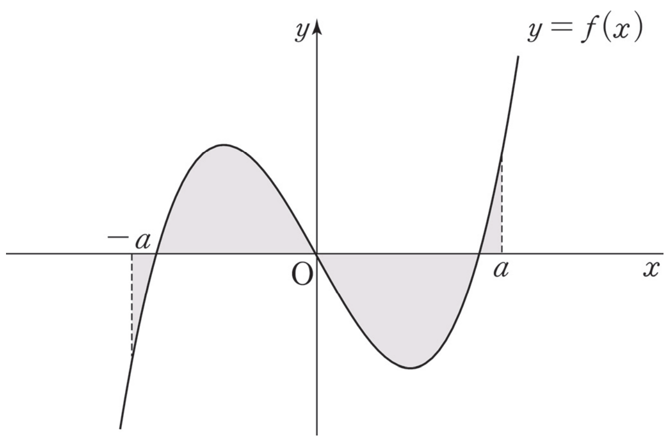
① 우함수 (y축 대칭)

우함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[-a, a]$에서 연속일 때
(혹은 $-a \le x \le a$인 실수 x에 대해 $f(x)=f(-x)$일 때)
$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$이다. 따라서 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)dx$



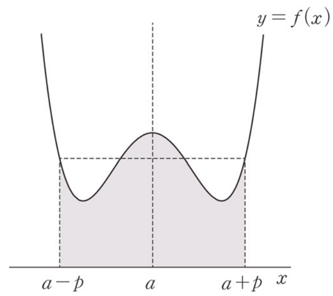
② 기함수 (원점 대칭)

기함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[-a, a]$에서 연속일 때
(혹은 $-a \le x \le a$인 실수 x에 대해 $f(x)=-f(-x)$일 때)
$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$이다. 따라서 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$이다.



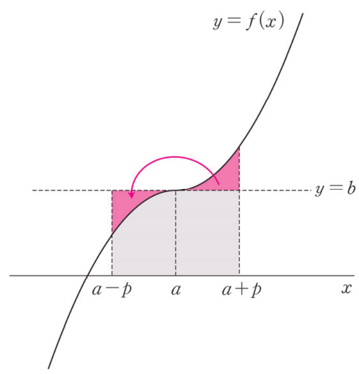
③ $x=a$ **대칭**

어떤 함수의 그래프가 직선 $x=a$에 대하여 대칭인지 알아보는 도구는 앞에서 다뤘다. 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=a$에 대해 대칭이라면 $\int_{a-p}^{a} f(x)dx=\int_{a}^{a+p} f(x)dx$이므로 대칭성을 이용하여 $\int_{a-p}^{a+p} f(x)dx=2\int_{a}^{a+p} f(x)dx=2\int_{a-p}^{a} f(x)dx$를 계산하면 된다. (단, $p>0$)



④ **점** $(a,\ b)$ **대칭**

어떤 함수의 그래프가 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭인지 알아보는 도구는 앞에서 다뤘다. 점 $(a,\ b)$에 대해 대칭인 연속함수 $y=f(x)$의 정적분 계산은 **'퍼즐 풀이'**에 지나지 않는다. **정적분 계산이 쉬워지도록 넓이의 일부분을 다른 부분으로 끼워 넣으면 된다.**



위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는 동일하므로 $\int_{a-p}^{a+p} f(x)dx$**의 값은 밑변이** $2p$**이고 높이가** b**인**

직사각형의 넓이와 같다. $\therefore \int_{a-p}^{a+p} f(x)dx=2pb$

comment

대칭성 최종 comment

지금까지 대칭성을 이용한 정적분 계산을 공부해보았다. 이 파트에서 얻어갈 것은 두 가지이다.

① **제시된 함수가 어떤 함수인지 관찰하자.**

② **적분 구간이 대칭성을 띄는지 관찰하자.**

두 가지 관찰을 바탕으로 정적분 계산을 최대한 간소화해주면 된다. 다양한 정적분 계산의 근본 태도는 그래프 관찰과 적분구간 관찰이다.

2. 주기성

'모든 x에 대하여 $f(x)=f(x+a)$이다.'를 볼 때 무슨 생각이 먼저 드는가? (a는 상수)
보통 $f(x)$의 주기가 a라고 답할 것이다. 하지만 엄밀히 말하면 아니다. 대다수 문제에서 $0 \leq x < a$에서의 함수 $f(x)$가 주어지기에 주기를 a로 보아도 문제 푸는데에 큰 지장은 없었을 것이다. 하지만 **엄밀히 말하면 $f(x)$의 주기는 $\frac{|a|}{n}$이다. (n은 자연수)**
예를 들어, 주기가 1인 함수인 $y=\sin(2\pi x)$도 $f(x)=f(x+2)$를 만족한다.

$f(x)=f(x+a)$뿐만 아니라 $f(x)=f(x+a)+b$도 넓은 의미에서 주기성을 갖는다고 할 수 있다. 왜냐하면 $0 \leq x < a$에서의 $y=f(x)$ 그래프 개형이 반복되기 때문이다. (a, b는 상수)

$f(x)$에 주기가 $\frac{|a|}{n}$인 $g(x)$를 합성한 $h(x)=f(g(x))$는 주기함수이다. (a는 상수)
$h(x+a)=f(g(x+a))=f(g(x))=h(x)$이므로 $h(x)$는 주기가 $\frac{|a|}{n}$인 주기함수이다. (n은 자연수)
이를 알면 **20학년도 6월 평가원 30번 그래프가 주기 2π를 갖는다는 것**을 바로 이해할 것이다.

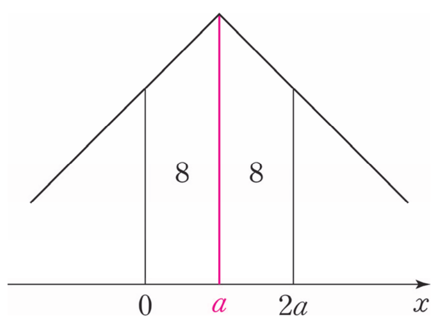
16년 10월 교육청 19번

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_0^a \{f(2x)+f(2a-x)\}\,dx$의 값은?
(단, a는 상수이다.) [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(a-x)=f(a+x)$이다.
(나) $\int_0^a f(x)\,dx=8$

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

1. 조건 (가)를 보고 **연속함수 $f(x)$가 $x=a$ 대칭임**을 바로 알 수 있다.
생각나는 $y=f(x)$**의 가장 간단한 그래프 개형을 그려보자.** 정적분 값을 구하는 것이기에 조건 (가), 조건 (나)를 동시에 만족한다면 어떤 그래프 개형도 문제없다.



$$\int_0^a \{f(2x)+f(2a-x)\}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2a} f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx$$

그래프 개형을 통해 $\int_0^{2a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$임을 쉽게 알 수 있다.

2. $\int_0^a \{f(2x)+f(2a-x)\}\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx=16$이므로 **답은 ②!!**

18년 3월 교육청 20번

함수 $f(x)=\int_{0}^{x}\sin(\pi\cos t)dt$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

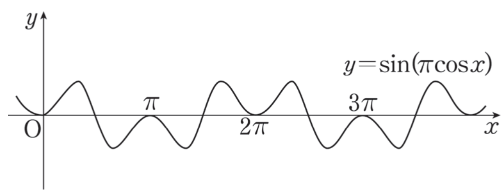
ㄱ. $f'(0)=0$
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $f(\pi)=0$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. $f(x)=\int_0^x \sin(\pi \cos t)dt$**은 '미적분 기본정리 꼴'이다.** Chapter 9에서도 말하겠지만 **반사적으로** **$x=0$을 대입하여 $f(0)=0$을 뽑아내고 $f(x)=\int_0^x \sin(\pi \cos t)dt$의 양변을 x에 대해 미분하여** **$f'(x)=\sin(\pi \cos x)$를 뽑아낸다.** $f'(0)=0$이므로 선지 (ㄱ)은 참.

2. $f'(x)=\sin(\pi \cos x)$**에서 $\pi \cos x$는 우함수이다.** $f'(x)=f'(-x)$이므로 **$f'(x)$ 역시 우함수이다.** 따라서 **$f(x)$는 점 $(0, k)$ 대칭인 함수이다. (k는 상수.) $f(0)=0$이므로 $f(x)$는 기함수이다.** 선지 (ㄴ)은 참.

3. $f'(x)=\sin(\pi \cos x)$**에서 $\pi \cos x$는 주기함수이다.** $f'(x)=f'(x+2\pi)$**이므로 $f'(x)$ 역시 주기함수이다.** $y=f'(x)$의 한 주기가 2π이므로 $(0, 2\pi)$에서 그래프 개형을 먼저 그린 후에 나머지 **정의역 구간에도 그래프 개형을 그려주자.**



위와 같은 그래프 개형이 나온다. $f'(0)=0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f'(\pi)=0$**이므로** **$f'(x)$가 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 대칭함수가 아닐까 의심이 된다.** 수식적으로 확인해 보자.

$f'(\pi-x)=\sin(\pi \cos(\pi-x))=\sin(-\pi \cos x)=-\sin(\pi \cos x)=-f'(x)$이므로

$f'(x)$**는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 대칭함수이다.** 따라서 $\int_0^\pi f'(x)dx=0$이다.

$f(\pi)-f(0)=0$, $f(0)=0$이므로 $f(\pi)=0$이다. 선지 (ㄷ)은 참.

답은 ⑤!!

comment

합성함수에서의 대칭성, 적분에서의 대칭성, 주기성, 그래프 개형 그리기를 모두 이용한 쉽지만 아름다운 문제였다. 함수 $f(x)$에 관계없이 f(우함수)는 우함수이고 f(주기함수)는 주기함수임을 꼭 기억하자. $f'(x)$가 우함수이고 $f(0)=0$일 때 $f(x)$ 기함수라는 점 역시 꼭 기억하고 있어야 한다.

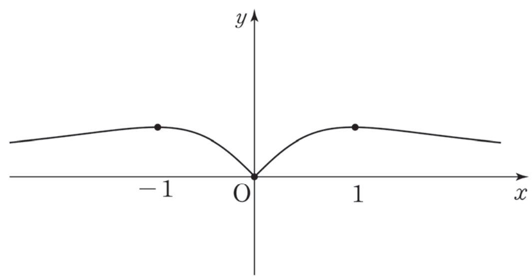
20학년도 사관 20번

두 상수 a, b와 함수 $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(b-x) & (x \geq a) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\displaystyle\int_{a}^{a-b} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{2}\ln 5$ ② $\ln 5$ ③ $\dfrac{3}{2}\ln 5$ ④ $2\ln 5$ ⑤ $\dfrac{5}{2}\ln 5$

1. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 정도의 그래프는 '미분 없이' 그릴 수 있다.

$x^2+1>0$이므로 $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}=\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|$이다. 따라서 $y=f(x)$의 그래프 개형은 아래와 같다.



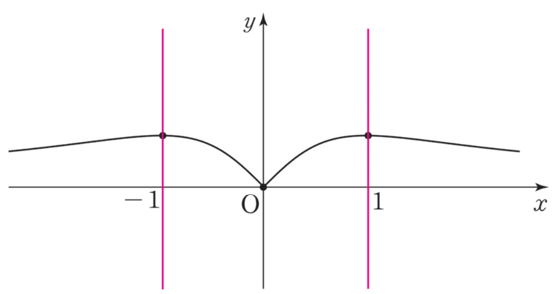
$x>0$에서 $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이자 최댓값을 갖는다.

함수 $f(x)$는 우함수이므로 $x=-1$, $x=1$에서 극대이자 최댓값을 갖는다.

2. $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(b-x) & (x\geq a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하므로 연속이다.

$f(b-x)$는 함수 $f(x)$를 $x=\dfrac{b}{2}$에 대하여 대칭이동 시킨 것이다.

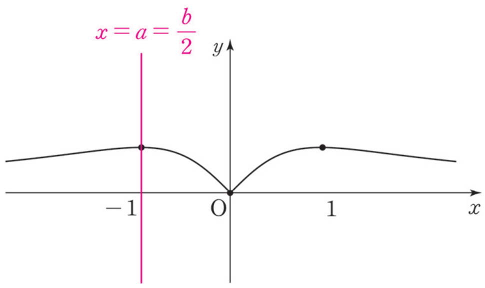
$a=\dfrac{b}{2}$이면 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

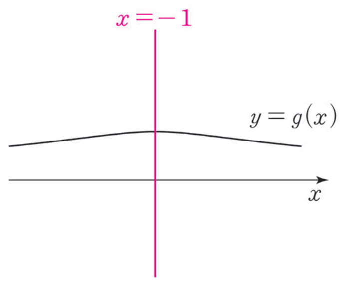


$x=a$에서 $g(x)$가 미분가능하려면 a를 $f(x)$의 극점의 x좌표로 두면 된다.
$a=-1$ 또는 $a=1$이다.

(1) $a=\dfrac{b}{2}=-1$일 때

$a=\dfrac{b}{2}=-1$일 때, $y=g(x)$를 그리면 다음과 같다.

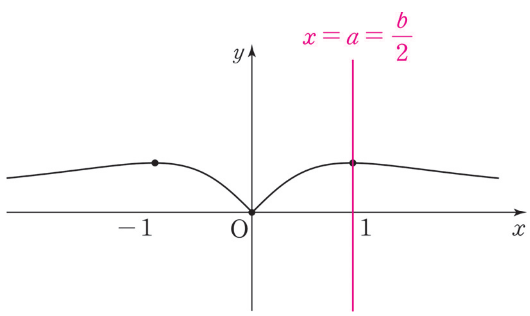


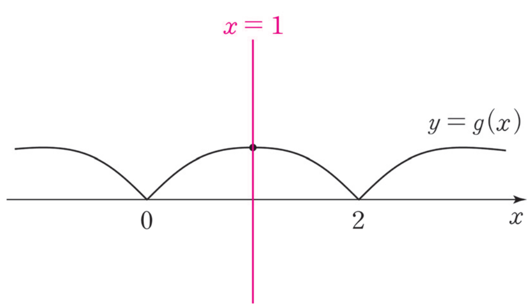


$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(2) $a=\dfrac{b}{2}=1$일 때

$a=\dfrac{b}{2}=1$일 때, $y=g(x)$를 그리면 다음과 같다.





$g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하나 $x=0$, $x=2$에서 미분가능하지 않다.

3. $a=\frac{b}{2}=-1$이다. 이를 $\int_{a}^{a-b} g(x)\,dx$에 대입하여 답을 구하자.

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(-2-x)dx = \int_{-3}^{-1} f(x)dx = -\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1} \frac{2x}{x^2+1}dx$$ 이다.

$$-\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1} \frac{2x}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_{-3}^{-1} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{5} = \frac{1}{2}\ln 5$$ 이다.

답은 ①!!

※ Chapter 9를 공부하면 $\{\ln(x^2+1)\}' = \frac{2x}{x^2+1}$임을 바로 알아볼 것이다.

21학년도 수능 20번

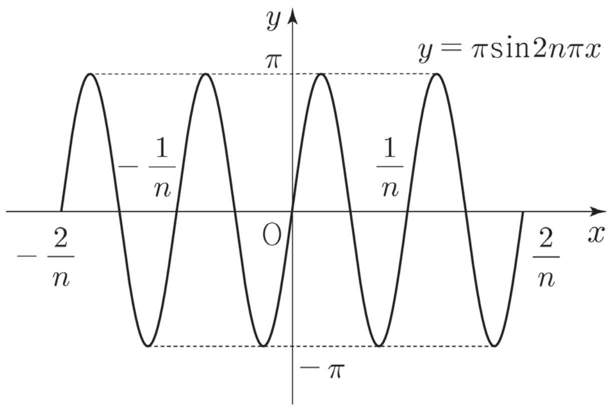
함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
>
> $$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2,\ \int_{-1}^{1} xh(x)dx = -\frac{1}{32}$$
>
> 이다.

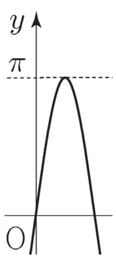
① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

1. 함수 $g(x)$의 치역이 $\{0,\ 1\}$이므로 함수 $h(x)=f(nx)$ or $h(x)=0$이다.

함수 $f(nx)=\pi\sin 2n\pi x$ 의 그래프를 그려보자. 주기는 $\dfrac{2\pi}{2n\pi}=\dfrac{1}{n}$이다.



이 함수의 그래프에서 한 칸의 넓이만 구해보자.



그림에서 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2n}}\pi\sin 2n\pi x dx=\left[-\frac{1}{2n}\cos 2n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2n}}=\frac{1}{n}$이다.

2. 구간 $[-1,\ 1]$에서 $f(nx)=\pi\sin 2n\pi x$ 가 양수인 구간은 $2n$개, 음수인 구간도 $2n$개다.

$\displaystyle\int_{-1}^{1}h(x)dx$이 될 수 있는 범위를 구해보자.

(1) 구간 $[-1,\ 1]$에서 $f(nx)=\pi\sin 2n\pi x$ 가 음수인 구간에서 $g(x)=1$,

양수인 구간에서 $g(x)=0$일 때 $\displaystyle\int_{-1}^{1}h(x)dx$은 최솟값 $2n\times\left(-\dfrac{1}{n}\right)=-2$를,

(2) 구간 $[-1,\ 1]$에서 $f(nx)=\pi\sin 2n\pi x$ 가 음수인 구간에서 $g(x)=0$,

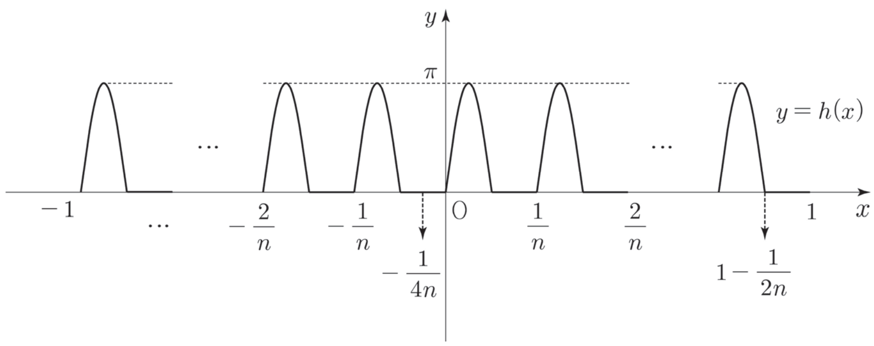
양수인 구간에서 $g(x)=1$일 때 $\displaystyle\int_{-1}^{1}h(x)dx$은 최댓값 $2n\times\dfrac{1}{n}=2$를 가진다.

조건 (가)에서 $\displaystyle\int_{-1}^{1}h(x)dx=2$이므로 (2)의 상황을 따른다.

함수 $h(x)=\begin{cases} f(nx) & (f(nx)\geq 0) \\ 0 & (f(nx)<0) \end{cases}$ 임을 알 수 있다.

3. $\int_{-1}^{1} xh(x)dx = -\frac{1}{32}$을 이용하여 n의 값을 구하자. $\int_{-1}^{1} xh(x)dx$를 계산하기 전에 함수 $h(x)$의 대칭성을 파악하자.

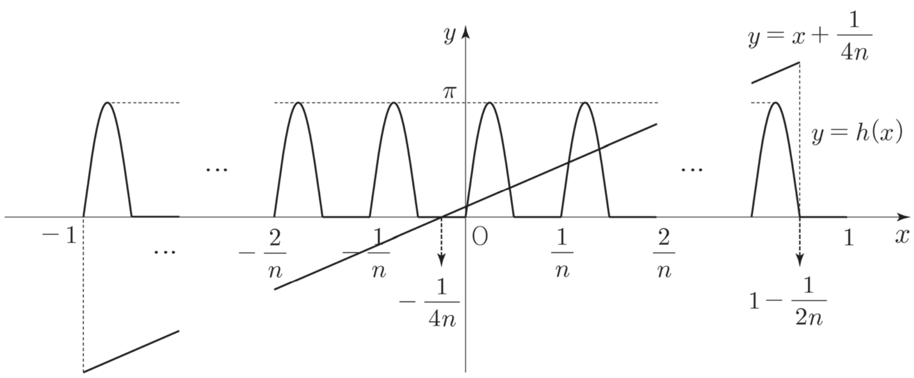
함수 $h(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



구간 $\left[1-\frac{1}{2n},\ 1\right]$에서 $h(x)=0$이므로, 함수 $h(x)$의 대칭축은 $x = \dfrac{-1+\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{2} = -\frac{1}{4n}$이다.

직선 $y = x + \frac{1}{4n}$은 점 $\left(-\frac{1}{4n},\ 0\right)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $y = \left(x+\frac{1}{4n}\right)h(x) = p(x)$**는 점** $\left(-\frac{1}{4n},\ 0\right)$**에 대하여 대칭이다.**



점대칭함수의 적분법을 이용하면

$\int_{-\frac{1}{4n}-\left(1-\frac{1}{4n}\right)}^{-\frac{1}{4n}+\left(1-\frac{1}{4n}\right)} p(x)dx = \int_{-1}^{1-\frac{1}{2n}} p(x)dx = 2\times\left(1-\frac{1}{4n}\right)\times p\left(-\frac{1}{4n}\right) = 0$**이다.**

구간 $\left[1-\frac{1}{2n},\ 1\right]$에서 $p(x)=0$이므로 $\int_{-1}^{1-\frac{1}{2n}} p(x)dx = \int_{-1}^{1} p(x)dx = 0$이다.

$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{4n}\right)h(x)dx - \int_{-1}^{1}\frac{1}{4n}h(x)dx = -\frac{1}{4n}\times 2 = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$이므로

$n=16$이다. **답은 ⑤!!**

※ $\int_{-1}^{1} xh(x)dx$를 계산할 때, 대칭성을 떠올리지 못했을 경우

함수 $y = xf(nx)$**는 우함수이므로** $\int_{a}^{b} xf(nx)dx = \int_{-a}^{-b} xf(nx)dx$**이다.**

$$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \int_{-\frac{2n}{2n}}^{-\frac{2n-1}{2n}} xf(nx)dx + \int_{-\frac{2n-2}{2n}}^{-\frac{2n-3}{2n}} xf(nx)dx + \cdots$$

$$\cdots + \int_{-\frac{2}{2n}}^{-\frac{1}{2n}} xf(nx)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2n}} xf(nx)dx + \int_{\frac{2}{2n}}^{\frac{3}{2n}} xf(nx)dx + \cdots$$

$$\cdots + \int_{\frac{2n-2}{2n}}^{\frac{2n-1}{2n}} xf(nx)dx = \int_{0}^{1} xf(nx)dx$$

※ $\int_{-\frac{2n}{2n}}^{-\frac{2n-1}{2n}} xf(nx)dx = \int_{\frac{2n-1}{2n}}^{\frac{2n}{2n}} xf(nx)dx$, $\int_{-\frac{2}{2n}}^{-\frac{1}{2n}} xf(nx)dx = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{2}{2n}} xf(nx)dx$로 바꾸면 이해가 쉬울 것이다.

$$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \int_{0}^{1} xf(nx)dx = \int_{0}^{1} \pi x \sin 2n\pi x dx$$

$$= \left[-\pi x \times \frac{1}{2n\pi} \times \cos 2n\pi x\right]_{0}^{1} + \pi \int_{0}^{1} \cos 2n\pi x dx = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$$

comment

주기성과 대칭성을 잘 활용한 아름다운 문제이다. $\int_{-1}^{1} xh(x)dx$를 계산할 때, 무작정 $h(x)$에 직접적으로 식을 대입하여 부분적분으로 푸려고 했다면 시간이 오래 걸렸을 것이다.

$\int_{-1}^{1} xh(x)dx$**에서 적분구간의 특이함을 눈치채고 일차함수의 점대칭성을 숙지**했다면 $xh(x)$의 $y = x$를 평행이동하여 $y = x + \frac{1}{4n}$를 만들고 **점** $\left(0, -\frac{1}{4n}\right)$**에 대하여 대칭인 함수** $y = \left(x + \frac{1}{4n}\right)h(x) = p(x)$**를 만들어 낼 생각**을 할 수 있었을 것이다.

연속함수 $f(x)$**가 점** $(a, f(a))$**에 대하여 대칭이라면** $\int_{a-p}^{a+p} f(x)dx = 2pf(a)$**이 성립함을 잘 이용하자.** $\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = 2$를 미리 암기해뒀다면 $\int_{-1}^{1} h(x)dx$ 계산이 좀 더 수월했을 것이다.

CHAPTER 05 문제

01 16학년도 6월 평가원 21번

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1\le g(n)\le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 43 ② 46 ③ 49 ④ 52 ⑤ 55

02 17년 7월 교육청 20번

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_0^x \frac{t}{f(t)}dt$$

일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=-g'(x)$이다. (나) 점 $(1, g(1))$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

$g(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{5}\ln 2$ ② $\frac{1}{4}\ln 2$ ③ $\frac{1}{3}\ln 2$ ④ $\frac{1}{2}\ln 2$ ⑤ $\ln 2$

03 13학년도 수능 21번

함수 $f(x)=kx^2e^{-x}(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

04 19년 3월 교육청 20번

함수 $f(x)=x^2+ax+b\left(0<b<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 함수 $g(x)=\sin(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=-g'(x)$이다. (나) 점 $(k, g(k))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이고 $2kg(k)=\sqrt{3}g'(k)$이다.

두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$ ④ $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

05 16년 10월 교육청 21번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다.
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
(다) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pi$

함수 $g(x)=\dfrac{\sin f(x)}{x}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

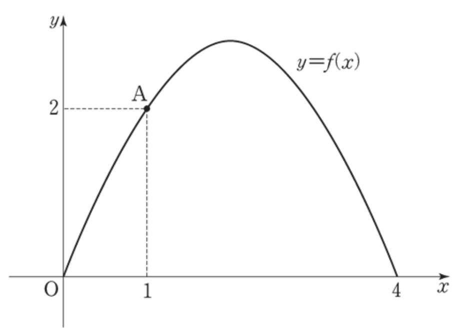
<보 기>

ㄱ. 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)+g(-x)=0$이다.
ㄴ. $\lim_{x\to 0} g(x)=0$
ㄷ. $f(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}\ (\alpha>0)$이면 방정식 $|g(x)|=\dfrac{1}{\alpha}$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 16학년도 6월 평가원 14번

닫힌 구간 [0, 4] 에서 정의된 함수 $f(x)=2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}x$의 그래프가 그림과 같고 직선 $y=g(x)$가 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 A$(1,\ 2)$를 지난다. 일차함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0,4]$에서 $f(x)\le g(x)$를 만족시킬 때, $g(3)$의 값은? [4점]



① π ② $\pi+1$ ③ $\pi+2$
④ $\pi+3$ ⑤ $\pi+4$

07 05학년도 9월 평가원 26번

$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$인 모든 x에 대하여 부등식 $\tan 2x > ax$를 만족하는 a의 최댓값은? [3점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

08 06학년도 수능 30번

양수 a에 대하여 닫힌 구간 $[-a, a]$에서 함수

$$f(x) = \frac{x-5}{(x-5)^2+36}$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M+m=0$이 되도록 하는 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

09 17년 7월 교육청 17번

함수 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x - \dfrac{k}{x}$가 열린 구간 $(0, \infty)$에서 증가할 때, 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

10 14년 4월 교육청 30번

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$의 극댓값을 α라 하자. 함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)-\dfrac{\alpha}{n}x=0$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

11 17년 7월 교육청 30번

상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수인 이차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $g(x)$가

$$g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$$

일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $4\sqrt{e}$이다.
(다) 방정식 $g(x)=4\sqrt{e}$의 근은 모두 유리수이다.

$|f(-1)|$의 값을 구하시오. [4점]

CHAPTER 05 해설

01 16학년도 6월 평가원 21번

답 : ④

1. 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위해서 함수 $f(x)$는 증가함수이거나 감소함수이어야 한다.
   $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$이므로 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 증가함수이다. 즉, $f'(x) \geq 0$이다.

2. $y = f'(x)$의 그래프 개형은 아래와 같다. 함수 $f'(x)$ 의 최솟값은 0 이상이다.

   함수 $f'(x)$의 극솟값이 곧 함수 $f'(x)$의 최솟값이다. 함수 $f'(x)$의 극솟값을 구하자.
   $f''(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n+2)x + (n+1)\} = e^{x+1}(x+1)(x+n+1)$에서
   $x = -1$ 또는 $x = -n-1$이다.

   $n \geq 2$이므로 $f'(-1)$이 함수 $f'(x)$의 극솟값이자 최솟값이다. 따라서 $f'(-1) \geq 0$이다.
   $f'(-1) = 2 - n + a \geq 0$이므로 $a \geq n-2$이다. 따라서 $g(n) = n-2$이다.

3. $1 \leq g(n) \leq 8$을 만족하는 n의 값을 구하자. $g(n) = n-2$에서 $3 \leq n \leq 10$이다.
   따라서 모든 n의 값의 합은 $\sum_{n=3}^{10} n = \sum_{n=1}^{10} n - \sum_{n=1}^{2} n = 55 - 3 = 52$이다.

02 17년 7월 교육청 20번

답 : ④

1. $g(x) = \int_0^x \frac{t}{f(t)} dt$는 미적분 기본정리 꼴이므로 $g(0) = 0$, $g'(x) = \frac{x}{f(x)}$을 뽑아낸다.
   $g(0) = 0$이고 함수 $g'(x)$는 기함수이므로 함수 $g(x)$는 우함수이다.
   또, $g'(x) = \frac{x}{f(x)}$에서 x는 기함수이므로 $f(x)$는 우함수이다. $f(x) = x^2 + a$이다.
   ※ $g'(-x) = -g'(x)$에서 $\frac{-x}{f(-x)} = -\frac{x}{f(x)}$이므로 $f(x) = f(-x)$이다.

2. $g''(x)=\dfrac{f(x)-xf'(x)}{\{f(x)\}^2}$에서 $g''(1)=0$이다. $f(1)=f'(1)$을 얻는다.

$f(1)=a+1$, $f'(1)=2$에서 $a=1$이므로 $f(x)=x^2+1$이다.

3. $g(1)$의 값을 구하자.

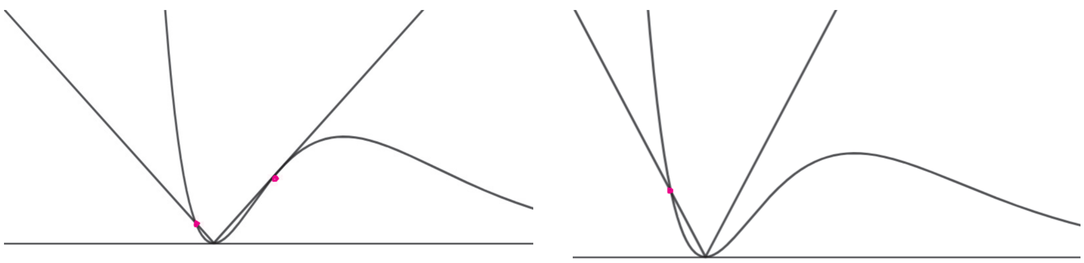
$g(1)=\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{f(t)}dt=\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$이다.

03 13학년도 수능 21번

답 : ⑤

1. 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$의 그래프 개형은 '미분 없이' 쉽게 그릴 수 있다.
점 $(t,\ f(t))$에서 x축과의 거리는 $|t|$이고 y축과의 거리는 $|f(t)|$이다.
$k>0$이므로 $|f(t)|=f(t)$이다.
따라서 함수 $g(t)=\begin{cases} f(t) & (f(t)\le|t|) \\ |t| & (f(t)\ge|t|) \end{cases}$ 이다.

2. 함수 $g(t)$가 미분가능하지 않는 점을 찾기 위해 함수 $y=|t|$와의 교점을 찾아보자.



$t<0$에서 $y=f(t)$와 $y=|t|$의 접하지 않는 교점에서 함수 $g(t)$는 미분가능하지 않으므로
$t>0$에서 곡선 $y=f(t)$와 $y=|t|$가 만나지 않거나 접하여야 함수 $g(t)$는 미분가능하다.
두 그래프가 접할 때 k값이 최대이므로 두 그래프가 접하는 상황인
$\begin{cases} f(t)=t \\ f'(t)=1 \end{cases}$ 를 만족하는 t값을 찾아보자.
$\begin{cases} kt^2e^{-t}=t \\ k(2t-t^2)e^{-t}=1 \end{cases}$ 에서 $kte^{-t}=k(2t-t^2)e^{-t}=1$이므로 $t=1$, $k=e$를 얻는다.

04 19년 3월 교육청 20번

답 : ③

1. 조건 (가)에서 $g'(0)=0$임을 이용해 a값을 구하자.

$g'(x)=(2x+a)\cos(f(x))$에서 $g'(0)=a\cos b=0$이다. $0<b<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $0<\cos b$이다.

따라서 $a=0$이다.

2. 조건 (나)에서 $g''(k)=0$임을 알 수 있다.

$g''(x)=2\cos(f(x))-4x^2\sin(f(x))$에서 $g''(k)=2\cos(k^2+b)-4k^2\sin(k^2+b)=0$이다.

따라서 $\tan(k^2+b)=\dfrac{1}{2k^2}$이다.

3. $2kg(k)=\sqrt{3}g'(k)$도 이용하자.

$2kg(k)=2k\sin(f(k))=2k\sin(k^2+b)$이고,

$\sqrt{3}g'(k)=2k\sqrt{3}\cos(f(k))=2k\sqrt{3}\cos(k^2+b)$이다.

따라서 $\sin(k^2+b)=\sqrt{3}\cos(k^2+b)$에서 $\tan(k^2+b)=\sqrt{3}$이므로 $k^2=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$이다.

$k^2+b=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $b=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$이다.

05 16년 10월 교육청 21번

답 : ③

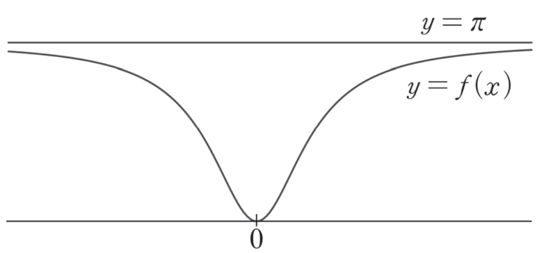
1. 함수 $f(x)$는 우함수이다. $y=\sin f(x)$는 우함수, $y=x$는 기함수이므로

함수 $g(x)=\dfrac{\sin f(x)}{x}$는 기함수이다. 따라서 $g(-x)=-g(x)$이므로 $g(x)+g(-x)=0$이다.

선지 (ㄱ)은 참.

2. $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f(x)=f(-x)$이므로 $f'(x)=-f'(-x)$이다.

따라서 $f'(0)=0$이다. 조건을 만족하는 $y=f(x)$의 그래프 개형은 아래와 같다.

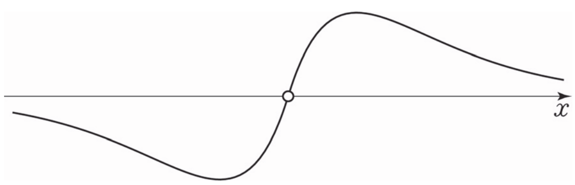


$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin f(x)-\sin f(0)}{x-0}=f'(0)\cos f(0)$이다.

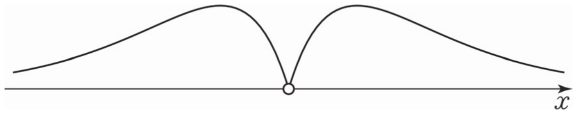
$f'(0)=0$, $\cos f(0)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$이다. 선지 (ㄴ)은 참.

3. $g(x)$는 기함수이고 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$을 만족하며 $y=f(x)$의 그래프 개형이 위와 같으므로

$y=g(x)$의 그래프 개형은 아래와 같다.



따라서 $y=|g(x)|$의 그래프 개형은 아래와 같다.



$f(\alpha)=\frac{\pi}{2}\,(\alpha>0)$이면 $g(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$이다. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대여야 $|g(x)|=\frac{1}{\alpha}$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

$g'(x)=\frac{xf'(x)\cos f(x)-\sin f(x)}{x^2}$에서 $g'(\alpha)=\frac{\alpha f'(\alpha)\cos f(\alpha)-\sin f(\alpha)}{\alpha^2}=\frac{-1}{\alpha^2}\neq 0$

선지 (ㄷ)은 거짓.

06 16학년도 6월 평가원 14번

답 : ③

1. 발문과 그림을 잘 살펴보자. 직선 $y=g(x)$가 $y=f(x)$의 그래프와 한 점 A에서 만나고 $f(x)\leq g(x)$이므로 함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$위의 점 $\mathrm{A}(1,2)$에서 접함을 알 수 있다.

2. 함수 $g(x)$를 구해보자. $g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)$에서

   $f'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\cos\frac{\pi}{4}x$에서 $f'(1)=\frac{\pi}{2}$이고

   $f(1)=2$이므로 $g(x)=\frac{\pi}{2}(x-1)+2$이다. 따라서 $g(3)=\pi+2$이다.

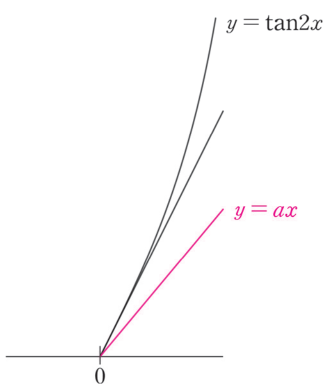
07 05학년도 9월 평가원 26번

답 : ④

1. $y=\tan 2x$, $y=ax$는 공통적으로 원점을 지난다.

   $0<x<\frac{\pi}{4}$인 모든 x에 대하여 부등식 $\tan 2x>ax$을 만족하려면

   $y=\tan 2x$, $y=ax$의 그래프 개형은 아래와 같아야 한다.

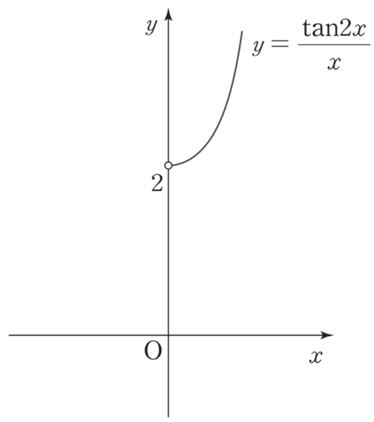


즉, $y=ax$의 기울기가 $y=\tan 2x$의 원점에서의 접선의 기울기보다 작거나 같아야 한다.

2. $y=\tan 2x$, $y'=2\sec^2 2x$**이므로** $y=\tan 2x$**의 원점에서의 접선의 기울기는 2이다.**
$a \le 2$이므로 a의 최댓값은 2이다.

※ 더욱 안전한 풀이
Chapter 13에서도 예시와 함께 보여주겠지만 **'곡선과 직선이 만나는 형태'보다 '곡선과 상수함수가 만나는 형태'를 다루는 것이 그래프 개형을 이용하여 문제를 풀 때 더욱 안전하다.**

$0<x<\frac{\pi}{4}$이므로 $\tan 2x > ax$의 양변에 x로 나눈 $\frac{\tan 2x}{x} > a$를 생각해도 된다.
$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=2$이므로 $y=\frac{\tan 2x}{x}$의 그래프 개형은 아래와 같다.

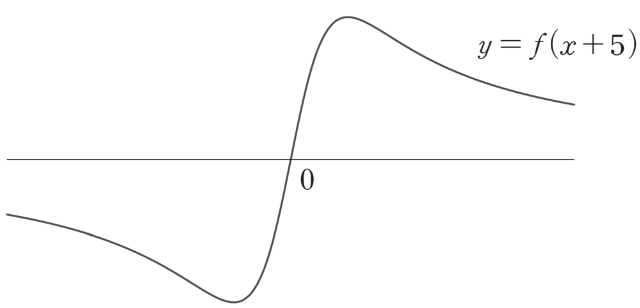


$0<x<\frac{\pi}{4}$에서 $\frac{\tan 2x}{x} > a$이 되기 위해서는 $a \le 2$이어야 한다. a의 최댓값은 2이다.

08 06학년도 수능 30번

답 : 11

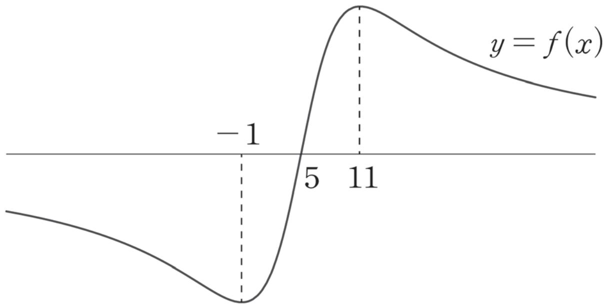
1. $y=f(x)=\frac{x-5}{(x-5)^2+36}$는 $y=f(x+5)=\frac{x}{x^2+36}$의 그래프를 x축 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프이다. $y=f(x+5)=\frac{x}{x^2+36}$의 그래프 개형은 '미분 없이' 그리면 아래와 같다.



$y'=\frac{36-x^2}{(x^2+36)^2}$이므로 $y=\frac{x}{x^2+36}$는 $x=6$에서 극대이고, $x=-6$에서 극소이다.

2. 따라서 $y=f(x+5)=\dfrac{x}{x^2+36}$의 그래프를 x축 방향으로 5만큼 평행이동한

$y=f(x)=\dfrac{x-5}{(x-5)^2+36}$의 그래프 개형은 아래와 같다.



$0<a<1$일 때, $M+m\neq 0$이다. $a=1$일 때, $M+m\neq 0$이다.

$a>1$일 때, $m=f(-1)=-\dfrac{1}{12}$이므로

$M+m=0$을 만족하려면 $M=f(11)=\dfrac{1}{12}$이어야 한다.

이를 만족하려면 닫힌 구간 $[-a, a]$이 닫힌 구간 $[-1, 11]$을 포함해야 하므로 $a\geq 11$이다.
따라서 a의 최솟값은 11이다.

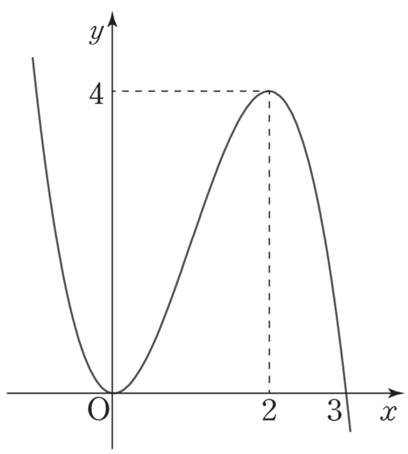
09 17년 7월 교육청 17번

답 : ③

1. **함수 $f(x)$가 $x>0$에서 증가하므로 $x>0$에서 $f'(x)\geq 0$이면 된다.**

$f'(x)=x-3+\dfrac{k}{x^2}\geq 0$에서 $x^2>0$이므로 양변에 x^2을 곱하여 정리하면 $k\geq -x^3+3x^2$이다.

2. $y=-x^3+3x^2$의 그래프 개형은 아래와 같다.



$y'=-3x(x-2)$이므로 삼차함수 비율 관계를 이용하면 $y=-x^3+3x^2$는 $x=2$에서 극대이다.
따라서 $x>0$에서 $k\geq -x^3+3x^2$를 만족하려면 $k\geq 4$이어야 한다.
k의 최솟값은 4이다.

10 14년 4월 교육청 30번

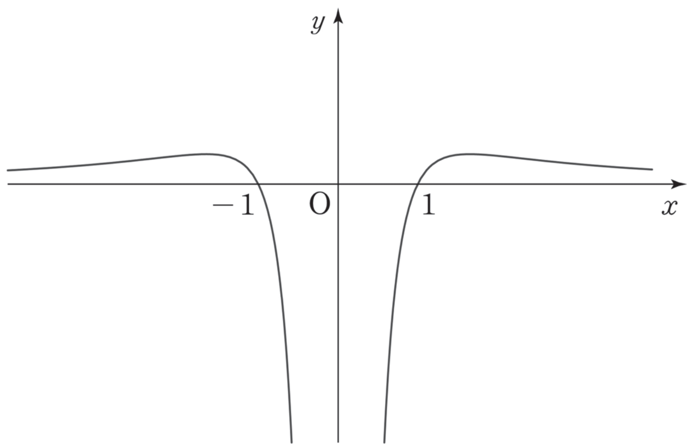
답 : 34

1. $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$는 $x \neq 0$에서 정의되므로 방정식 $f(x)=\dfrac{\alpha}{n}x$에서 양변을 x로 나눠서 생각하자.

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\alpha}{n}$에서 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$로 두자.

앞서 암기해야 할 그래프 개형을 충분히 숙지했다면 $g(x)=\dfrac{\ln x^2}{x^2}=\dfrac{2\ln|x|}{x^2}$의 그래프를 그리는 것이 어렵지 않았을 것이다.

함수 $g(x)$는 우함수이므로 구간$(0,\ \infty)$에서의 그래프를 먼저 그려주고
y축에 대하여 대칭시켜 구간$(-\infty,\ 0)$에서의 그래프를 그리면 된다.



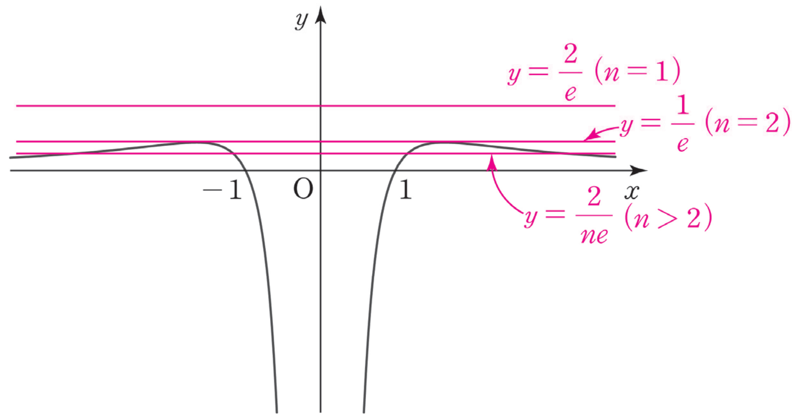
그래프 개형을 다 그렸으면 극댓값을 구하자. $g'(x)=\dfrac{2x(1-2\ln x)}{x^4}\ (x>0)$에서

$g'(\sqrt{e})=0$이므로 극댓값은 $g(\sqrt{e})=\dfrac{1}{e}$이고, 이는 최댓값이다.

2. 직선 $y=\dfrac{\alpha}{n}$의 그래프를 구하기 위해 α의 값을 구해보자.

$f'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}\ \ (x>0)$이므로 $f'(e)=0$에서 $\alpha=f(e)=\dfrac{2}{e}$이다.

방정식 $g(x)=\dfrac{\alpha}{n}$의 근의 개수를 구하기 위해 함수 $g(x)$와 직선 $y=\dfrac{\alpha}{n}=\dfrac{2}{ne}$의 그래프를 그려 교점의 개수를 파악해야 한다.



따라서 $a_1=0$, $a_2=2$, $a_n=4\,(n\geq 3)$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n=0+2+4\times 8=34$이다.

※ $g(x)=\dfrac{\ln x^2}{x^2}$를 단순히 $g(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2}$로 바꾸어 실수하는 경우가 매우 많다. 로그함수가 정의되는 정의역 구간에 항상 신경을 곤두세우자. 또한 '곡선과 직선이 만나는 형태'로 풀며 실수한 경우도 있을 것이다. Chapter 13에서도 예시와 함께 보여주겠지만 '곡선과 직선이 만나는 형태'보다 '곡선과 상수함수가 만나는 형태'를 다루는 것이 그래프 개형을 이용하여 문제를 풀 때 더욱 안전하다.

11 17년 7월 교육청 30번

답 : 71

1. $e^{f(x)}>0$이므로 $g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$는 곧 $g(x)=|f'(x)e^{f(x)}|$이다.
   $y=f'(x)$는 일차함수이다. 따라서 $f'(x)=0$은 하나의 근을 가진다.
   따라서 $g(x)=|f'(x)e^{f(x)}|$의 극솟값은 0이다.

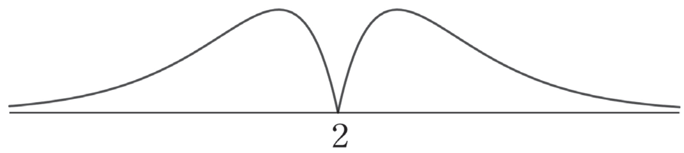
   $f'(x)=0$의 근이 함수 $g(x)$의 극솟점의 x좌표가 된다.
   조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f'(2)=0$이다.

   여기서 주목해야 할 것은 $y=f'(x)$는 일차함수이므로 점 $(2,0)$ 대칭이고,
   $y=f(x)$는 이차함수이므로 $x=2$에 대하여 대칭이라는 것이다.

   따라서 $y=f'(x)e^{f(x)}$은 점 $(2,0)$ 대칭이고, $y=g(x)$은 $x=2$에 대하여 대칭이다.

2. 함수 $g(x)$는 최댓값이 존재한다. 만약 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수라면
   $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$로 발산하므로 최댓값이 존재하지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 것을 알 수 있다.

   $y=g(x)$의 그래프 개형은 아래와 같다.



함수 $f(x)=a(x-2)^2+b\ \ (a<0)$라 하자.
$x>2$에서 $g(x)=-f'(x)e^{f(x)}$, $g'(x)=-f''(x)e^{f(x)}-\{f'(x)\}^2e^{f(x)}$이다.

항상 $e^{f(x)}>0$이므로 함수 $g(x)$의 극댓점의 x좌표를 k라 했을 때 k는 두 방정식
$f''(k)+\{f'(k)\}^2=0$, $-f'(k)e^{f(k)}=4\sqrt{e}$를 동시에 만족한다.

$f''(k)=2a$, $f'(k)=2a(k-2)$이므로 $f''(k)+\{f'(k)\}^2=2a+4a^2(k-2)^2=0$에서

$a(k-2)^2=-\dfrac{1}{2}$이고 조건 (다)에 의하여 a 또한 유리수이다.

$-f'(k)e^{f(k)}=-2a(k-2)e^{a(k-2)^2+b}$ 에서 a와 k가 유리수이므로 $-2a(k-2)$는 유리수이다.

따라서 $-2a(k-2)=4$를 얻고, 이를 $a(k-2)^2=-\dfrac{1}{2}$와 연립하면

$k=\dfrac{9}{4}$, $a=-8$을 얻는다.

3. $a(k-2)^2+b=\dfrac{1}{2}$에서 b값을 구하자. $a(k-2)^2=-\dfrac{1}{2}$이므로 $b=1$이다.

   따라서 $f(x)=-8(x-2)^2+1$이므로 $|f(-1)|=-f(-1)=8\times3^2-1=71$이다.

12 18학년도 9월 평가원 30번

답 : 6

1. $h(k)=|g(k)-f(0)|=g(k)$에서 $f(0)=2+\ln2\neq0$이므로 $f(0)=2g(k)>0$이다.
   $h(x)\geq h(k)>0$이므로 함수 $g(x)$와 함수 $f(x-k)$는 교점이 존재하지 않는다.
   $f(0)>g(k)$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x-k)>g(x)$이고 $h(x)=f(x-k)-g(x)$이다.

   이를 만족하는 $y=f(x-k)$, $y=g(x)$의 그래프 개형을 그려보면 아래와 같다.