고1 수학 복습

Day2. 복소수, 이차방정식

#복소수

실수부분 허수부분

: 허수단위 $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$

: 복소수 $a+bi$ (단, a, b는 실수)

: $z=a+bi$의 켤레복소수 $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$

→ 분모의 실수화

$\frac{1}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-i}{2}$

* $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}\neq\sqrt{6}$
$=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i$
$=-\sqrt{6}$

* TMI
분모를 실수화하면
① 연산이 편해지고
② 복소수끼리 나누어도 복소수가 됨을 알수있다

#이차방정식의 근의 공식

: $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

x가 허수라면 루트 안이 음수

(a, b, c 실수이면) 여기는 무조건 실수

: $ax^2+2b'x+c=0$ $(a\neq0)$의 근은

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

#판별식

: 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식

$D=b^2-4ac$ 또는

: 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 판별식

$D'=b'^2-ac$ 라 하면

① D 또는 $D'>0$: 서로 다른 두 실근 갖는다.
② D 또는 $D'=0$: 중근(서로 같은 두 실근) 갖는다.
③ D 또는 $D'<0$: 서로 다른 두 허근 갖는다.

실근 갖는다

#근과 계수의 관계

: $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 두 근 α, β에 대하여

두 근의 합 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, 두 근의 곱 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

why? 방법 ① 직접 계산

$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\alpha+\beta=\frac{(-b+\sqrt{D})+(-b-\sqrt{D})}{2a}=-\frac{b}{a}$

$\alpha\times\beta=\frac{(-b+\sqrt{D})\times(-b-\sqrt{D})}{4a^2}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$

방법 ② 인수정리

근이 α, β이므로

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$ax^2+bx+c=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$

동류항 비교 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

201906

16. 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 하자. 다항식 $P(x)=2x^2-3x$에 대하여 $\beta P(\alpha)+\alpha P(\beta)$의 값은? [4점]

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-1$

$\beta P(\alpha)+\alpha P(\beta)$

$=\beta(2\alpha^2-3\alpha)+\alpha(2\beta^2-3\beta)$

$=\alpha\beta(2\alpha-3)+\alpha\beta(2\beta-3)$

$=\alpha\beta(2\alpha+2\beta-6)$

$=\underbrace{\alpha\beta}_{=-1}(2\underbrace{(\alpha+\beta)}_{=-1}-6)$

$=-(-2-6)=8$

$\boxed{8}$

201906

21. 두 이차함수

$$f(x)=(x-a)^2-a^2,$$

$$g(x)=-(x-2a)^2+4a^2+b$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=g(x)$는 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는다.
(나) $\beta-\alpha=2$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.) [4점] ㄱ.ㄴ.ㄷ

<보 기>

ㄱ. $a=1$일 때, $b=-\dfrac{5}{2}$

ㄴ. $f(\beta)-g(\alpha)\le g(2a)-f(a)$

ㄷ. $g(\beta)=f(\alpha)+5a^2+b$이면 $b=-16$

$f(x)-g(x)=0$ 의 두근 α,β

$(x-a)^2-a^2-\{-(x-2a)^2+4a^2+b\}=0$

$(x-a)^2+(x-2a)^2-5a^2-b=0.$

$2x^2-6ax-b=0.$

(가) $\alpha+\beta=3a,\ \alpha\beta=-\frac{b}{2}$ ⋯①

(나) $4=(\beta-\alpha)^2$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$4=9a^2+2b$ ⋯②

ㄱ ②에 $a=1$ 대입, $b=-\frac{5}{2}$

ㄴ (왼쪽)

α는 $f(x)=g(x)$의 근이므로

$g(\alpha)=f(\alpha)$로 바꾸어 쓰자.

$f(\beta)-g(\alpha)=f(\beta)-f(\alpha)$

$=(\beta-a)^2-(\alpha-a)^2$ 합차

$=\underbrace{(\alpha+\beta-2a)}_{=3a(\because①)}\underbrace{(\beta-\alpha)}_{=2(\because④)}$

$=2a$

$\therefore f(\beta)-g(\alpha)=f(\beta)-f(\alpha)=2a$ ⋯③

(오른쪽)

$g(2a)=4a^2+b.\ f(a)=-a^2$

$g(2a)-f(a)=5a^2+b=\frac{1}{2}a^2+2$ ⋯④

$=2-\frac{9}{2}a^2(\because②)$

따라서 $f(\beta)-g(\alpha)\le g(2a)-f(a)$

$\Leftrightarrow\ 2a\le\frac{1}{2}a^2+2$

$\Leftrightarrow\ a^2-4a+4\ge0$

$\Leftrightarrow\ (a-2)^2\ge0$ 참.

ㄷ. (β는 $f(x)=g(x)$ 근)

$g(\beta)-f(\alpha)=5a^2+b$

$\Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha)=5a^2+b$

$\Leftrightarrow (\because③)\ 2a=2-\frac{9}{2}a^2\ (\because④)$

$\Leftrightarrow (a-2)^2=0$

$\therefore a=2, b=-16$