

가장 강력한 풀이 도구를 정리하고, 가장 간단한 행동 영역을 세웁시다.

수학 영역(수학上)

1

1. 다항식을 관찰하는 안목

▶ 다항식이 주어졌을 때 주목해야 할 POINT

1. 차수
 2. 문자의 개수
 3. 계수(상수항)
- 무엇이 주어져 있고 무엇을 구해야 하는지 정확히 인지할 것

▶ 다항식을 다루는 기본 태도

1. 차수, 문자의 개수, 풀이 과정의 길이 등을 최소화하겠다는 의식적 노력 필요
2. 공통적으로 반복되는 부분, 보기에 불편한 부분은 최대한 묶어 하나로 치환
(단, 치환은 보조적 도구로서 필수는 아님)
3. 다항식의 작성은 다음 두 가지 방법을 이용한다.
 - 1) 인수분해를 통한 식의 작성
 - 2) 미정계수를 도입한다면 미정계수의 개수만큼의 정보의 개수를 파악한다.

▶ 곱셈공식은 반드시 암기할 것!

1. 곱셈공식의 기본형
 - 1) $(x+a)(x+b)(x+c)$
 $= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$
 - 2) $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx)$
 - 3) $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$
 - 4) $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$
 - 5) $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$
 - 6) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
 $= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

2. 곱셈공식의 변형

- 1) $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)^3 \mp 3xy(x \pm y)$
- 2) $(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
 $= \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= xy + yz + zx \\ \Leftrightarrow x &= y = z \\ \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 &= 3xyz \end{aligned}$$

▶ 대칭성은 다항식을 관찰하는 가장 강력한 도구

1. 대칭식

: 다변수 다항식에서 변수를 서로 바꿔도 같은 식이 되는 대수식

 - 1) 기본 대칭식

	일차	이차	삼차
두 문자	$x+y$	xy	-
세 문자	$x+y+z$	$xy+yz+zx$	xyz

2) 윤회 대칭식

: 문자의 순서가 윤회한 후에도 변하지 않는 대수식

(예시) $x^2y + y^2z + z^2x$

2. 모든 대칭식은 “기본 대칭식”의 조합 (A, B, C 는 상수)

(예시1) 2원 2차 대칭식

$$: A(x+y)^2 + Bxy$$

(예시2) 3원 3차 대칭식

$$: A(x+y+z)^3 + B(xy+yz+zx)(x+y+z) + Cxyz$$

(예시3) 2원 3차 대칭식

$$: A(x+y)^3 + B(x+y)xy$$

▶ 대칭성을 이용한 곱셈공식의 재해석

$$1. (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 : 3원 2차 대칭식$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$$

$$2. (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 + b^3 : 2원 3차 대칭식$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

▷ 결국 ‘나’는 무엇을 알아야 하고 어떻게 사고해야 하는가?

1. 곱셈공식의 ‘기본형’과 ‘변형’을 정확하게 모두 암기한다.
 2. 곱셈공식을 기반으로 한 규칙성과 대칭성을 파악한다.
 3. 편의를 위한 보조적 도구로서의 치환을 활용한다.
 4. 대칭식이 주어지면 기본 대칭식의 값을 먼저 구해본다.
 5. 차수, 문자의 개수, 풀이 과정의 길이 등을 최소화한다.
- + 통분, 이항, 약분, 식 변형 등 경험을 기반으로 필연적 과정을 통해 적절히 활용할 것!

2. 조립제법의 고찰

▶ 조립제법의 주의사항

: 제수의 일차식의 계수가 1이 아닐 때

(예시) $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 를 $px - q$ 로 나누었을 때

	a	b	c	d
$\frac{q}{p}$		$\frac{q}{p}a$	$(\frac{q}{p})^2a + \frac{q}{p}b$	$(\frac{q}{p})^3a + (\frac{q}{p})^2b + \frac{q}{p}c$
	a	$\frac{q}{p}a + b$	$(\frac{q}{p})^2a + \frac{q}{p}b + c$	$(\frac{q}{p})^3a + (\frac{q}{p})^2b + \frac{q}{p}c + d$
몫 :	$\frac{a}{p}$	$\frac{q}{p^2}a + \frac{b}{p}$	$\frac{q^2}{p^3}a + \frac{q}{p^2}b + \frac{c}{p}$	

▶ 이차식의 나눗셈

(예시) $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 를 $x^2 + px + q$ 로 나누었을 때

	a	b	c	d
$-p-q$		$-ap$	$-aq$	
	a	$b-ap$	$-bp+ap^2$	$-bq+apq$
			$ap^2-aq-bq+c$	$apq-bq+d$

3. 나머지 정리의 모든 것

▶ “항등식”과, “다항식의 나눗셈”과의 관계

1. 항등식

: 주어진 식의 문자에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하는 등식

2. 다항식의 나눗셈

1) 나눗셈에 관한 항등식

: $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, 다음 항등식이 성립한다.

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$$

(단, $g(x)$ 의 차수 $>$ $R(x)$ 의 차수)

3. 나눗셈에 관한 항등식과 일반적인 항등식의 관계

다항식 $f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x + 1$ 이 주어졌다고 가정하자.
 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫은 $3x^2 + 2x + 4$ 이고
 나머지는 5이다. 이를 다항식의 나눗셈에 관한 항등식으로
 표현하면 다음과 같다.

$$f(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 4) + 5$$

이때 위 항등식을 다음과 같이 변형해보자.

$$f(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 3) + x + 4$$

$f(x)$ 의 제수를 $x-1$ 로 간주하면, 제수와 나머지 사이의 차수 관계가 성립하지 않아 나눗셈에 관한 항등식은 아니지만, 항등식인 것은 옳다.

$f(x)$ 의 제수를 $3x^2 + 2x + 3$ 으로 간주하면, 제수와 나머지 사이의 차수 관계가 성립하여 나눗셈에 관한 항등식이다.

제수를 무엇으로 보느냐에 따라 나머지에 관한 항등식의 성립 여부가 달라지고, 일반적인 항등식을 나머지에 관한 항등식으로 “변형”할 수 있어야 한다.

▶ 나머지를 구하기 위한 기본 태도

1. 제수의 차수가 일차일 때

: 나머지 정리

2. 제수의 차수가 이차 이상일 때

1) 제수의 차수가 n 차 일 때 나머지 $R(x)$ 를 $(n-1)$ 차 이하의 기본 다항식으로 설정한다.

2) 수치대입법을 이용하여 미정계수를 찾는다.

3) 미정계수의 개수와 주어진 정보의 개수를 비교하여 연립한다.

▶ 항등식의 원리를 이용한 나머지 정리의 고급해석

항등식 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ 가 주어졌다고 가정할 때,
 다항식 $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지는 $r(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈
 나머지와 같다.

1. 나머지의 차수가 이차 이상일 때

2. 제수의 인수가 중복될 때

▶ 나머지 정리와 다항식의 작성 : 인수정리

: 다항식을 작성할 때에는 차수단위 보다는 인수단위의 나열이 더 효율적이다.

1. 인수정리의 기본 태도

: $f(x)$ 가 $x-a$ 로 나누어떨어질 때 $(x-a)$ 를 인수로 갖는다.

$\therefore f(x) = (x-a)g(x)$ 로 표현 가능하다.

2. 다항식의 작성

1) $f(a) = b$ 가 주어질 때

$\therefore f(x) = (x-a)g(x) + b$

2) $f(a) = f(b) = c$ 가 주어질 때

$\therefore f(x) = (x-a)(x-b)g(x) + c$

3) 이차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(a) = b, f(c) = d$ 가 주어질 때

$\therefore f(x) = (x-a)(x-c)q + h(x)$

($h(x)$ 는 (a, b) 와 (c, d) 를 만족시키는 일차 이하 다항식이고,
 q 는 상수이다.)

n 차 다항식 $f(x)$ 에 대하여

$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n$ 이 주어질 때

$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)q + h(x)$

($h(x)$ 는 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ 을 만족시키는 $n-1$ 차
 이하 다항식이고, q 는 상수이다.)

3. $h(x)$ 의 결정

: $h(x)$ 의 차수와 조건의 개수가 동일할 때, $h(x)$ 는 단 하나로 결정된다. 즉, 만족하는 $h(x)$ 를 하나 찾으면 그게 유일하다.

1) 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n = c$ 일 때, $h(x) = c$ 이다.

2) a_n 과 b_n 의 간격(변화량)이 같으면 $h(x)$ 는 일차식이다.

3) 주어진 조건의 규칙성을 찾아 $h(x)$ 를 결정한다. 만족한다면 반드시 유일하다.

4) 조건의 개수에 맞춰 관계식을 연립하여 미정계수를 찾는다.

▶ 완전 제곱식과 나머지 정리 (+ 미분)

: $f(x)$ 를 $(x-a)^2$ 으로 나누었을 때 나머지를 구하는 방법

1. 교과서 풀이 : 숫자대입 $\rightarrow$ 문자대입 $\rightarrow$ 소거

1) 나머지를 $R(x) = px + q$ 로 설정한다.

2) $R(a) = f(a)$ 를 이용하여 q 를 p 에 관한 식으로 바꾼다.

3) 양변을 $x-a$ 로 나눈 후 $x=a$ 를 대입하여 p 를 구한다.

4) q 를 구하여 나머지를 확정한다.

2. 별해(미분)

1) 나머지를 $R(x) = px + q$ 로 설정한다.

2) $R(a) = f(a)$ 를 이용하여 관계식을 구한다.

3) 양변을 미분한 후 $x=a$ 를 대입하여 관계식을 구한다.

4) 두 관계식을 연립하여 나머지를 확정한다.

▶ 자연수의 거듭제곱과 나머지 정리 (+ 합동식)

1. 교과서 풀이

1) 규칙성을 찾아 적당한 수로 치환

2) 나머지정리를 통해 R 값 구하기

3) 자연수의 나머지 조건에 의해 실질적 나머지 구하기

2. 별해(합동식)

: 잉여류에 대한 성질 이용

$\rightarrow A_n \times A_m = A_{nm}$

4. 인수분해의 기본 태도

▶ 인수분해를 위한 기본 태도

1. 기본 공식의 숙지
: 곱셈공식의 역
2. 다변수 다항식의 인수분해
 - 1) 차수가 가장 낮은 문자로 내림차순 정리
 - 2) 나머지 문자를 상수 취급하여 인수분해

▶ 대칭성을 이용한 인수분해

1. 윤회대칭식
: 문자의 순서가 윤회한 후에도 변하지 않는 대수식
(예시) $x^2y + y^2z + z^2x$
2. 대칭성을 이용한 인수분해
 - 1) “ $x+y$ 를 인수로 갖는다.”와 “ $y=-x$ 를 대입했을 때 식의 값은 0이다.”는 동치이다.
 - 2) 윤회 대칭식에서 $x+y$ 를 인수로 갖는다면, $y+z$ 와 $z+x$ 도 인수로 갖는다.
 - 3) 수치대입법을 통해 미정계수를 구한다.
(예시) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = A(x+y)(y+z)(z+x)$
(A 는 상수이다.)
3. 계수의 대칭성을 이용한 인수분해 (4차식)
 - 1) x^2 으로 묶고 $x \pm \frac{1}{x}$ 에 대한 식으로 정리한다,
 - 2) 인수분해한 뒤 다시 x^2 을 곱해준다.

▶ 교대성을 이용한 인수분해

1. 다항식의 교대성
 - 1) 교대식
: 두 문자를 서로 바꿨을 때 부호가 바뀌는 대수식
(예시) $x-y$
 - 2) 교대식과 대칭식의 관계
: (교대식) $\times$ (대칭식) = (교대식)
2. 교대성을 이용한 인수분해
 - 1) 3원 교대식의 인수
: 교대식 $f(x, y, z)$ 는 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 를 인수로 갖는다.
 - 2) 3원 n 차 교대식의 인수분해
 - (1) 3원 3차 교대식 = $k(x-y)(y-z)(z-x)$
 - (2) 3원 4차 교대식 = $k(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$
 - (3) 3원 5차 교대식
= $k(x-y)(y-z)(z-x)\{A(x+y+z)^2 + B(xy+yz+zx)\}$
 - 3) 수치대입법을 통해 미정계수를 구한다.

▶ 치환을 이용한 복이차식의 인수분해

1. 복이차식 판단
: $x^4 + ax^2 + b$ 꼴의 이차식
2. x^2 을 X (적절한 새로운 문자)로 치환
3. $A^2 - B^2$ 꼴로 식 변환
4. $(A+B)(A-B)$ 꼴로 인수분해

▶ 인수정리를 이용한 인수분해

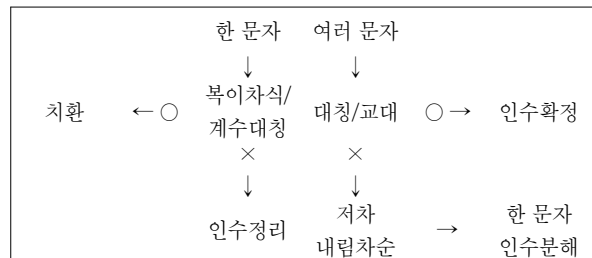
: 인수의 결정을 위한 약수 논리

정수계수 다항식 $f(x) = ax^n + \dots + b$ ($a \neq 0$)의 인수는 $f(x)$ 에 $x = \pm \frac{b \text{의 양의 약수}}{a \text{의 양의 약수}}$ 를 대입하여 찾는다.

▷ 결국 ‘나’는 무엇을 알아야 하고 어떻게 사고해야 하는가?

: 인수분해를 위한 실전 행동영역

1. 곱셈공식의 역
2. 낫선 다항식의 인수분해



5. 복소수 이론

▶ 복소수를 다루는 기본 태도

1. 복소수의 기본형을 통한 문제해결
 - 1) $z = a+bi$ 로 표현한 후 식 전개/변형을 통한 문제해결
 - 2) 연립을 통해 실수부, 허수부를 결정한다.
 - 3) 실수부분과 허수부분을 독립적으로 다룬다.
2. 복소수의 켤레를 통한 문제해결
 - 1) $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ 를 이용하여 새로운 관계식 도출한다.
 - 2) 켤레를 곱하여 분모는 항상 실수로 만든다.

▶ 제곱근과 부호

1. 부호 보존 ($a > 0, b > 0$)
 - 1) 곱: $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
 - 2) 몫: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
2. 부호 비보존
 - 1) 곱: $a < 0, b < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$
 - 2) 몫: $a > 0, b < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$

▶ 복소수의 거듭제곱

1. 낫선 복소수의 거듭제곱을 다루는 기본 태도
 - 1) 일반화 금지
 - 2) “대입, 나열, 추론”의 기본 원칙을 반드시 지킨다!
 - 3) 거듭제곱의 결과 양의 실수(1)인 n 에 주목하여 순환성 판단
2. 복소평면의 성질(드무아브르 정리의 활용)

임의의 복소수 z , 1이 아닌 자연수 n 에 대하여 $z^n = 1$ 이면, $z^1 + z^2 + \dots + z^n = 0$ 이 성립한다.

6. 이차방정식을 다루는 기본 태도

▶ 이차방정식의 해를 구하는 기본 태도

1. 인수분해 : 최대한 지향 할 것!
2. 근의 공식 : 최대한 지향 할 것!

▶ 이차방정식의 근을 다루는 기본 태도

1. 이차방정식의 근의 판별

: 실계수 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식 $D=b^2-4ac$ 일 때

- 1) $D>0$: 서로 다른 두 실근
 - 2) $D=0$: 중근
 - 3) $D<0$: 서로 다른 두 허근 (켈레)
- + $D\geq 0$: 실근 존재

2. 이차방정식의 근과 계수 관계

: 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근 α, β 에 대하여

- 1) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$
- 2) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$
- 3) $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$ ($\sqrt{D/4}$ 과 다르다는 것에 주의!)

▶ 이차방정식을 작성하는 기본 태도

1. 일반식

1) 미정계수와 이차방정식

: $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$)으로 설정한다.

2) 근의 정보와 이차방정식

: 이차방정식의 두 근 α, β 에 대하여 $\alpha+\beta=p, \alpha\beta=q$ 일 때,
 $x^2-px+q=0$ 으로 설정한다.

2. 표준식

1) 미정계수와 이차방정식

: $a(x-b)^2+c=0$ ($a\neq 0$)으로 설정한다.

2) 근의 정보와 이차방정식

: 이차방정식 $a(x-b)^2+c=0$ 에 대하여

- (1) 중근 : $c=0$
- (2) 서로 다른 두 실근 : $ac<0$
- (3) 허근 : $ac>0$

▶ 이차방정식의 근의 부호

1. 두 근이 모두 양수

- 1) $D\geq 0$
- 2) $\alpha+\beta>0$
- 3) $\alpha\beta>0$

2. 두 근이 모두 음수

- 1) $D\geq 0$
- 2) $\alpha+\beta<0$
- 3) $\alpha\beta>0$

3. 두 근의 부호가 반대

: $\alpha\beta<0$

1) 판별식에 대한 정보가 내포되어 있다.

2) 두 근의 합에 대한 정보를 확정지을 수 없다.

7. 이차함수와 이차방정식의 유기적 관계

▶ 이차함수의 식의 작성과 정보의 추출

1. 일반식

: $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$)

- 1) 최고차항의 계수(a) : 위로 볼록/아래로 볼록
- 2) 상수항 : y 절편
- 3) 대칭축의 위치

- $ab>0$ 일 때
대칭축이 y 축 오른쪽에 있음
- $ab<0$ 일 때
대칭축이 y 축 왼쪽에 있음
- $ab=0$ 일 때
대칭축이 y 축 위에 있음

2. 표준식

: $y=a(x-b)^2+c$ ($a\neq 0$)

- 1) 최고차항의 계수(a) : 위로 볼록/아래로 볼록
- 2) 꼭짓점의 좌표 (b, c)
- 3) 대칭축 : $x=b$

3. 인수정리

: $y=a(x-\alpha)(x-\beta)+b$

- 1) 최고차항의 계수(a) : 위로 볼록/아래로 볼록
- 2) $y=b$ 는 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)+b$ 와 $x=\alpha, x=\beta$ 에서 만난다.

▶ 이차함수의 위치관계와 방정식의 근을 대하는 논리

1. 함수와 방정식의 유기적 관계

- 함수 그래프의 다양한 위치 관계를 대수적으로 알아보기 위해 관점을 바꿔 방정식을 푸는 것처럼 다룬다.

→ 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 접하는지, 교차하는지, 만나지 않는지, 좌표평면 위에 구체적으로 어떤 위치 관계를 가지는지 등을 방정식 $f(x)=g(x)$, $f(x)-g(x)=0$ 을 대수적으로 다루어 파악하는 것을 목적으로 한다.

- 또한 방정식의 근의 다양한 수학적 관계를 명시적으로 알아보기 위해 관점을 바꿔 함수로 대체하여 다룬다.

→ 방정식 $f(x)=0$ 의 근의 범위, 실근의 존재성 등을 더욱더 명확하게 이해하기 위해 함수 $y=f(x)$ 의 기하학적 특징, 또는 $f(x)$ 를 $g(x)-h(x)$ 로 분해하여 두 함수 $y=g(x)$ 와 $y=h(x)$ 의 위치관계를 통해 파악하는 것을 목적으로 한다.

- 방정식 $f(x)=0$ 을 다룰 때, 두 함수 $y=g(x)$ 와 $y=h(x)$ 에 대해 $g(x)=h(x)$ 로 분해하여 관찰하기로 했다면, 그 기준은 다음과 같다.

1) $f(x)$ 가 이차식일 때

- (1) 이차=일차
- (2) 이차=상수항(축)

* 단, "이차=이차"로 분해하는 것은 무의미하다.

2) 변수(m)가 포함되어 있을 때

- (1) $m=g(x)$
- (2) $m(x-a)=g(x)$

: 함수 $y=g(x)$ 와 정점 ($a, 0$)을 지나고 기울기가 m 인 직선의 위치관계로 파악한다.

2. 이차함수와 축의 위치관계

1) x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

: $D > 0$

2) x 축과 접한다.

: $D = 0$

3) x 축과 만나지 않는다.

: $D < 0$

3. 이차함수와 직선의 위치관계

: 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$, 직선 $y = mx + n$ 과의 위치 관계를 나타내는 방정식 $ax^2 + bx + c = mx + n$ 에 대하여

1) 서로 다른 두 교점을 갖는다.

: $D > 0$

2) 접한다.

: $D = 0$

3) 만나지 않는다.

: $D < 0$

▶ 이차함수의 최댓값과 최솟값

1. 그래프를 통한 파악

1) 경계에서의 함숫값

2) 꼭짓점의 포함 여부

2. 대입(치환)을 이용한 최대와 최소

: 변역에 주의할 것!

▶ 이차방정식의 근의 분리

: 이차방정식의 근의 범위에 대한 문제는 다음 세 가지 정보를 통해 관계식을 세워서 구한다.

1. 판별식

2. 축의 위치(범위)

3. 경계에서의 함숫값

8. 여러 가지 방정식을 다루는 기본 태도

▶ 고차방정식을 다루는 기본 태도

1. 고차방정식의 해법

: 인수분해를 통해 근을 구하는 것이 기본 원칙!

* 계수가 대칭인 고차 방정식의 경우 a 가 근이면 $\frac{1}{a}$ 도 근이다.

2. 비에트 정리

: 고차방정식에서의 근과 계수 사이의 관계

n 차방정식 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ 에 대한 n 개의 근은 다음과 같다.

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

이때 다음 n 개의 등식이 항상 성립한다.

$$\textcircled{1} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\textcircled{2} x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

...

$$\textcircled{n} x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

3. 방정식 $x^3 = \pm 1$ 의 허근

: 방정식 $x^3 = \pm 1$ 의 허근의 하나를 ω 라고 할 때 다음이 성립한다.

→ 방정식 $x^3 = \pm 1$ 의 두 허근은 방정식 $x^2 \pm x + 1 = 0$ 의 두 근과 같다.

$$1) \omega^3 = \pm 1, \bar{\omega}^3 = \pm 1$$

$$2) \omega^2 \pm \omega + 1 = 0, \bar{\omega}^2 \pm \bar{\omega} + 1 = 0$$

$$3) \omega + \bar{\omega} = \mp 1, \omega \bar{\omega} = 1$$

$$4) \omega + \frac{1}{\omega} = \mp 1, \bar{\omega} + \frac{1}{\bar{\omega}} = \mp 1$$

$$5) \text{ 다른 한 허근} = \omega^2 = \bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$$

→ 방정식 $x^3 = \pm 1$ 에 대한 정보가 나오면 위 관계식을 적절하게 적어 놓고 풀이를 시작할 것!

4. 켈레근의 성질

1) 무리근과 켈레근

유리수 계수 방정식의 한 근이 $p + q\sqrt{m}$ 이면, 다른 한 근은 $p - q\sqrt{m}$ 이다.
(단, p, q 는 유리수, $q \neq 0$, $\sqrt{m}$ 은 무리수)

2) 허근과 켈레근

실계수방정식의 한 근이 $p + qi$ 이면, 다른 한 근은 $p - qi$ 이다.
(단, p, q 는 실수, $q \neq 0$, $i = \sqrt{-1}$)

3) 복이차식 실계수방정식의 켈레근

복이차식 실계수방정식의 한 근이 $p + qi$ 이면 $p - qi$, $-p - qi$, $-p + qi$ 도 근이다.
(단, p, q 는 실수, $q \neq 0$, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 연립방정식을 다루는 기본 태도

1. 변수의 개수와 정보의 개수의 대응관계

1) 연립방정식의 기본 전제

: 변수의 개수 = 등식의 개수

2) 고난도 문제풀이의 구조적 관찰에서...

: 구해야 하는 변수의 개수 = 문제에서 주어진 정보의 개수와 같이 정보와 조건의 1:1 대응 관계를 생각하면 편하다.

3) 개수가 동일하지 않을 때에는...

: 변수의 값을 하나로 특정하지 않아도 될 수도 있다.

2. 연립방정식의 불능과 부정

: 연립방정식 $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ 에 대하여

1) 불능

: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ 이면 해가 존재하지 않는다.

→ 두 직선이 기울기는 같지만 상수항이 다르다.

→ 두 직선이 평행하여 만나지 않는다.

2) 부정

: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ 이면 해가 무수히 많다.

→ 두 직선의 기울기와 상수항이 모두 동일하다.

→ 두 직선은 동일한 직선이므로 완전히 겹쳐진다.

3. 연립의 기본 태도

: 소거법 & 대입법

1) 3원 일차연립방정식의 해법

: 한 문자를 상수 취급하여 연립한다.

2) 이차연립방정식의 해법

(1) 일차 & 이차

: 주어진 일차식을 이용해 한 문자로 치환하여 이차식에 대입

(2) 이차 & 이차

: 인수분해를 통해 정보를 추출하여 “일차 & 이차” 꼴로 변환

(3) 대칭식

: 기본 대칭식 $x+y$ 와 xy 를 각각 새로운 문자 u, v 로 치환

▶ 부정방정식을 다루는 기본 태도

1. 정수근 부정방정식의 해법

1) 인수분해 하여 (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 만든다.

2) (정수)를 소인수 분해하여 각각의 인수에 대응시킨다.

3) 조건/범위에 맞는 경우만을 고려해 가능한 해를 모두 구한다.

2. 실근 부정방정식의 해법

1) $\{f(x)\}^2=0$ 일 때, $f(x)=0$ 임을 이용한다.

2) 한 문자를 기준으로 이차식으로 정리한 후 판별식을 사용한다.

9. 여러 가지 부등식을 다루는 기본 태도

▶ 특수성과 경계에 대한 논리

- 특수성은 문제풀이에서 굉장히 중요한 단서이자 실마리로 사용된다. 또한 특수한 point를 “기준”삼아 경계와 범위를 나누고 사고의 과정을 체계화할 수 있다.

- 부등식에서도 마찬가지이다. 우리가 구해야 하는 것은 부등식으로 표현된 “범위”이지만, 이를 구하기 위해서는 그 “범위”를 나누는 “경계”를 먼저 파악해야 한다. 즉, 부등식으로 표현된 “범위”를 구하기 위해서는 “경계”라는 특수한 지점을 먼저 구해야 하고, 그 “경계”를 구하기 위해서는 방정식으로 접근해야 한다.

▶ 대소 비교의 기본 태도

1. “자”를 이용한 비교

1) $A-B>0$ $\rightarrow A>B$ 2) $A-B=0$ $\rightarrow A=B$ 3) $A-B<0$ $\rightarrow A<B$

2. “몫”을 이용한 비교

1) $\frac{A}{B}>1$ 2) $\frac{A}{B}=1$ 3) $\frac{A}{B}<1$ * 단, $B \neq 0$, B 의 부호에 따른 부등호 방향 주의

▶ 부등식을 다루는 기본 태도

1. 일차 부등식

: $ax>b$ 의 꼴 $\rightarrow a$ 의 부호를 기준으로 경우를 나누어 계산한다.

2. 연립 일차 부등식

1) 수직선의 활용

: 공통범위를 가지적으로 파악하기 편리하다.(선택적)

2) 부등식끼리의 사칙연산

덧셈	뺄셈
$\begin{array}{r} a > b \\ +) \quad c > d \\ \hline a+c > b+d \end{array}$	$\begin{array}{r} a > b \\ -) \quad c > d \\ \hline a-d > b-c \end{array}$
곱셈 (단, 모두 양수!)	나눗셈 (단, 모두 양수!)
$\begin{array}{r} a > b \\ \times) \quad c > d \\ \hline ac > bd \end{array}$	$\begin{array}{r} a > b \\ \div) \quad c > d \\ \hline a \div d > b \div c \end{array}$

3) $A<B<C$ 의 꼴: $A<B$, $B<C$ 꼴로 나누어 계산한다.

3. 이차 부등식

: 이차 방정식의 연장선

4. 연립 이차 부등식

: 각 부등식의 해에 대한 공통범위를 수직선을 통해 파악한다.

▶ 절댓값을 포함한 문제를 다루는 기본 태도

1. 범위의 분할

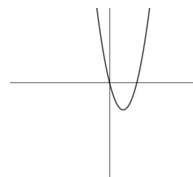
: 절댓값 안의 식의 값이 0이 되도록 범위를 나누어 계산한다.

2. 그래프 활용

: 대칭 & 기울기 변화를 고려할 것!

1) $y=|x-a|$ 2) $y=|x-a|+|x-b|$ ($a<b$)3) $y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ ($a<b<c$)

3. 절댓값을 포함한 함수의 그래프

: $f(x)$ 에 대하여

$y= f(x) $	$y=f(x)$
$ y =f(x)$	$ y =f(x)$