Kice Archive

Ver. 2022

수학Ⅰ + 수학Ⅱ + 미적분

평가원 10개년 고난도 기출문제 백과사전

Contents

[01~14] 2021학년도 대수능

1. $\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

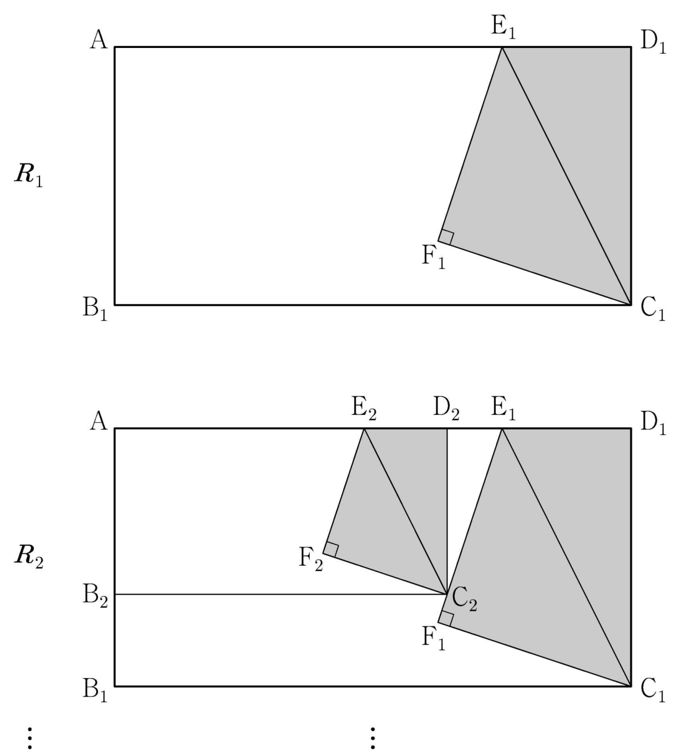
<보 기>

ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

2. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}}=2$, $\overline{\mathrm{AD_1}}=4$인 직사각형 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{AD_1}$을 $3:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_1}$이라 하고, 직사각형 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$의 내부에 점 $\mathrm{F_1}$을 $\overline{\mathrm{F_1E_1}}=\overline{\mathrm{F_1C_1}}$, $\angle \mathrm{E_1F_1C_1}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $\mathrm{E_1F_1C_1}$을 그린다. 사각형 $\mathrm{E_1F_1C_1D_1}$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{AB_1}$위의 점 $\mathrm{B_2}$, 선분 $\mathrm{E_1F_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{AE_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{AB_2}}:\overline{\mathrm{AD_2}}=1:2$인 직사각형 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$에 삼각형 $\mathrm{E_2F_2C_2}$를 그리고 사각형 $\mathrm{E_2F_2C_2D_2}$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



3. $x>0$서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2},\ f(1)=5$$

이다. $x<0$에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$의 값은? [4점]

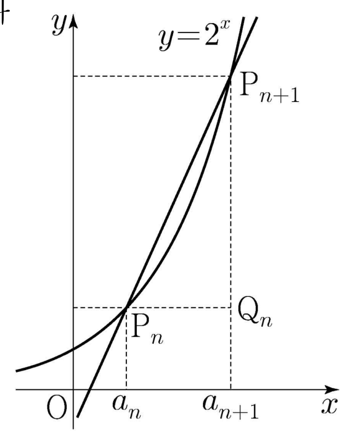
(가) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$이다.
(나) $f(2)+g(-2)=9$

4. 상수 $k(k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고
곡선 $y=2^x$위의 두 점 $P_n(a_n, 2^{a_n})$, $P_{n+1}(a_{n+1}, 2^{a_{n+1}})$을
지나는 직선의 기울기는 $k\times 2^{a_n}$이다.

점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n이라 하고 삼각형 $P_nQ_nP_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 하자.

다음은 $a_1=1$, $\frac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.



두 점 P_n,P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기가 $k\times a_n$이므로

$$2^{a_{n+1}-a_n}=k(a_{n+1}-a_n)+1$$

이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은
방정식 $2^x=kx+1$의 해이다.
$k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이고,
수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.
점 Q_n의 좌표가 $(a_{n+1}, 2^{a_n})$이므로

$$A_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$$

이다. $\frac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 $\boxed{(가)}$이고,
수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=\boxed{(나)}$$

이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+\frac{g(4)}{f(2)}$의 값은? [4점]

5. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$

라 하자. $(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

6. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$ 에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0,\ 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

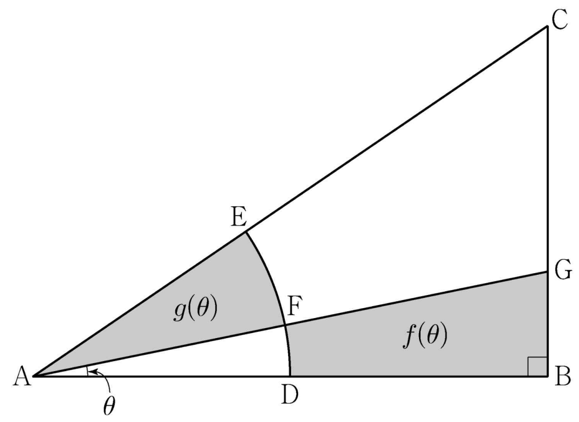
> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1}h(x)dx=2,\ \int_{-1}^{1}xh(x)dx=-\frac{1}{32}$$
> 이다.

7. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

8. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$, $\angle \mathrm{B} = \dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. 호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자. $\angle \mathrm{BAG} = \theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $40 \times \lim_{\theta \to 0+} \dfrac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값을 구하시오. [3점]



9. $\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$의 값이 40이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

10. 두 상수 $a, b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $(x-1)\lvert h(x)\rvert$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) $h'(3)=2$

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x) = f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 < x < 1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2) = a + b\sqrt{2}$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

12. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x} = 3,\ \lim_{x \to 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)} = 2$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x) = f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은?
[4점]

13. 실수 $a(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

14. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)| & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

[15~27] 2021학년도 9월 모의평가

15. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

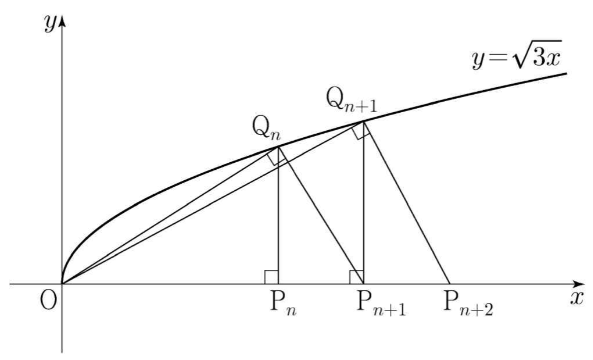
$$f(x)=\ln\left(\frac{\sec x+\tan x}{a}\right)$$

의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=b$일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $a>0$) [4점]

16. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$이므로

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{(가)}$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times(\boxed{(나)})\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

17. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)\,dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $x \le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a) \ge 1$인 실수 a가 존재한다.

18. 함수 $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt \quad (x \ge 0)$$

이 $x=a$에서 극대인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $k^2 < a_6 < (k+1)^2$인 자연수 k의 값은? [4점]

19. 닫힌구간 $[-2\pi,\ 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \sin kx + 2,\ \ g(x) = 3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는? [4점]

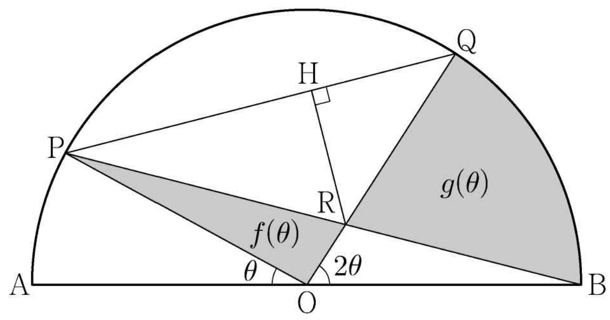
> 실수 a가 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 교점의 y좌표이면
> $\{x \mid f(x) = a\} \subset \{x \mid g(x) = a\}$
> 이다.

20. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3} - S_n = 13 \times 3^{n-1}$$

일 때, a_4의 값을 구하시오. [4점]

21. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{POA} = \theta$, $\angle \mathrm{QOB} = 2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\mathrm{f}(\theta)+\mathrm{g}(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}} = \dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



22. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
> 이 성립한다.

$|M \times m^3| = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

23. $\angle \mathrm{A}=90°$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\log_2 x$, $\overline{\mathrm{AC}}=\log_4 \dfrac{16}{x}$인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값은? (단, $1<x<16$) [4점]

24. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)| \le 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

25. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \geq g(x)$
(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)\,dx$의 값은? [4점]

26. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1} & (a_n \leq a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

27. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1) = f(3) = 0$
> (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x) = 0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x) = |f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0) \times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

[28~38] 2021학년도 6월 모의평가

28. $0 \leq \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2 - (2\sin\theta)x - 3\cos^2\theta - 5\sin\theta + 5 = 0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 하자. $4\beta - 2\alpha$의 값은? [4점]

29. 수열 a_n의 일반항은

$$a_n = (2^{2n}-1)\times 2^{n(n-1)} + (n-1)\times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1)\times 2^{-n} \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m} + (2^{2m+2}-1)\times \boxed{(가)} + m\times 2^{-m-1}$$

$$= \boxed{(가)} \times \boxed{(나)} - \frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$$

$$= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2)\times 2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1)\times 2^{-n}$$

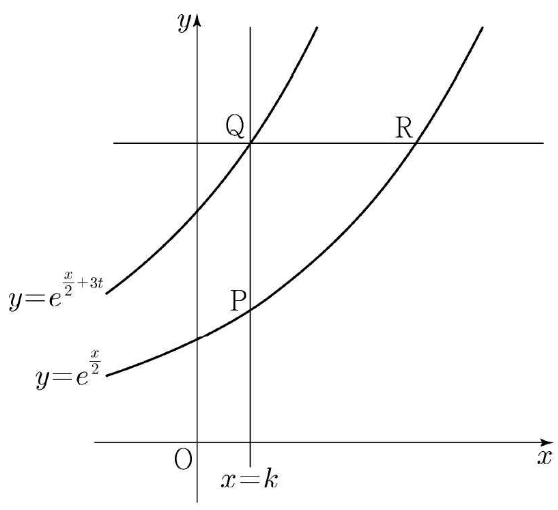
이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{g(7)}{f(3)}$의 값은? [4점]

30. 양수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 값을 $f(t)$라 하자.

직선 $x=k$와 두 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$, $y=e^{\frac{x}{2}+3t}$이 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$과 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{QR}}$이다.

함수 $f(t)$에 대하여 $\lim_{x\to 0+} f(t)$의 값은? [4점]



31. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

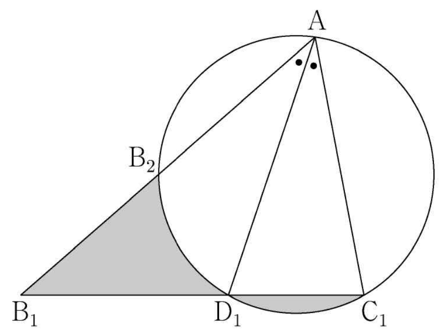
ㄱ. $x_2 > \dfrac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

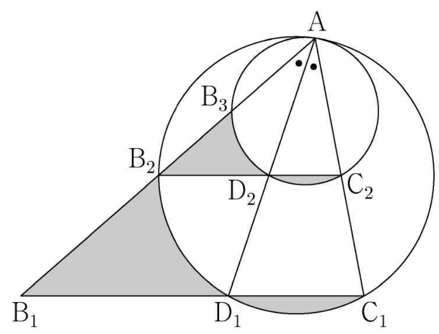
ㄷ. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

32. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}}=3$, $\overline{\mathrm{AC_1}}=2$이고 $\angle \mathrm{B_1AC_1} = \dfrac{\pi}{3}$인 삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$이 있다. $\angle \mathrm{B_1AC_1}$의 이등분선이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{D_1}$, 세 점 A, $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{C_1}$을 지나는 원이 선분 $\mathrm{AB_1}$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 $\mathrm{B_2}$라 할 때, 두 선분 $\mathrm{B_1B_2}$, $\mathrm{B_1D_1}$과 호 $\mathrm{B_2D_1}$로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{C_1D_1}$과 호 $\mathrm{C_1D_1}$로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 $\mathrm{B_2}$를 지나고 직선 $\mathrm{B_1C_1}$에 평행한 직선이 두 선분 $\mathrm{AD_1}$, $\mathrm{AC_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{C_2}$라 하자.
세 점 A, $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{C_2}$를 지나는 원이 선분 $\mathrm{AB_2}$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 $\mathrm{B_3}$이라 할 때, 두 선분 $\mathrm{B_2B_3}$, $\mathrm{B_2D_2}$와 호 $\mathrm{B_3D_2}$로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{C_2D_2}$와 호 $\mathrm{C_2D_2}$로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

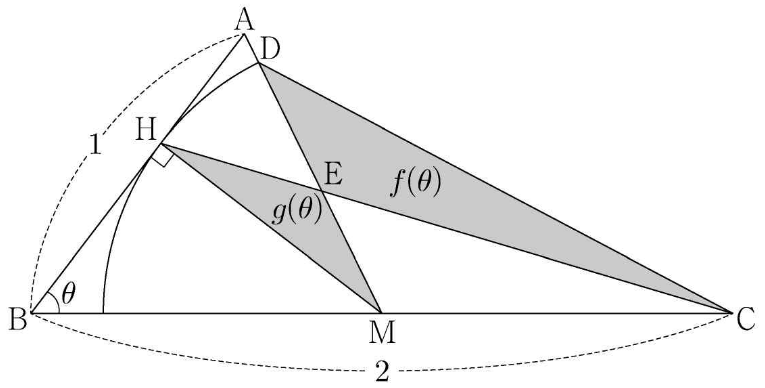
33. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? [4점]

34. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k = -16$, $S_{k+2} = -12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오. [4점]

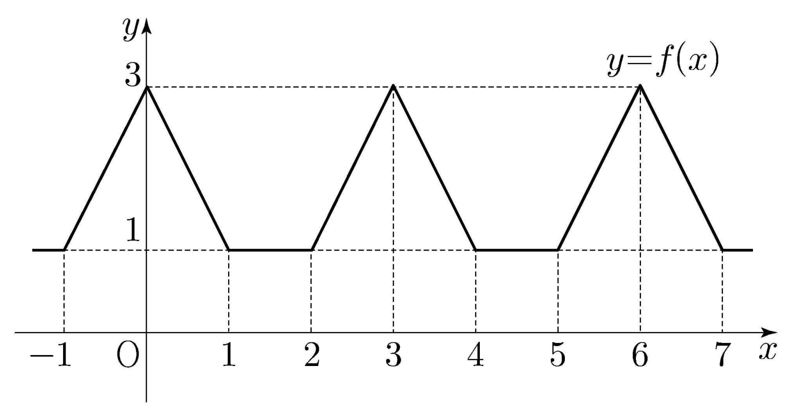
35. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{MH}$인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자. $\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



36. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0\le x<3$일 때 $f(x)=|x-1|+|x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h\to0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5,5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (n은 자연수)라 할 때, $n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln2}$의 값을 구하시오. [4점]



37. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2 + 7n$$

을 만족시킨다. $a_5 \times a_7 \times a_9 = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

38. 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ g(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.
> (나) 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

[39~48] 2022학년도 예비평가

39. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖고,
> 이 세 실근은 크기 순서대로 등비수열을 이룬다.

$f(0)=1$, $f'(2)=-2$일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

40. $0<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_a^b (x^2-3x+k)dx>0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

41. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 가속도가

$$a(t)=3t^2-12t+9\ (t\ge 0)$$

이고, 시각 $t=0$에서의 속도가 k일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 구간 $(3, \infty)$에서 점 P의 속도는 증가한다.
ㄴ. $k=-4$이면 구간 $(0, \infty)$에서 점 P의 운동 방향이 두 번 바뀐다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 시각 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하는 k의 최솟값은 0이다.

42. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

(가) $a_5=5$
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-6 & (a_n\ge 0) \\ -2a_n+3 & (a_n<0) \end{cases}$$

이다.

43. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

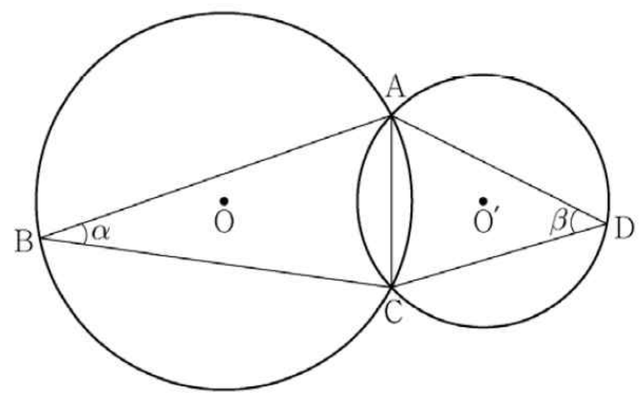
$$a_3+a_5=0,\ \sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$$

일 때, a_9의 값을 구하시오. [4점]

44. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle\mathrm{ABC}=\alpha$, $\angle\mathrm{ADC}=\beta$라 할 때,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2},\quad \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3},\quad \overline{\mathrm{OO'}}=1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



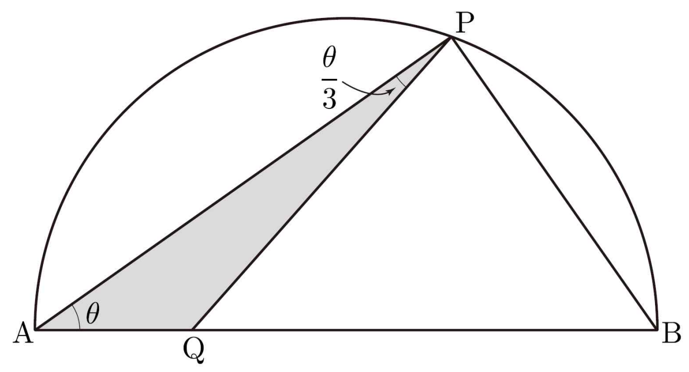
45. 함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.
> (나) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

46. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있고, 선분 AB 위에 점 Q가 있다. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$이고 $\angle\mathrm{APQ}=\dfrac{\theta}{3}$일 때, 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 PB의 길이를 $l(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{l(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$) [4점]



47. 함수 $f(x)=e^x+x-1$과 양수 t에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x \{t-f(s)\}ds$$

가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 α의 값을 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$의 값을 구하시오. [4점]

48. 두 양수 a, $b\,(b<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax & (x \le 0) \\ \dfrac{\ln(x+b)}{x} & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$이라 할 때, 함수 $g(m)$은 다음 조건을 만족시킨다.

> $\lim\limits_{m\to\alpha-} g(m) - \lim\limits_{m\to\alpha+} g(m) = 1$을 만족시키는 양수 α가 오직 하나 존재하고, 이 α에 대하여 점 $(b,\ f(b))$는 직선 $y=\alpha x$와 곡선 $y=f(x)$의 교점이다.

$ab^2=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이다.) [4점]

[49~60] 2020학년도 대수능

49. 지수함수 $y=a^x$ $(a>1)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점을 A라 하자. 점 B(4, 0)에 대하여 직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [4점]

50. 실수 t에 대하여 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 할 때, 함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여 $\int_a^b g(t)\,dt=m$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

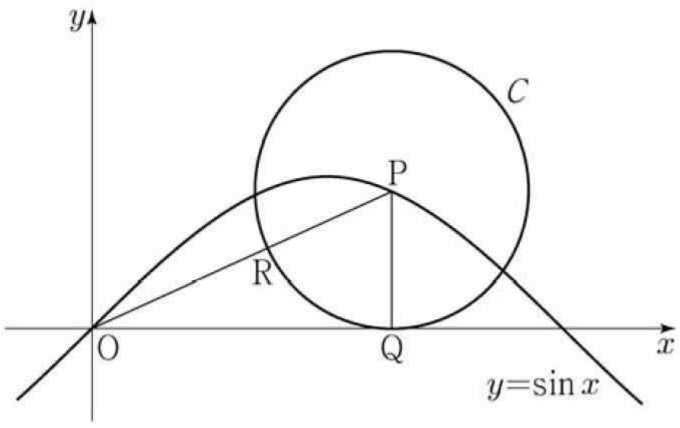
<보 기>

ㄱ. $m<0$ 이 되도록 하는 두 실수 a , b $(a<b)$가 존재한다.

ㄴ. 실수 c 에 대하여 $g(c)=0$ 이면 $g(-c)=0$이다.

ㄷ. $a=\alpha$, $b=\beta$ $(\alpha<\beta)$일 때 m의 값이 최소이면 $\dfrac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}<-e^2$이다.

51. 좌표평면에서 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ $(0<t<\pi)$를 중심으로 하고 x축에 접하는 원을 C라 하자. 원 C가 x축에 접하는 점을 Q, 선분 OP와 만나는 점을 R라 하자. $\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OR}}}=a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a, b는 정수이다.) [3점]



52. 함수 $f(x)=(x^2+2)e^{-x}$에 대하여 함수 $g(x)$가 미분가능하고

$$g\left(\frac{x+8}{10}\right)=f^{-1}(x), \qquad g(1)=0$$

을 만족시킬 때, $|g'(1)|$의 값을 구하시오. [4점]

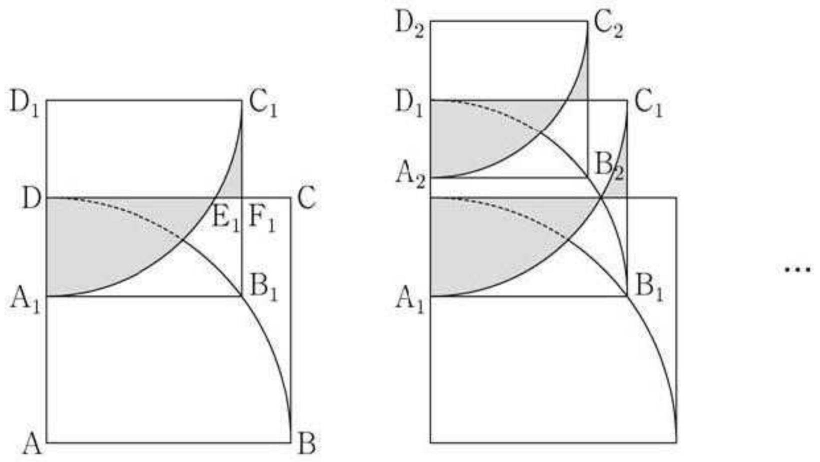
53. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

54. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은? [4점]

55. 자연수 n의 양의 약수의 개수를 $f(n)$이라 하고, 36의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_9라 하자.

$\sum_{k=1}^{9}\left\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\right\}$의 값은? [4점]

56. 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD에 중심이 A이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 ABD를 그린다. 선분 AD를 3 : 2로 내분하는 점을 $\mathrm{A_1}$, 점 $\mathrm{A_1}$을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 BD 와 만나는 점을 $\mathrm{B_1}$이라 하자.
선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 한 변으로 하고 선분 DC와 만나도록 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$을 그린 후, 중심이 $\mathrm{D_1}$이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $\mathrm{D_1A_1C_1}$을 그린다. 선분 DC가 호 $\mathrm{A_1C_1}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$이라 하고, 두 선분 $\mathrm{DA_1}$, $\mathrm{DE_1}$과 호 $\mathrm{A_1E_1}$로 둘러싸인 부분과 두 선분 $\mathrm{E_1F_1}$, $\mathrm{F_1C_1}$과 호 $\mathrm{E_1C_1}$로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에 중심이 $\mathrm{A_1}$이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $\mathrm{A_1B_1D_1}$을 그린다. 선분 $\mathrm{A_1D_1}$을 3 : 2로 내분하는 점을 $\mathrm{A_2}$, 점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 호 $\mathrm{B_1D_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{A_2B_2}$를 한 변으로 하고 선분 $\mathrm{D_1C_1}$과 만나도록 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그린 후, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 …

57. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x & (x \le 0) \\ x-1 & (0 < x \le 2) \\ 2x-3 & (x > 2) \end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.

ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

58. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$

(나) $a_{2n+1}=2a_n+1$

$a_{20}=1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은? [4점]

59. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\int_1^x f(t)\,dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}\text{이다.}$$
> (나) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=5\int_{-1}^1 xf(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

60. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

[61~69] 2020학년도 9월 모의평가

61. 함수 $y=e^x$의 그래프 위의 x좌표가 양수인 점 A와 함수 $y=-\ln x$의 그래프 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{OB}}$
> (나) $\angle \mathrm{AOB}=90°$

직선 OA의 기울기는? (단, O는 원점이다.) [4점]

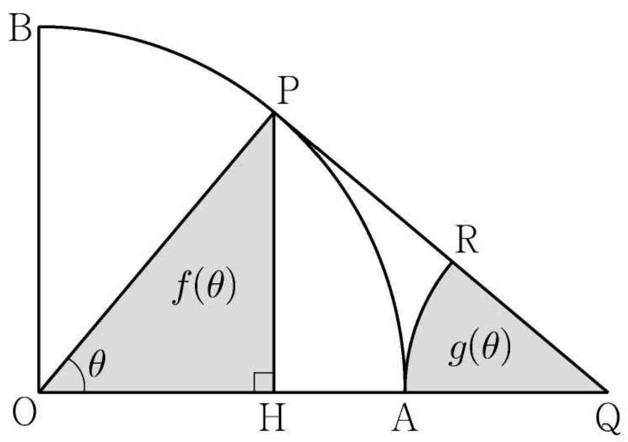
62. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x^4-1$이다.
> (나) $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)\,dx=120$

$\int_{-1}^{1}x^3 f(x)\,dx$의 값은? [4점]

63. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OA의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{QA}}$인 원과 선분 PQ의 교점을 R라 하자. $\angle\mathrm{POA}=\theta$일 때, 삼각형 OHP의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 QRA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



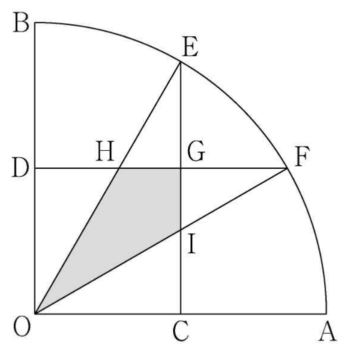
64. 함수 $f(x)=3\sin kx+4x^3$의 그래프가 오직 하나의 변곡점을 가지도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

65. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

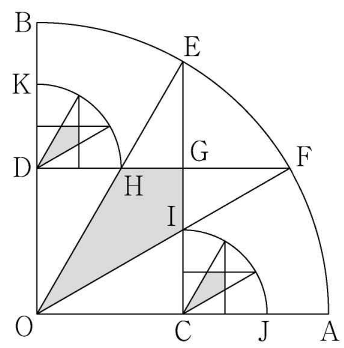
$$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하시오. [4점]

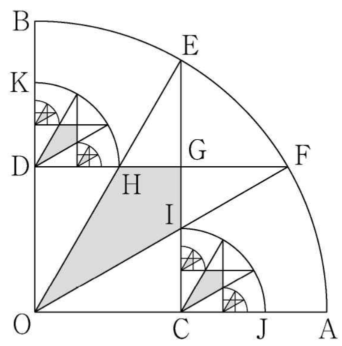
66. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OAB가있다. 선분 OA의 중점을 C, 선분 OB의 중점을 D라 하자. 점 C를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 E, 점 D를 지나고 선분 OA와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 F라 하자.
선분 CE와 선분 DF가 만나는 점을 G, 선분 OE와 선분 DG가 만나는 점을 H, 선분 OF와 선분 CG가 만나는 점을 I라 하자. 사각형 OIGH를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 중심이 C, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{CI}}$, 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 CJI와 중심이 D, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{DH}}$, 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 DHK를 그린다. 두 부채꼴 CJI, DHK에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3

⋯

67. 함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)\,dx=-1$이다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

68. 네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

(가) $3^a=5^b=k^c$

(나) $\log c=\log(2ab)-\log(2a+b)$

69. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 점 $(k,\ 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

[70~81] 2020학년도 6월 모의평가

70. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 (x,y)가

$$x=2\sqrt{t+1},\ y=t-\ln(t+1)$$

이다. 점 P의 속력의 최솟값은? [4점]

71. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 각 젆 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)\cos x}{e^x}$$

라 하자. $g'(\pi)=e^{\pi}g(\pi)$일 때, $\dfrac{f'(\pi)}{f(\pi)}$의 값은? [4점]

72. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)>0$
(나) $\ln f(x)+2\int_{2}^{x}(x-t)f(t)dt=0$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

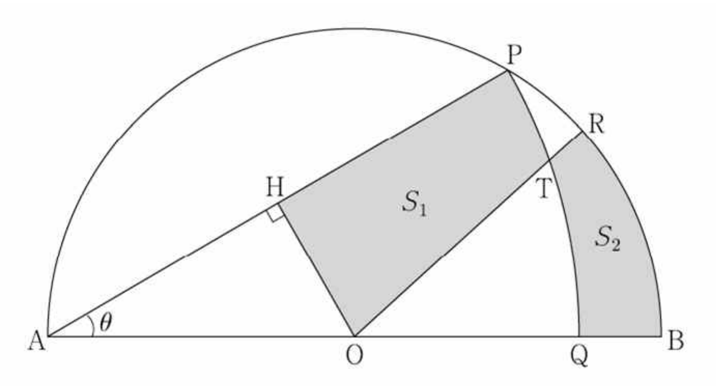
ㄱ. $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$라 할 때, $f(1)+\{F(1)\}^2=1$이다.

73. 함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은? [4점]

74. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 중심이 A이고, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AP}}$인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.
호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 3:7이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자. 세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 할 때,
$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S_1-S_2}{\overline{OH}}=a$ 이다. $50a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



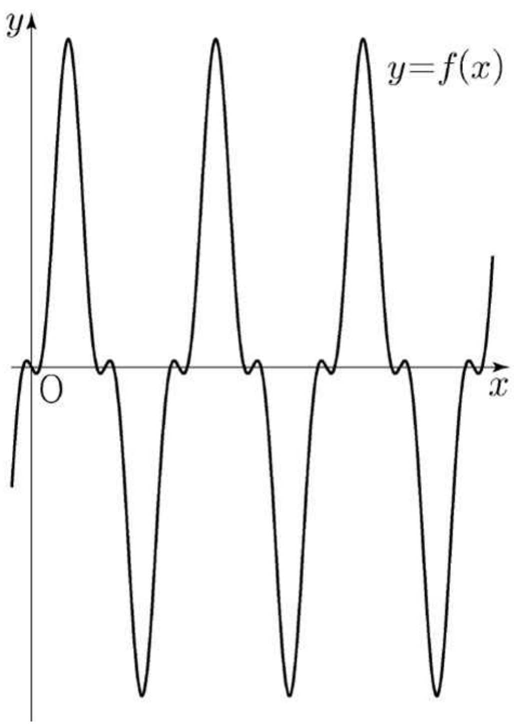
75. 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin^3 x+b\sin x$가

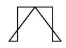
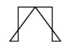
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$$

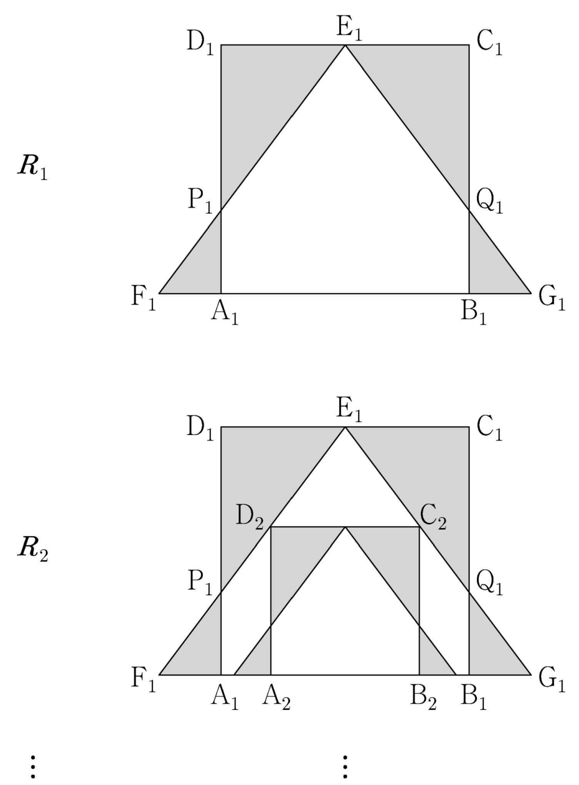
을 만족시킨다. 실수 $t(1<t<14)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n 이라 하고

$$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_n)}dt$$

라 하자. $\sum_{n=1}^{101}c_n=p+q\sqrt{2}$일 때, $q-p$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



76. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 C_1D_1의 중점을 E_1이라 하고, 직선 A_1B_1 위에 두 점 F_1, G_1을 $\overline{E_1F_1}=\overline{E_1G_1}$, $\overline{E_1F_1}:\overline{F_1G_1}=5:6$이 되도록 잡고 이등변삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다. 선분 D_1A_1과 선분 E_1F_1의 교점을 P_1, 선분 B_1C_1과 선분 G_1E_1의 교점을 Q_1이라 할 때, 네 삼각형 $E_1D_1P_1$, $P_1F_1A_1$, $Q_1B_1G_1$, $E_1Q_1C_1$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 F_1G_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 G_1E_1 위의 점 C_2, 선분 E_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



77. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$

ㄴ. $g(1)<\frac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\frac{5}{2}$이다.

78. 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

> $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$ 인 자연수 n이 존재한다.

79. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

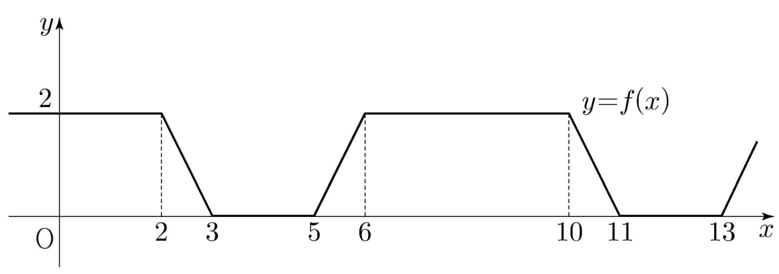
(가) $f(x)=\begin{cases} 2 & (0 \le x < 2) \\ -2x+6 & (2 \le x < 3) \\ 0 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=f(x)$이고 $f(x)=f(x-8)$이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}+n & (x \ne 0) \\ n & (x=0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $(f \circ g)(x)$가 상수함수가 되도록 하는 60 이하의 자연수 n의 개수는? [4점]



80. 첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오. [4점]

(가) $4 < a_2 + a_3 \le 12$

(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = 122$

81. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

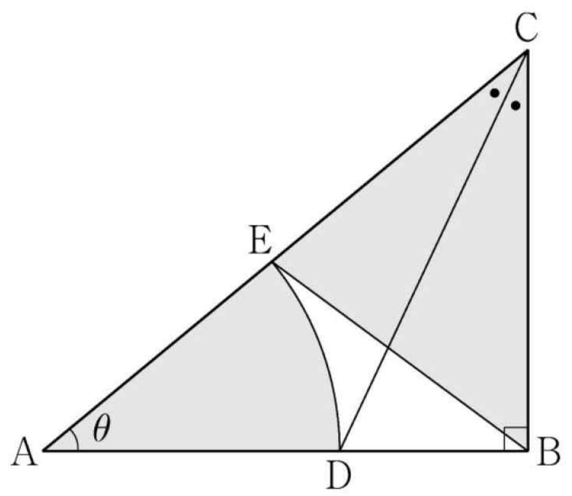
> 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid t=-1$ 또는 $t \geq 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

[82~91] 2019학년도 대수능

82. $x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 다하여 $2f(x)+\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$을 만족시킬 때, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$ 의 값은? [4점]

83. 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{C}$를 이등분하는 직선과 선분 AB의 교점을 D, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AD}}$인 원과 선분 AC의 교점을 E라 하자. $\angle\mathrm{A}=\theta$일 때, 부채꼴 ADE의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$의 값은? [4점]



84. 점 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$에서 곡선 $y=\sin x\ (x>0)$에 접선을 그어 접점의 x좌표를 작은 수부터 크기 순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $\tan a_n = a_n + \dfrac{\pi}{2}$

ㄴ. $\tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$

ㄷ. $a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$

85. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. 이 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $2\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$이다.
> (나) $f\left(-\frac{1}{8}\right)=1,\ f(6)=2$

86. 최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x) = \dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$ 이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \cdots$라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\alpha_1 = 0$이고 $g(\alpha_1) = \dfrac{2}{5}$이다.
> (나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)} = \dfrac{1}{g(\alpha_2)} + \dfrac{1}{2}$

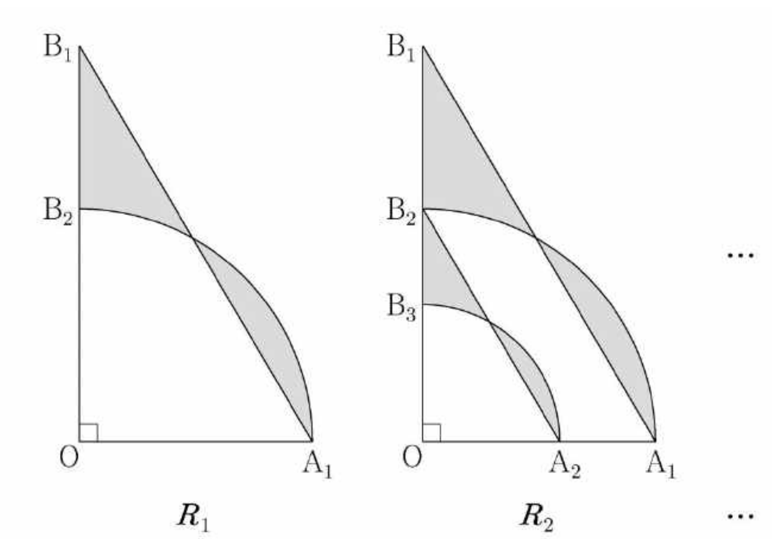
$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } 0 < f(0) < \dfrac{\pi}{2}\right)$ [4점]

87. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA_1}} = 4$, $\overline{\mathrm{OB_1}} = 4\sqrt{3}$ 인 직각삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$이 있다. 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OA_1}}$인 원이 선분 $\mathrm{OB_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_2}$의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 $\mathrm{B_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 선분 $\mathrm{OA_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OA_2}}$인 원이 선분 $\mathrm{OB_2}$와 만나는 점을 $\mathrm{B_3}$이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA_2B_2}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{OA_2B_3}$의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [4점]



88. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = f(x-3) + 4$이다.
>
> (나) $\int_0^6 f(x)\,dx = 0$

함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

89. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
> (나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? [4점]

90. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$
> (나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$
> (다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

91. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선은 모두 x축이다.
> (나) 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.
> (다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x > 0$인 모든 실수 x에 대하여

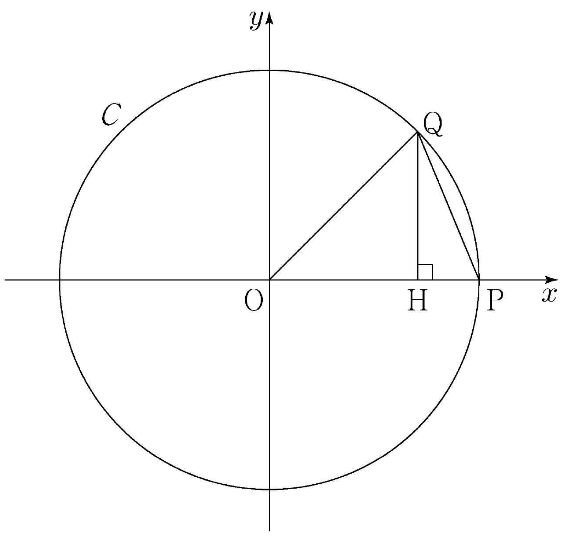
$$g(x) \le kx-2 \le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

[92~102] 2019학년도 9월 모의평가

92. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

93. 자연수 n에 대하여 중심이 원점 O이고 점 $\mathrm{P}(2^n,\ 0)$을 지나는 원 C가 있다. 원 C 위에 점 Q를 호 PQ의 길이가 π가 되도록 잡는다. 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{HP}})$의 값은? [4점]



94. 열린 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos x+2x\sin x$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가진다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha<\beta$) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\tan(\alpha+\pi)=-2\alpha$

ㄴ. $g(x)=\tan x$라 할 때, $g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$이다.

ㄷ. $\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}<\sec^2\alpha$

95. 0이 아닌 세 정수 l, m, n이 $|l|+|m|+|n|\le 10$을 만족시킨다. $0\le x\le \frac{3}{2}\pi$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$이고

$$f'(x)=\begin{cases} l\cos x & \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \\ m\cos x & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right) \\ n\cos x & \left(\pi<x<\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$의 값이 최대가 되도록 하는 l, m, n에 대하여 $l+2m+3n$의 값은? [4점]

96. 미분가능한 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\sin x$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ (g\circ f)(1))$에서의 접선이 원점을 지난다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}=k$$

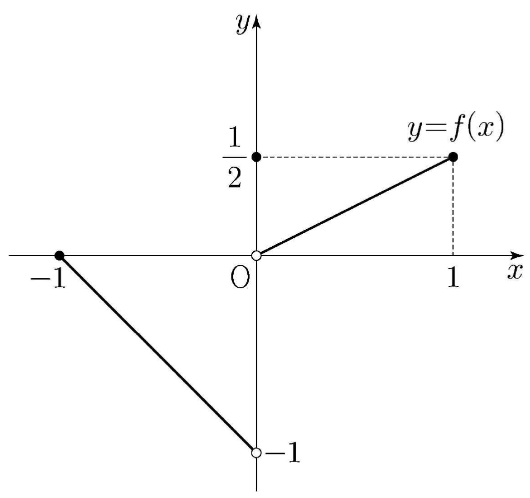
일 때, 상수 k에 대하여 $30k^2$의 값을 구하시오. [4점]

97. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
> (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
> (다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$) [4점]

98. 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가

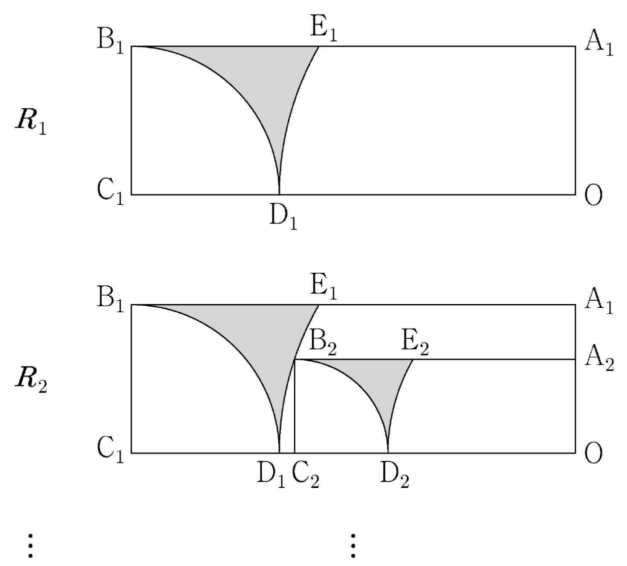
$$g(x)=f(x)+|f(x)|,\ h(x)=f(x)+f(-x)$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0} g(x)=0$
ㄴ. 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

99. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=3$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}}=1$ 인 직사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$ 이 있다. 중심이 $\mathrm{C_1}$ 이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{B_1C_1}}$ 인 원과 선분 $\mathrm{OC_1}$ 의 교점을 $\mathrm{D_1}$, 중심이 O 이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OD_1}}$ 인 원과 선분 $\mathrm{A_1B_1}$ 의 교점을 $\mathrm{E_1}$ 이라 하자. 직사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$ 에 호 $\mathrm{B_1D_1}$, 호 $\mathrm{D_1E_1}$, 선분 $\mathrm{B_1E_1}$ 로 둘러싸인 ◸ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에 선분 $\mathrm{OA_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$ 와 호 $\mathrm{D_1E_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 선분 $\mathrm{OD_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$ 와 점 O 를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}:\overline{\mathrm{B_2C_2}}=3:1$ 인 직사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$ 에 ◸ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 의 값은? [4점]



100. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$ 에 대하여 $x\ge 0$ 에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

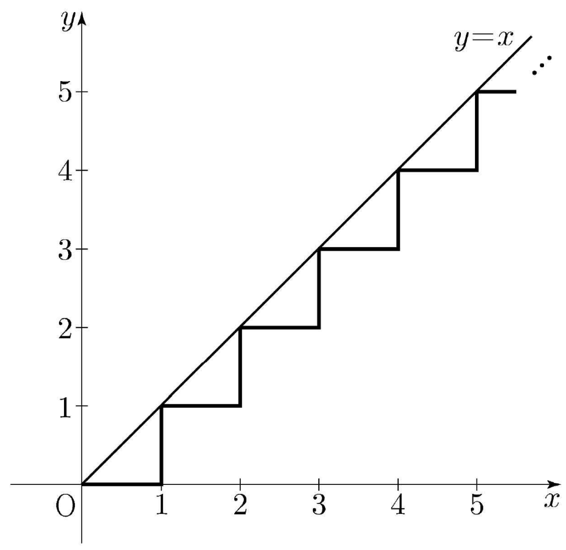
(가) $0<x<1$ 에서 $g(x)=c_1$ (c_1 은 상수)
(나) $1<x<5$ 에서 $g(x)$ 는 감소한다.
(다) $x>5$ 에서 $g(x)=c_2$ (c_2 는 상수)

$f(\sqrt{2})$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

101. 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

> (i) A_0은 원점이다.
> (ii) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\dfrac{2n-1}{25}$ 만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{4}{25},\ 0\right)$, $\left(1,\ \dfrac{11}{25}\right)$이다.
자연수 n에 대하여 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하시오. [4점]



102. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f\circ f)(x)=x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b이다.

$$f'(1)<0,\ f'(2)<0,\ f'(0)-f'(1)=6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1<a<2<b$) [4점]

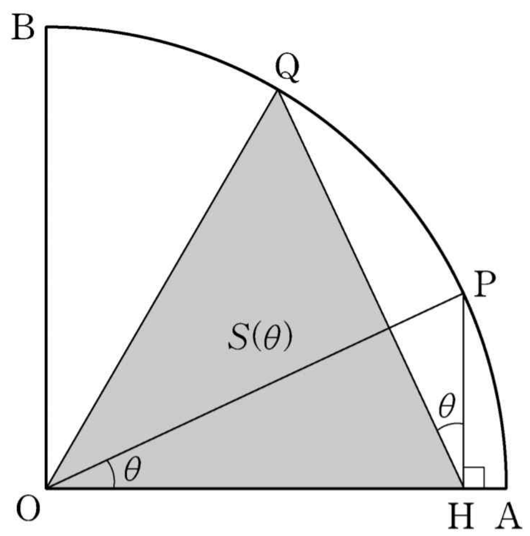
[103~112] 2019학년도 6월 모의평가

103. 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$) [4점]

104. 함수 $f(x)=a\cos(\pi x^2)$에 대하여

$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1} f(t)dt\right\}=3$일 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

105. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, 호 BP 위에 점 Q를 $\angle\mathrm{POH}=\angle\mathrm{PHQ}$가 되도록 잡는다. $\angle\mathrm{POH}=\theta$일 때, 삼각형 OHQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]



106. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}2\sin^3x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right)\\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h\circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은? [4점]

(가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$

(나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

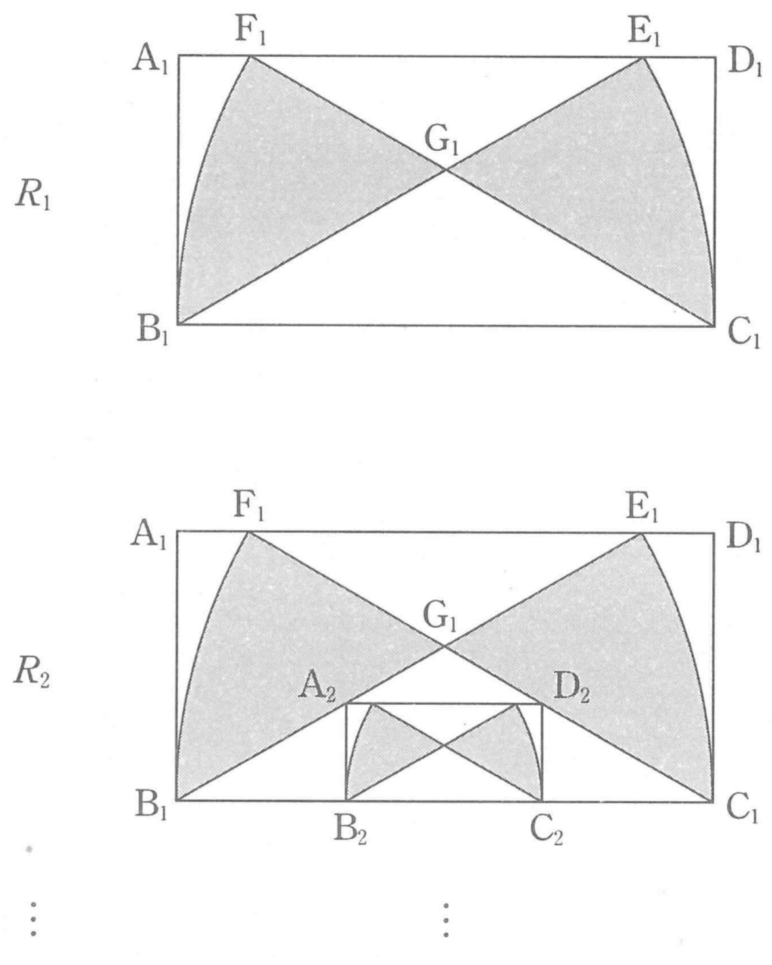
107. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 모든 실수 t에 대하여 $(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$이고, $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{\ln 10}{4}$, $f(1)=4+\frac{\ln 17}{8}$일 때, $2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

108. 함수 $f(x)=ax^2+b$ 가 모든 실수 x에 대하여

$$4f(x)=\{f'(x)\}^2+x^2+4$$

를 만족시킨다. $f(2)$ 의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

109. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1 위의 $\overline{B_1C_1}=\overline{B_1E_1}$, $\overline{C_1B_1}=\overline{C_1F_1}$인 두 점 E_1, F_1에 대하여 중심이 B_1 인 부채꼴 $B_1E_1C_1$과 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1F_1B_1$을 각각 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 내부에 그리고, 선분 B_1E_1과 C_1F_1의 교점을 G_1이라 하자.
두 선분 G_1F_1, G_1B_1과 호 F_1B_1로 둘러싸인 부분과 두 선분 G_1E_1, G_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 선분 C_1G_1 위의 점 D_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고, $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 내부에 ⋈ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



110. 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(-1)>-1$
> (나) $f(1)-f(-1)>8$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. $-1<x<1$일 때, $f'(x)\geq 0$이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 4이다.

111. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\dfrac{5}{2}x & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

112. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여

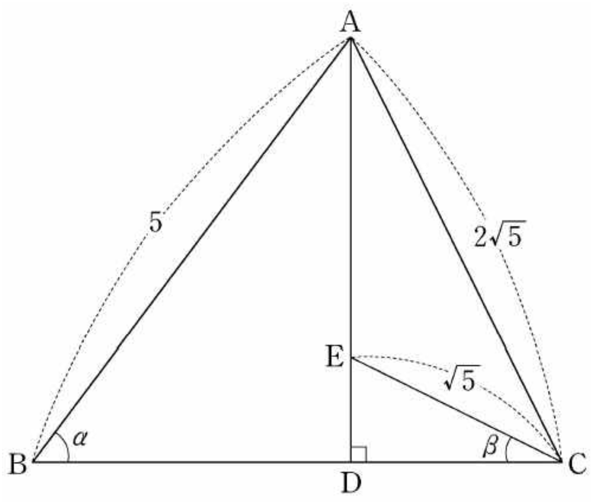
$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=f(n)f(n+1) \text{이다.}$$

(나) $n=3$, 4일 때, $f(x)$에서 x의 값이 n에서 $n+2$까지 변할 때의 평균변화율은 <u>양수가 아니다.</u>

$128 \times f\left(\dfrac{5}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

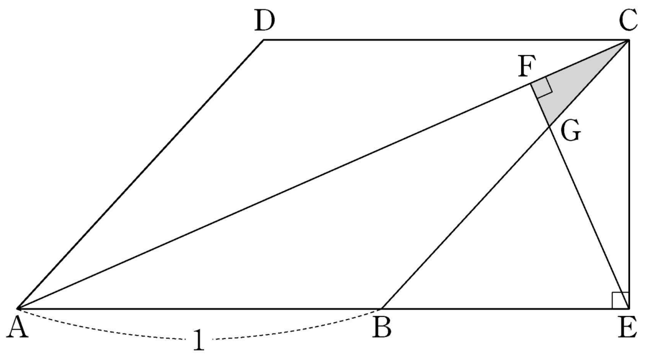
[113~122] 2018학년도 대수능

113. 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{\mathrm{EC}}=\sqrt{5}$이다. $\angle\mathrm{ABD}=\alpha$, $\angle\mathrm{DCE}=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은? [4점]



114. 함수 $f(x)$가 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt$일 때, $(f\circ f)(a)=\ln 5$를 만족시키는 실수 a의 값은? [4점]

115. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD가 있다. 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F 선분 EF와 선분 BC의 교점을 G라 하자. $\angle \mathrm{DAB} = \theta$일 때, 삼각형 CFG의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$) [4점]



116. 양수 t에 대하여 구간 $[1,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & (1 \le x < e) \\ -t + \ln x & (x \ge e) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y = g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a) = \dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\dfrac{1}{2e}\right) \times h'(a)$의 값은? [4점]

117. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x-t| & (|x-t|\le 1) \\ 0 & (|x-t|>1) \end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점]

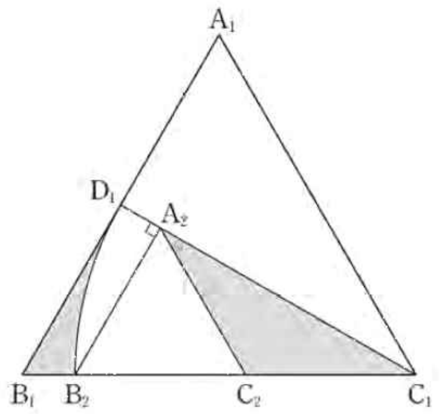
118. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$$

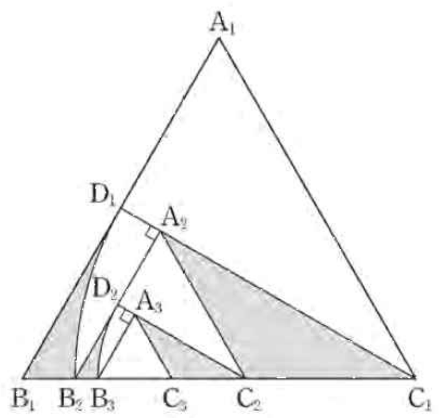
을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

119. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 A_1B_1의 중점을 D_1이라 하고, 선분 B_1C_1 위의 $\overline{C_1D_1}=\overline{C_1B_2}$인 점 B_2에 대하여 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1D_1B_2$를 그린다. 점 B_2에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 A_2, 선분 C_1B_2의 중점을 C_2라 하자. 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_1A_2C_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 A_2B_2의 중점을 D_2라 하고, 선분 B_2C_2 위의 $\overline{C_2D_2}=\overline{C_2B_3}$인 점 B_3에 대하여 중심이 C_2인 부채꼴 $C_2D_2B_3$을 그린다. 점 B_3에서 선분 C_2D_2에 내린 수선의 발을 A_3, 선분 C_2B_3의 중점을 C_3이라 하자. 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 D_2B_3으로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_2A_3C_3$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

120. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(0)=0$, $f'(2)=16$
> (나) 어떤 양수 k에 대하여 두 열린 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, k)$에서 $f'(x)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 것을 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $f(0)=0$이면, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq -\frac{1}{3}$이다.

121. 두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le a) \\ (x-1)^2(2x+1) & (x > a) \end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (x \le k) \\ 12(x-k) & (x > k) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

122. 이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다. (나) $n \le x < n+1$일 때, $g(x)=\dfrac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$ 이다. (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 $k\,(k \ge 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

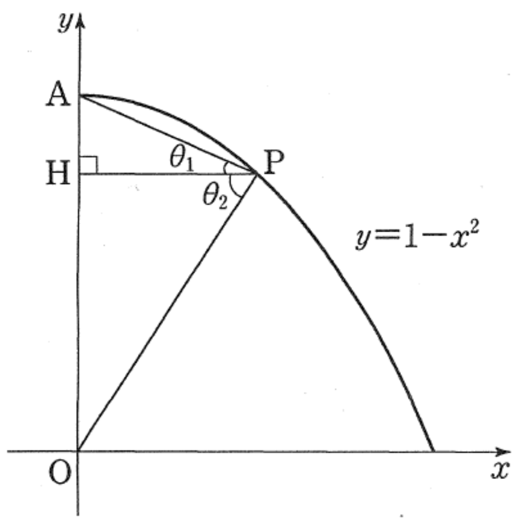
$$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x-g(x) & (5 \le x < k) \end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\displaystyle\int_0^n h(x)dx$라 할 때,

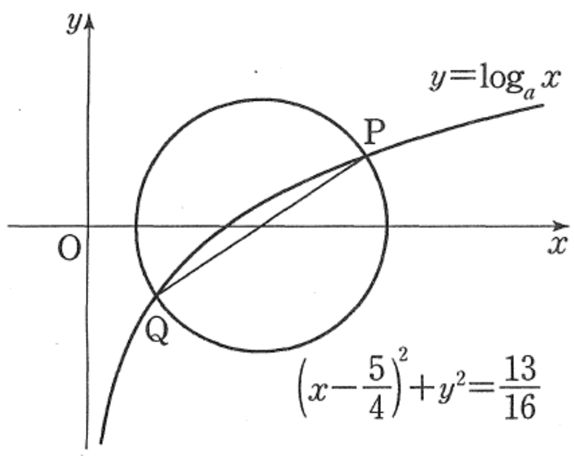
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2a_n-n^2\right)=\dfrac{241}{768}$이다. k의 값을 구하시오. [4점]

[123~133] 2018학년도 9월 모의평가

123. 곡선 $y=1-x^2$ $(0<x<1)$ 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원점 O와 점 A$(0,\ 1)$에 대하여 $\angle \mathrm{APH}=\theta_1$, $\angle \mathrm{HPO}=\theta_2$라 하자. $\tan\theta_1=\dfrac{1}{2}$일 때, $\tan(\theta_1+\theta_2)$의 값은? [4점]



124. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C:\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은? [4점]



125. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ $(t>0)$에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자. 모든 양수 t에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^{t})$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

126. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=-1,\ a_n=2-\frac{1}{2^{n-2}}\ \ (n\geq 2)$$

이다. 구간 $[-1,\ 2)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$f(x)=\sin(2^n\pi x)\ \ (a_n\leq x\leq a_{n+1})$$

이다. $-1<\alpha<0$인 실수 α에 대하여 $\int_{\alpha}^{t}f(x)dx=0$을 만족시키는 $t\,(0<t<2)$의 값의 개수가 103일 때, $\log_2(1-\cos(2\pi\alpha))$의 값은? [4점]

127. 함수 $f(x)=\ln(e^x+1)+2e^x$에 대하여 이차함수 $g(x)$와 실수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $h(x)=|g(x)-f(x-k)|$는 $x=k$에서 최솟값 $g(k)$를 갖고, 닫힌구간 $[k-1,\ k+1]$에서 최댓값 $2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다.

$g'\left(k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. (단, $\frac{5}{2}<e<3$이다.) [4점]

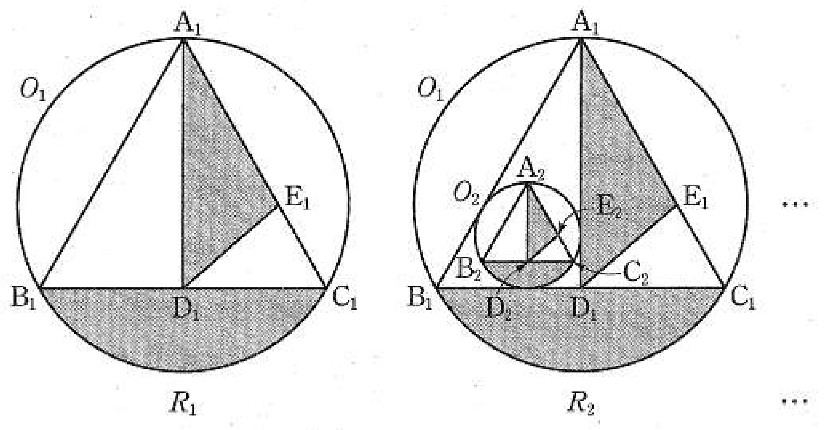
128. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여

$x<0$일 때, $f(x)+g(x)=x^2+4$

$x>0$일 때, $f(x)-g(x)=x^2+2x+8$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $\lim_{x\to 0-}g(x)-\lim_{x\to 0+}g(x)=6$ 일 때, $f(0)$의 값은? [4점]

129. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. 점 $\mathrm{A_1}$에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 선분 $\mathrm{A_1C_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_1}$이라 하자. 점 $\mathrm{A_1}$을 포함하지 않는 호 $\mathrm{B_1C_1}$과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $\mathrm{A_1D_1E_1}$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 삼각형 $\mathrm{A_1B_1D_1}$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$를 그리고, 점 $\mathrm{A_2}$에서 선분 $\mathrm{B_2C_2}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{D_2}$, 선분 $\mathrm{A_2C_2}$를 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_2}$라 하자. 점 $\mathrm{A_2}$를 포함하지 않는 호 $\mathrm{B_2C_2}$와 선분 $\mathrm{B_2C_2}$로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $\mathrm{A_2D_2E_2}$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



130. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 $a_1=a_2=1$, $b_1=k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=(a_{n+1})^2-(a_n)^2, \qquad b_{n+1}=a_n-b_n+n$$

을 만족시킨다. $b_{20}=14$일 때, k의 값은? [4점]

131. 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.
ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.
ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

132. 두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

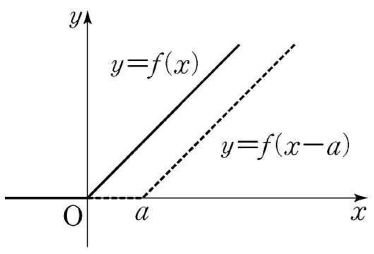
133. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

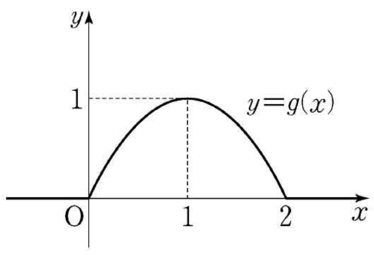
$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ x & (x>0) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} x(2-x) & (|x-1| \le 1) \\ 0 & (|x-1|>1) \end{cases}$$

이다. 양의 실수 k, a, b $(a<b<2)$에 대하여, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$$

라 정의하자. 모든 실수 x에 대하여 $0 \le h(x) \le g(x)$일 때, $\int_0^2 \{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b에 대하여 $60(k+a+b)$의 값을 구하시오. [4점]





[134~144] 2018학년도 6월 모의평가

134. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2+k & (x \le 2) \\ \ln(x-2) & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 직선 $y=x+t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 한 개일 때, k의 값은? [4점]

135. 좌표평면에서 점 P는 시각 $t=0$일 때 $(0,\ -1)$에서 출발하여 시각 t에서의 속도가

$$(2t,\ 2\pi\sin 2\pi t)$$

이고, 점 Q는 시각 $t=0$일 때 출발하여 시각 t에서의 위치가

$$\mathrm{Q}(4\sin 2\pi t,\ |\cos 2\pi t|)$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q가 만나는 횟수는? [4점]

136. 양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^{x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

(가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.

(나) 구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

137. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x) = \ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

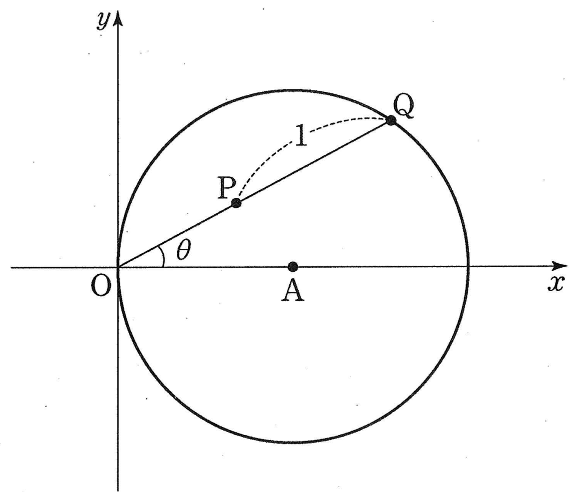
$$G(x) = \ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x) = 3,\ \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{1}{4}$$

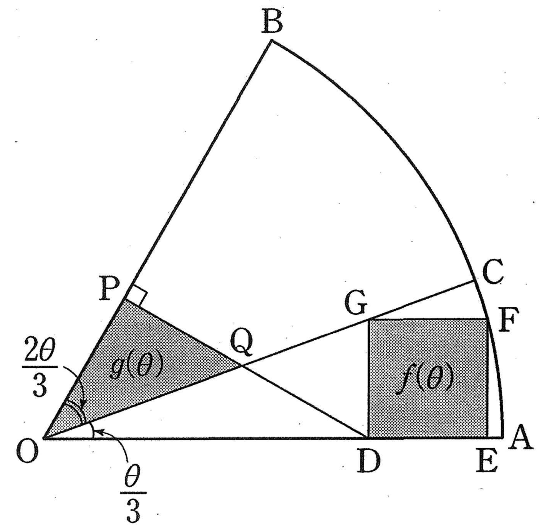
일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? [4점]

138. 그림과 같이 좌표평면에 점 $A(1,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 원 위의 점 Q에 대하여 $\angle AOQ = \theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right)$라 할 때, 선분 OQ 위에 $\overline{PQ} = 1$인 점 P를 정한다. 점 P의 y좌표가 최대가 될 때 $\cos\theta = \frac{a+\sqrt{b}}{8}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 자연수이다.) [4점]



139. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = k$일 때, $60k$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고, $\overline{OD} < \overline{OE}$이다.) [4점]



140. 실수 a와 함수 $f(x) = \ln(x^4+1) - c$ ($c > 0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

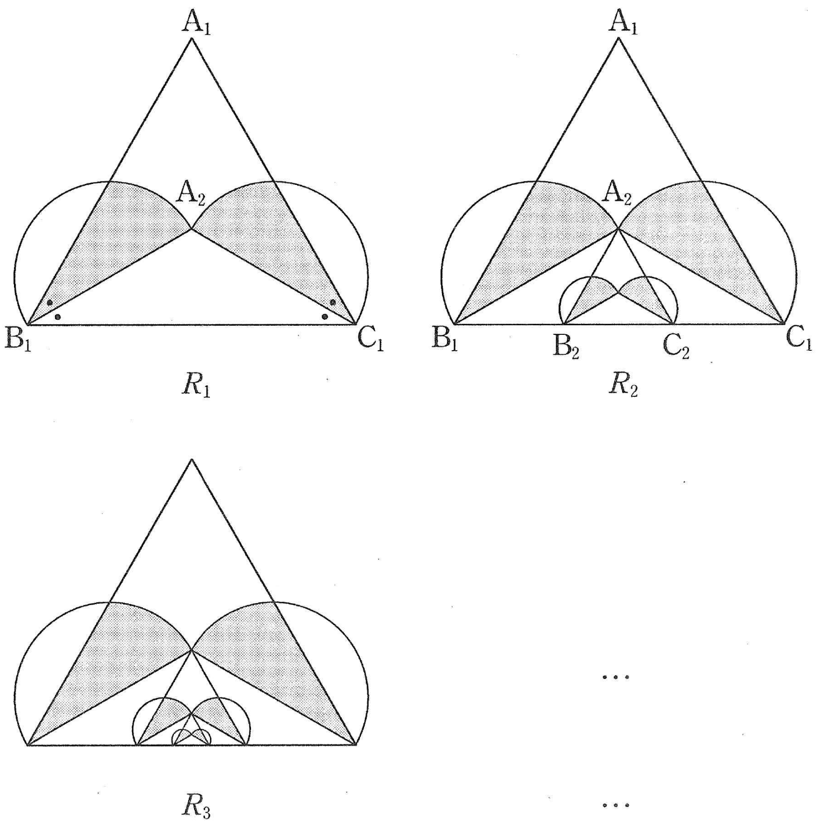
$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

라 하자. 함수 $y = g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)이다. $a = \alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)\,dx = k\alpha_m \int_0^1 \lvert f(x) \rvert\,dx$

$mk \times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

141. 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ 이 있다. 그림과 같이 $\angle \mathrm{A_1B_1C_1}$ 의 이등분선과 $\angle \mathrm{A_1C_1B_1}$ 의 이등분선이 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$ 라 하자. 두 선분 $\mathrm{B_1A_2}$, $\mathrm{C_1A_2}$ 를 각각 지름으로 하는 반원의 내부와 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ 의 내부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에서 점 $\mathrm{A_2}$ 를 지나고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$ 에 평행한 직선이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 과 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$, 점 $\mathrm{A_2}$ 를 지나고 선분 $\mathrm{A_1C_1}$ 에 평행한 직선이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 과 만나는 점을 $\mathrm{C_2}$ 라 하자. 그림 R_1 에 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$ 의 내부에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



142. 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1 \ (k>0 \text{인 상수})$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은? [4점]

143. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1 = a_1$$

이고, 2이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} + a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌경우}) \\ b_{n-1} - a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수인경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10} = a_{10}$일 때, $\frac{b_8}{b_{10}} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

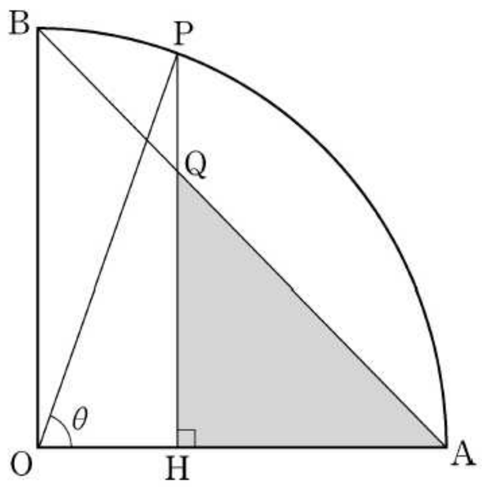
144. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha) = g(\alpha)$이고 $f'(\alpha) = g'(\alpha) = -16$인 실수 α가 존재한다.
(나) $f'(\beta) = g'(\beta) = 16$인 실수 β가 존재한다.

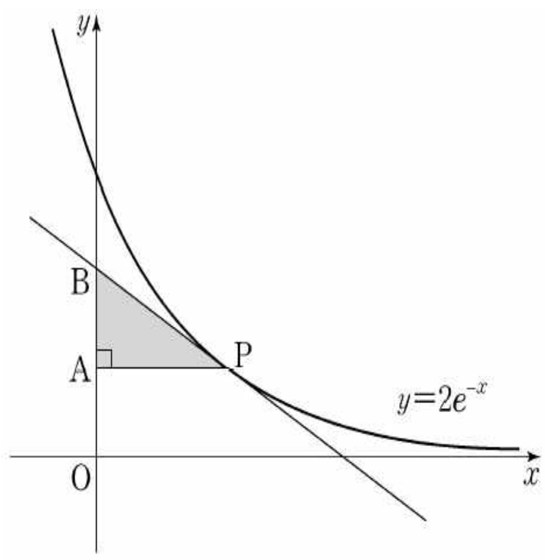
$g(\beta+1) - f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점]

[145~156] 2017학년도 대수능

145. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{POH}=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $\mathrm{S}(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



146. 곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$ $(t>0)$에서 y축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서 접선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t의 값은? [4점]



147. 함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

148. 닫힌 구간 $[0,1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)dx=2,\quad \int_0^1 |f(x)|dx=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x)=\int_0^x |f(t)|dt\ \ (0\le x\le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)dx$의 값은? [4점]

149. $x>a$ 에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여
$(x-a)f(x)=g(x)$이다.
(나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는
$x=\alpha$, $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다.
(단, $M>0$)
(다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는
함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다
많다.

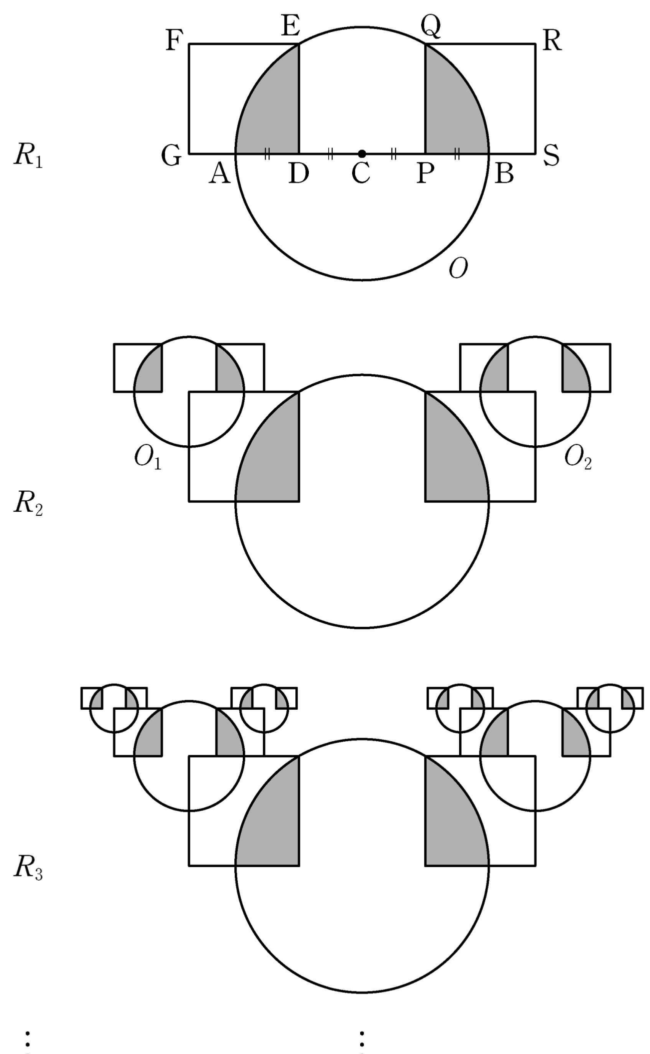
$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$ 일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

150. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2의 값은? [4점]

(가) $a_6+a_8=0$
(나) $|a_6|=|a_7|+3$

151. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 ◿ 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 공통부분인 ◺ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}$인 원 O_1, 점 R를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◿ 모양의 2개의 도형과 ◺ 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



152. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

153. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$ 에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.)
(나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여 $\int_0^t \lvert f'(x) \rvert \, dx = f(t)+f(0)$ 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보기 >

ㄱ. $\int_0^k f'(x)\, dx < 0$

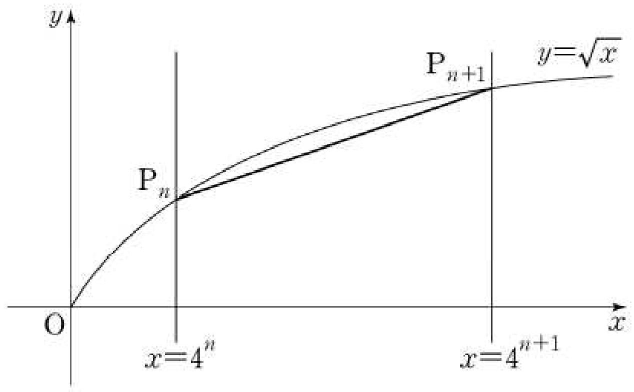
ㄴ. $0 < k \le 1$

ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

154. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c=7$
(나) $2^a \times 4^b$은 8의 배수이다.

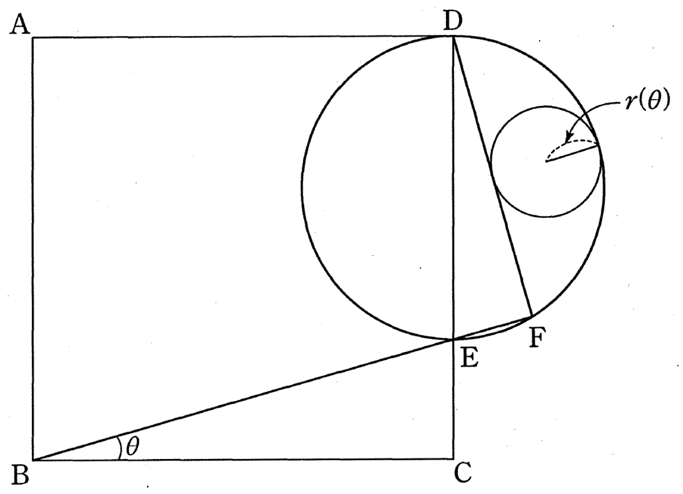
155. 자연수 n에 대하여 직선 $x=4^n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 P_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 L_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값을 구하시오. [4점]



156. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오. [4점]

[157~165] 2017학년도 9월 모의평가

157. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle EBC = \theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. 이 때, $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



158. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족한다. $f(1) = \frac{1}{e}$일 때, $f(2) - g(2)$의 값은? [4점]

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$

(나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)\,dt$

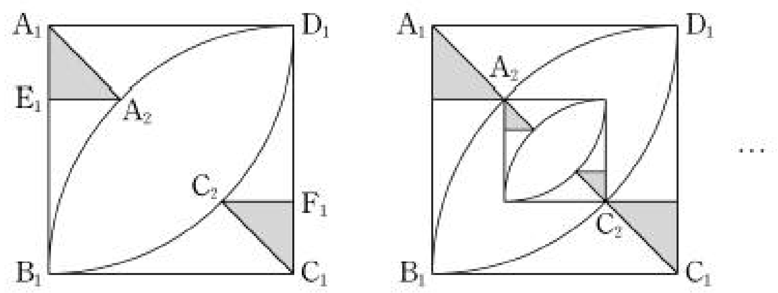
159. 함수 $f(x)=2x+\sin x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4\pi,\ 2\pi)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

160. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

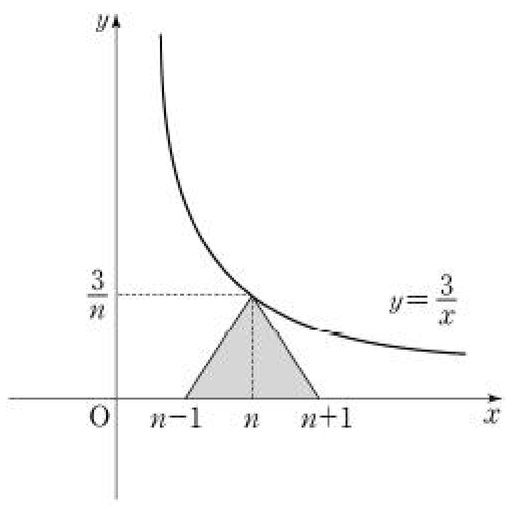
에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

161. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 꼭짓점 A_1, C_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1, C_1D_1을 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 선분 A_1C_1이 두 사분원과 만나는 점 중 점 A_1과 가까운 점을 A_2, 점 C_1과 가까운 점을 C_2라 하자. 선분 A_1D_1에 평행하고 점 A_2를 지나는 직선이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 E_1, 선분 B_1C_1에 평행하고 점 C_2를 지나는 직선이 선분 C_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 삼각형 $A_1E_1A_2$와 삼각형 $C_1F_1C_2$를 그린 후 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 A_2C_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 정사각형 안에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 개의 사분원과 두 개의 삼각형을 그리고 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 …

162. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{3}{x}$ $(x>0)$ 위의 점 $\left(n,\ \frac{3}{n}\right)$과 두 점 $(n-1,\ 0)$, $(n+1,\ 0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{9}{a_n a_{n+1}}$의 값은? [4점]



163. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-3)=f'(3)$

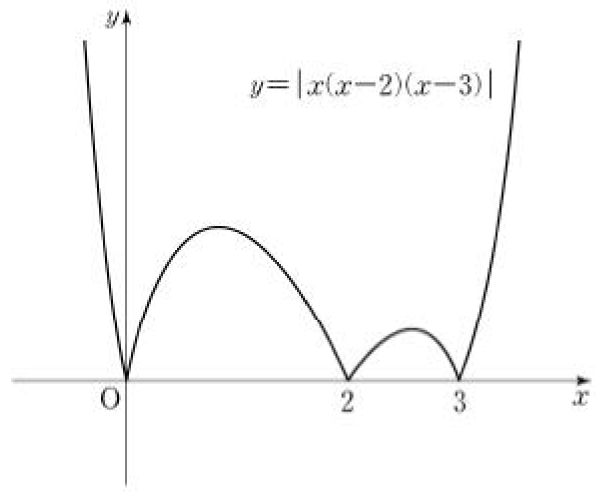
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

164. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

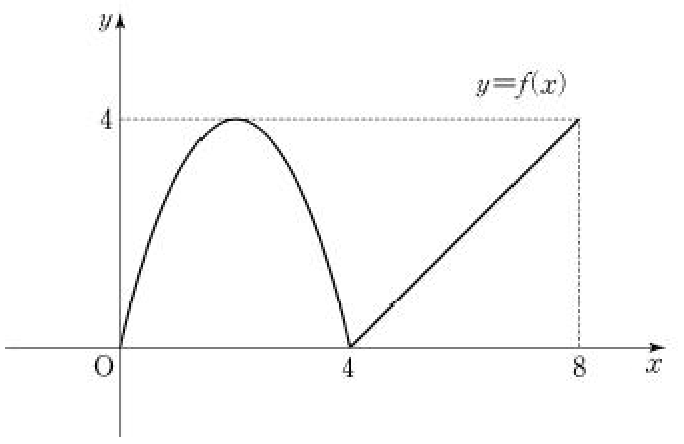
(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



165. 구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-x(x-4) & (0\le x<4)\\ x-4 & (4\le x\le 8)\end{cases}$$

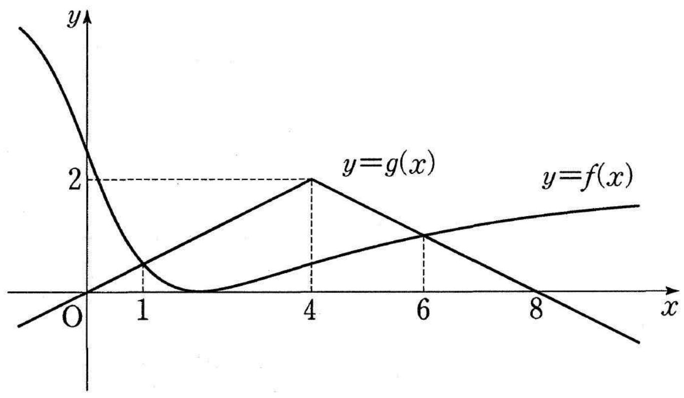
이다. 실수 $a\,(0\le a\le 4)$에 대하여 $\int_{a}^{a+4} f(x)dx$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



[166~175] 2017학년도 6월 모의평가

166. $\int_{1}^{e} x(1-\ln x)dx$ 의 값은? [4점]

167. 함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$ 와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$ 의 그래프가 그림과 같다.



$0\le a\le 8$ 인 a 에 대하여 $\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$ 의 최솟값은? [4점]

168. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)\neq 1$
(나) $f(x)+f(-x)=0$
(다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq -1$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

169. 양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 1)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = f(t) \end{cases}$$

이다. 점 P가 점 $(0,\ f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때 시각 t는 $t=\dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$이고, $t=2$일 때 점 P의 속도는 $\left(1,\ \dfrac{3}{4}\right)$이다. 시각 $t=2$일 때, 점 P의 가속도를 $\left(-\dfrac{1}{2},\ a\right)$라 할 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점]

170. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a\ (0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=f(-x)$

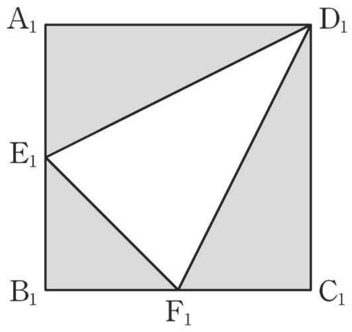
(나) $\displaystyle\int_{x}^{x+a} f(t)dt = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0,\ \dfrac{a}{2}\right]$에서 두 실수 $b,\ c$에 대하여

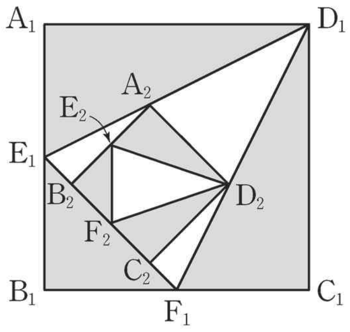
$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때 $abc=-\dfrac{q}{p}\pi$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

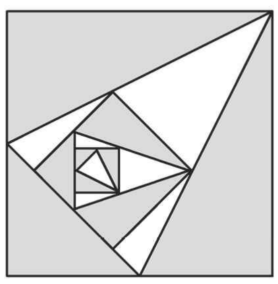
171. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 삼각형 $E_1F_1D_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 D_1E_1 위의 점 A_2, 선분 D_1F_1 위의 점 D_2와 선분 E_1F_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $E_2F_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $E_2F_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



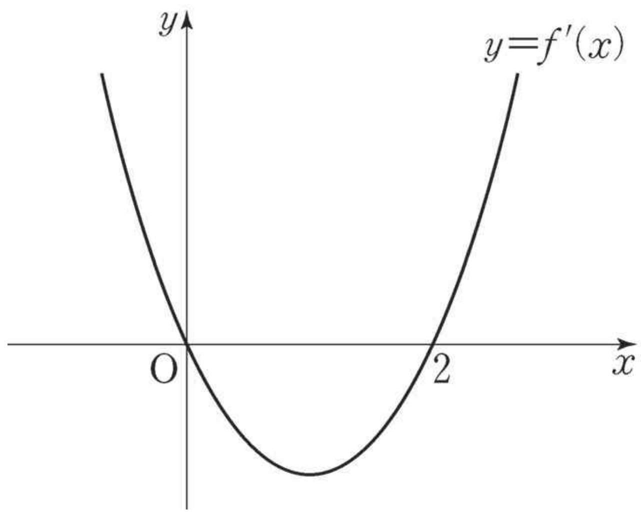
…

172. 첫째항이 a인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+(-1)^n\times 2 & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n+1 & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15}=43$일 때, a의 값은? [4점]

173. 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.

ㄴ. $f(0)f(2)\ge 0$이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

174. 함수 $f(x)$는

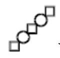
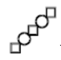
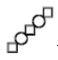
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x\ge 1)\end{cases}$$

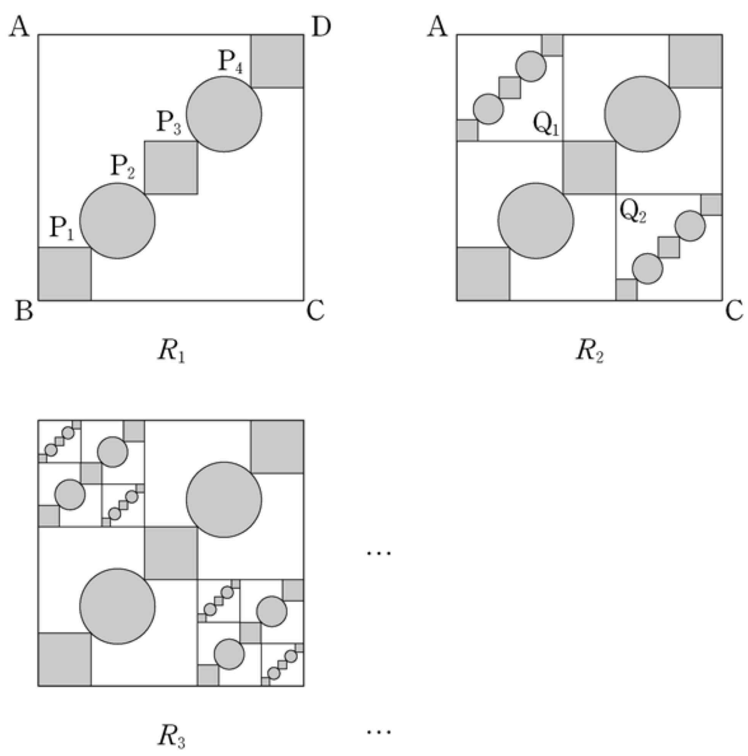
이고, 좌표평면 위에 두 점 A$(-1,\ -1)$, B$(1,\ 2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x,\ f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오. [4점]

175. 다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

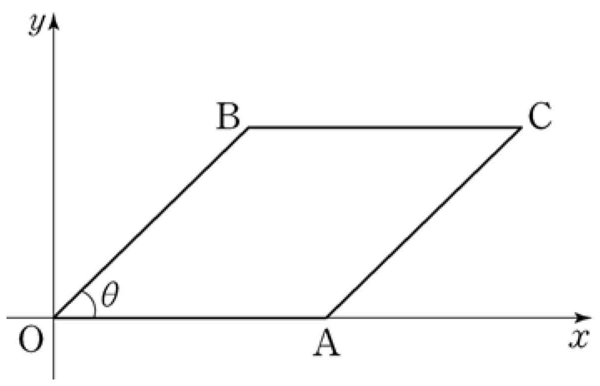
> $\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수이고
> $0<b-a\le\frac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재한다.

[176~185] 2016학년도 대수능

176. 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD의 대각선 BD의 5등분점을 점 B에서 가까운 순서대로 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{P_4}$라 하고, 선분 $\mathrm{BP_1}$, $\mathrm{P_2P_3}$, $\mathrm{P_4D}$를 각각 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{P_1P_2}$, $\mathrm{P_2P_3}$를 각각 지름으로 하는 원을 그린 후,  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{P_2P_3}$을 대각선으로 하는 정사각형의 꼭짓점 중 점 A와 가장 가까운 점을 $\mathrm{Q_1}$, 점 C와 가장 가까운 점을 $\mathrm{Q_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{AQ_1}$을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{CQ_2}$를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 2개의 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 선분 $\mathrm{AQ_1}$을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{CQ_2}$를 대각선으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]

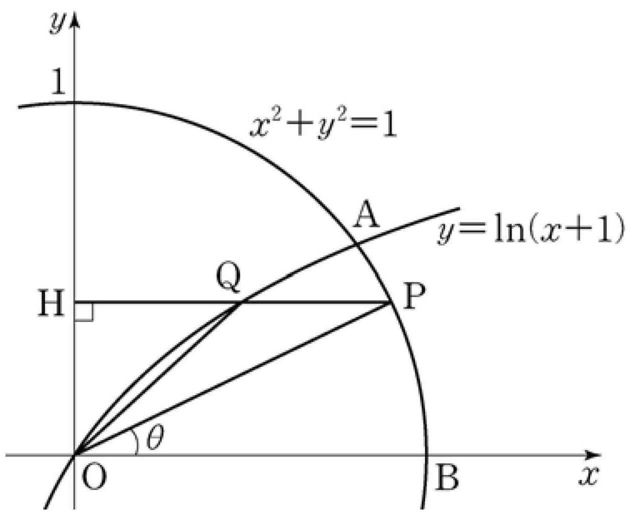


177. 좌표평면에서 점 A의 좌표는 (1, 0)이고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 점 B의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이다. 사각형 OACB가 평행사변형이 되도록 하는 제1사분면 위의 점 C에 대하여 사각형 OACB의 넓이를 $f(\theta)$, 선분 OC의 길이의 제곱을 $g(\theta)$라 하자. $f(\theta)+g(\theta)$의 최댓값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



178. $0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t), t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t), t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은? [4점]

179. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\ln(x+1)$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 B(1, 0)에 대하여 호 AB 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 곡선 $y=\ln(x+1)$이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{POB}=\theta$라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 HQ의 길이를 $L(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{S(\theta)}{L(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$이고, O는 원점이다.) [4점]



180. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x\le b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다.
> (단, a, b, c는 상수이다.)
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\int_0^x\sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)dx=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

181. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x), \quad g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$$

일 때, $h(3)$의 값은? [4점]

182. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은? [4점]

(가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

183. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & (x \le a) \\ x^2-x & (x > a) \end{cases}, \quad g(x)=x-(2a+7)$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. [4점]

184. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)=x^3f(x)-7$

(나) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.) [4점]

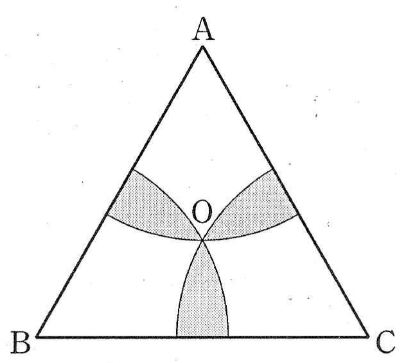
185. 이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 \vert f(x)\vert dx = -\int_0^2 f(x)dx = 4$
(나) $\int_2^3 \vert f(x)\vert dx = \int_2^3 f(x)dx$

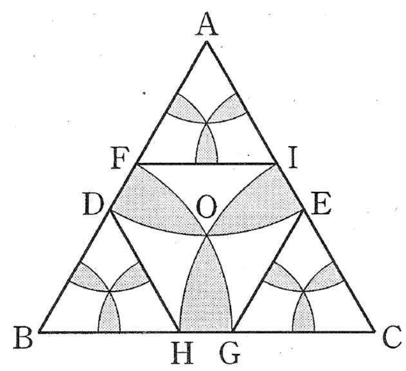
$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

[186~191] 2016학년도 9월 모의평가

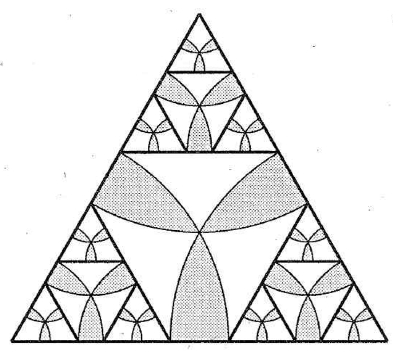
186. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC가 있다. 정삼각형 ABC의 외심을 O라 할 때, 중심이 A 이고 반지름의 길이가 $\overline{AO}$인 원을 O_A, 중심이 B이고 반지름의 길이가 $\overline{BO}$인 원을 O_B, 중심이 C이고 반지름의 길이가 $\overline{CO}$인 원을 O_c라 하자.
원 O_A와 원 O_B의 내부의 공통부분, 원 O_A와 원 O_c의 내부의 공통부분, 원 O_B와 원 O_c의 내부의 공통부분 중 삼각형 ABC내부에 있는 ⚘ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 원 O_A가 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E, 원 O_B가 두 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 F, G, O_C가 두 선분 BC, AC와 만나는 점을 각각 H, I라 하고, 세 정삼각형 AFI, BHD, CEG에서 R_1을 얻는 과정과 같은 방법으로 각각 만들어지는 ⚘ 모양의 도형 3개에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 새로 만들어진 세 개의 정삼각형에 각각 R_1에서 R_2를 얻는 과정과 같은 방법으로 만들어지는 ⚘ 모양의 도형 9개에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2


R_3

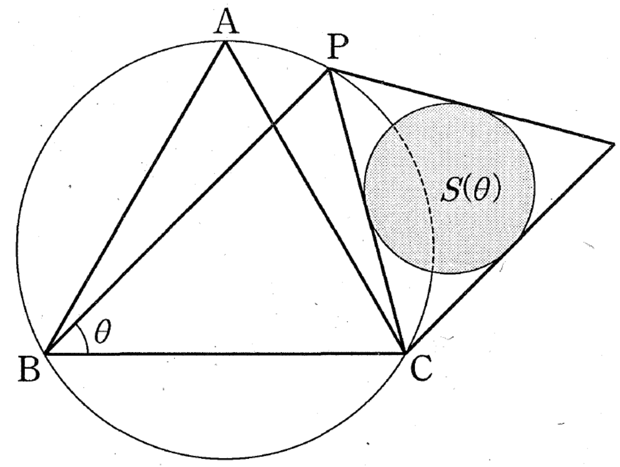
⋯

187. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\dfrac{7}{2}\pi \le x \le 0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0 \le x \le \dfrac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌구간 $\left[-\dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, $-\dfrac{7}{2}\pi \le a \le \dfrac{7}{2}\pi$) [4점]

188. 그림과 같이 원에 내접하고 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 ABC 가 있다. 점 B 를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P 에 대하여 $\angle \mathrm{PBC}=\theta$ 라 하고, 선분 PC 를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자.
$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=a\pi$ 일 때, $60a$ 의 값을 구하시오. [4점]

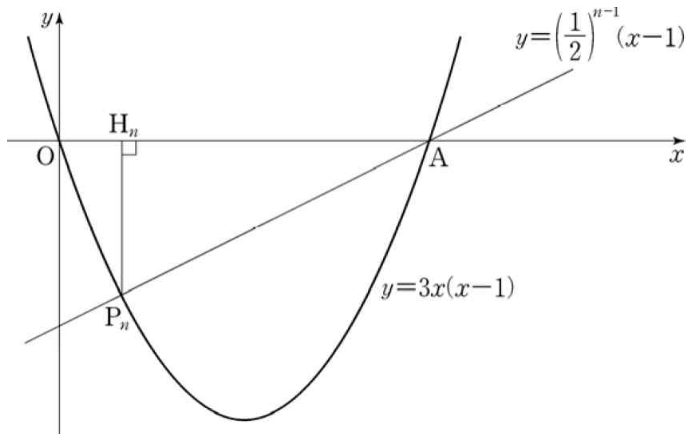


189. 양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
> (나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
> $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\dfrac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오. [4점]

190. 자연수 n에 대하여 직선 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$과 이차함수 $y=3x(x-1)$의 그래프가 만나는 두 점을 $\mathrm{A}(1,\ 0)$과 $\mathrm{P_n}$이라 하자. 점 $\mathrm{P_n}$에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_n}$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P_nH_n}}$의 값은? [4점]



191. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\ y=2x+2$$

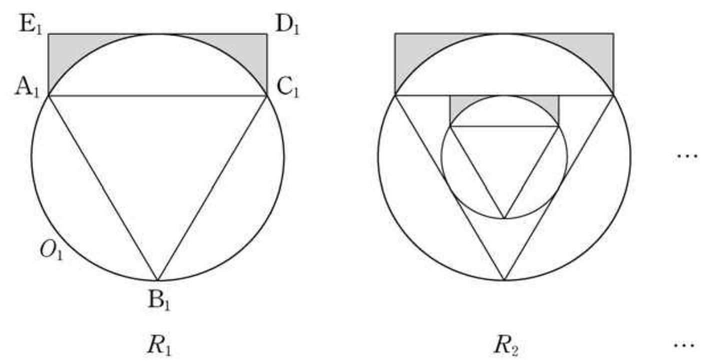
의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to-0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은? [4점]

[192~200] 2016학년도 6월 모의평가

192. 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 직선 A_1C_1과 평행하고 점 B_1을 지나지 않는 원 O_1의 접선 위에 두 점 D_1, E_1을 사각형 $A_1C_1D_1E_1$이 직사각형이 되도록 잡고, 직사각형 $A_1C_1D_1E_1$의 내부와 원 O_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 정삼각형 $A_1B_1C_1$에 내접하는 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$를 그리고 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$의 내부와 원 O_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]

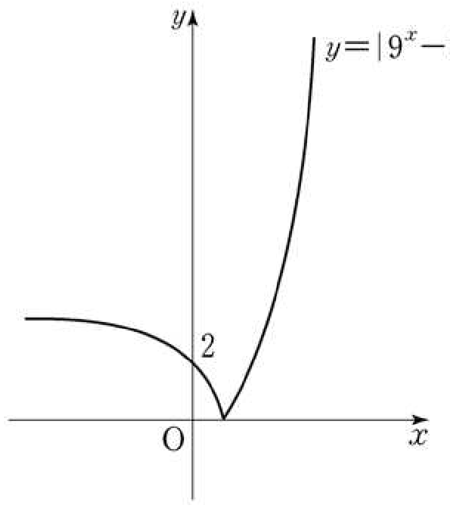


193. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<1) \\ -3x+4 & (x\ge 1) \end{cases}, \quad g(x)=2^x+2^{-x}$$

에 대하여 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? [4점]

194. 좌표평면 위의 두 곡선 $y=|9^x-3|$과 $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]



195. 2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

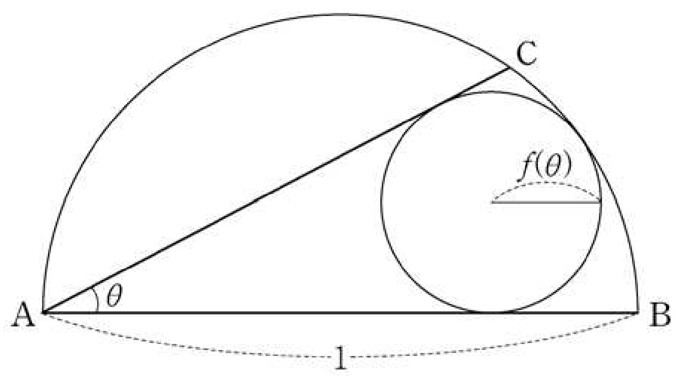
$$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

196. 그림과 같이 길이가 1 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위에 점 C 를 잡고 $\angle \mathrm{BAC}=\theta$ 라 하자. 호 BC 와 두 선분 AB, AC 에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때,

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\alpha$$

이다. 100α 의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



197. 정의역이 $\{x|0 \le x \le 8\}$이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은 $p+\frac{q}{\ln 2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 자연수이고, $\ln 2$는 무리수 이다.) [4점]

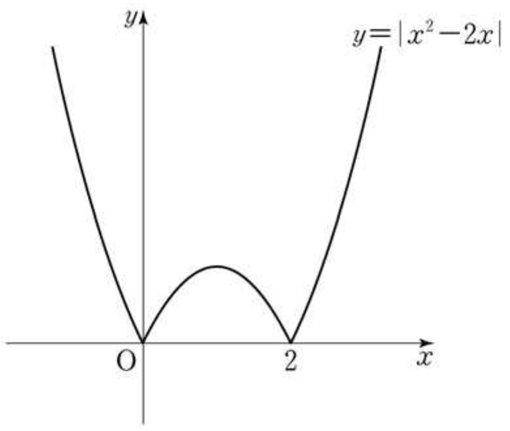
> (가) $f(0)=1$이고 $f(8) \le 100$이다.
> (나) $0 \le k \le 7$인 각각의 정수 k에 대하여
> $f(k+t)=f(k)$ $(0 < t \le 1)$
> 또는
> $f(k+t)=2^t \times f(k)$ $(0 < t \le 1)$
> 이다.
> (다) 열린구간 $(0,\ 8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

198. 자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

> (가) $f(n)=0$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x) \ge 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은? [4점]

199. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오. [4점]



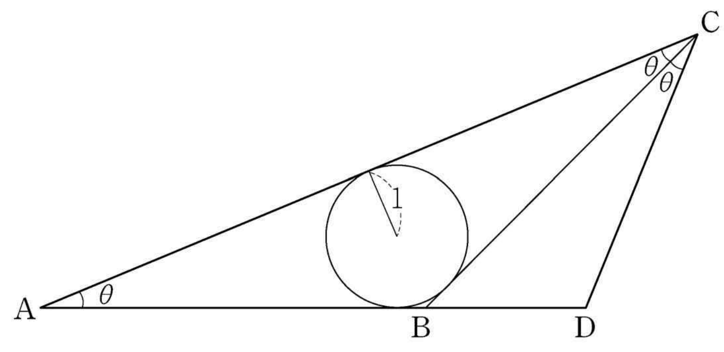
200. 2 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수가 300 이상이 되도록 하는 가장 작은 자연수 k의 값을 $f(n)$이라 할 때, $f(2)f(3)f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $a<n^k$이면 $b \le \log_n a$이다.

(나) $a \ge n^k$이면 $b \le -(a-n^k)^2+k^2$이다.

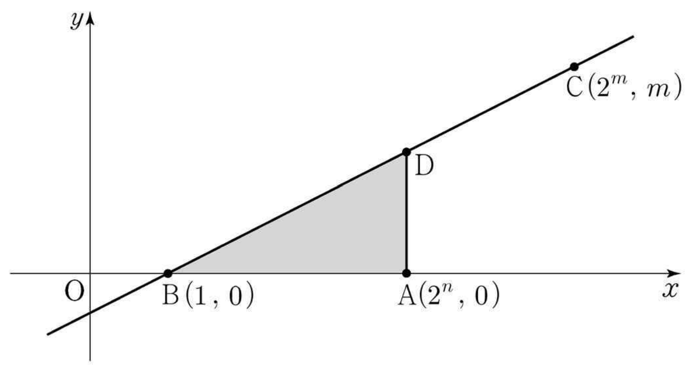
[201~208] 2015학년도 대수능

201. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle\mathrm{CAB} = \angle\mathrm{BCA} = \theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle\mathrm{DCB} = \theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \{\theta \times S(\theta)\}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



202. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

(가) 점 A의 좌표는 $(2^n, 0)$이다.
(나) 두 점 $\mathrm{B}(1, 0)$과 $\mathrm{C}(2^m, m)$을 지나는 직선 위의 점 중 x좌표가 2^n인 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같다.



203. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\int_0^x (a-t)e^t dt$의 최댓값이 32이다. 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

204. 함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

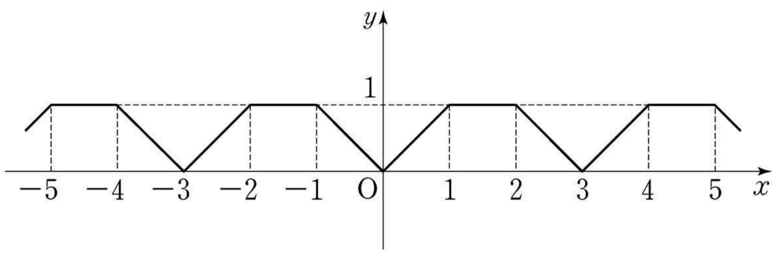
$$g(x)=100\,|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

205. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 1 & (1 \le x < 2) \\ -x+3 & (2 \le x < 3) \end{cases}$$

이다. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 13$일 때, 상수 a의 값은? [4점]



206. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

> (가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
> (나) $f(0)=f'(0)$
> (다) $x \ge -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge f'(x)$이다.

207. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=(x^3+2)f(x)$$

를 만족시킨다. $g(x)$가 $x=1$ 에서 극솟값 24를 가질 때, $f(1)-f'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

208. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형 OAB의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

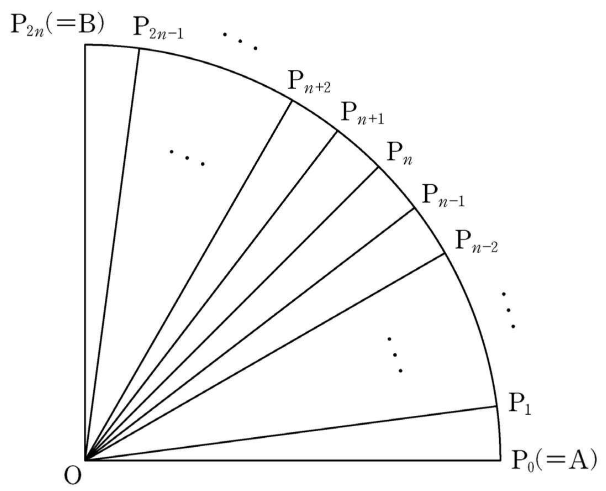
> (가) 점 A의 좌표는 $(-2,\ 3^n)$이다.
> (나) 점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, a와 b는 자연수이고 $b \le \log_2 a$를 만족시킨다.
> (다) 삼각형 OAB의 넓이는 50 이하이다.

[209~216] 2015학년도 9월 모의평가

209. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다.

자연수 n에 대하여 호 AB를 $2n$등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $P_0(=A), P_1, P_2, \cdots, P_{2n-1}, P_{2n}(=B)$라 하자.

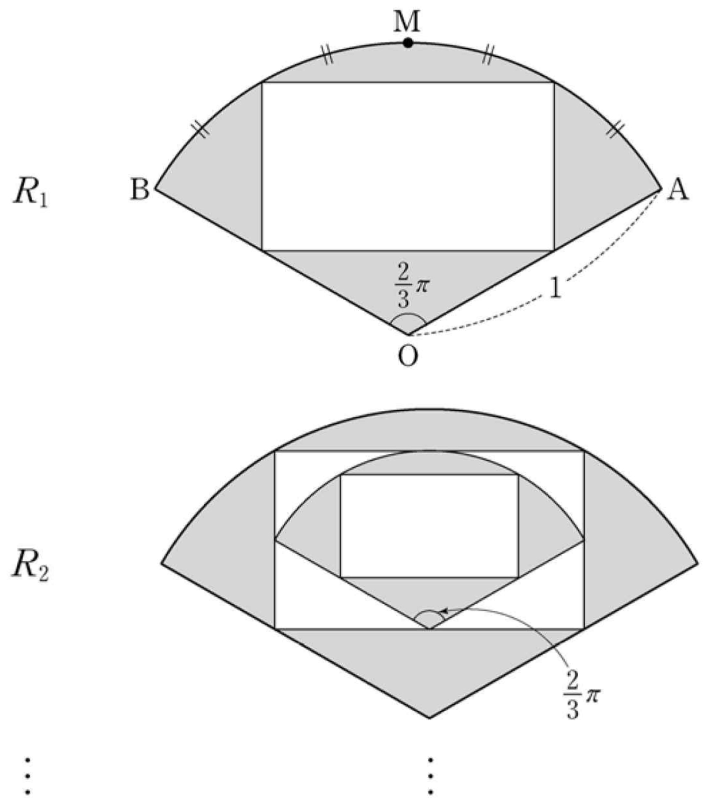
주어진 자연수 n에 대하여 $S_k\ (1 \le k \le n)$을 삼각형 $OP_{n-k}P_{n+k}$ 의 넓이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$ 의 값은? [3점]



210. 중심이 O, 반지름의 길이가 1 이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴 OAB 가 있다. 그림과 같이 호 AB 를 이등분하는 점을 M 이라 하고 호 AM 과 호 MB 를 각각 이등분하는 점을 두 꼭짓점으로 하는 직사각형을 부채꼴 OAB 에 내접하도록 그리고, 부채꼴의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에 새로 그려진 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴을 그리고 이 부채꼴에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$ 의 값은? [4점]



211. 3 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=x^n e^{-x}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

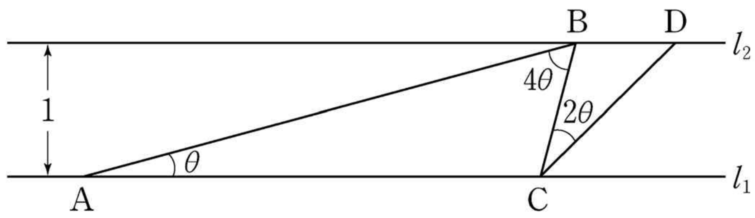
<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. 점 $(0, 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

212. 그림과 같이 서로 평행한 두 직선 l_1과 l_2 사이의 거리가 1이다. 직선 l_1 위의 점 A에 대하여 직선 l_2 위에 점 B를 선분 AB와 직선 l_1이 이루는 각의 크기가 θ가 되도록 잡고, 직선 l_1 위에 점 C를 $\angle ABC=4\theta$가 되도록 잡는다. 직선 l_2 위에 점 D를 $\angle BCD=2\theta$이고 선분 CD가 선분 AB와 만나지 않도록 잡는다.
삼각형 ABC의 넓이를 T_1, 삼각형 BCD의 넓이를 T_2라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{T_1}{T_2}$ 의 값을 구하시오. (단. $0<\theta<\frac{\pi}{10}$) [4점]



213. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세점

$(0,0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$

을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\frac{t+1}{t}$ 이다.
(다) $\int_{1}^{2} \frac{f(x)}{x} dx = 2$

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x} dx = \frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

214. 최고차항의 계수가 1 인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=-3$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여

$6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$ 이다.

215. 자연수 n에 대하여 점$(3n,\ 4n)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 O_n이 있다. 원 O_n 위를 움직이는 점과 점 $(0,\ -1)$ 사이의 거리의 최댓값을 a_n, 최솟값을 b_n이라 할 때,

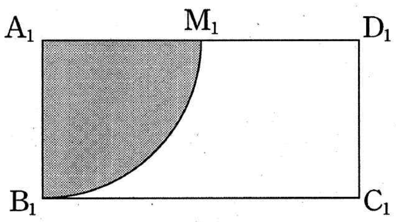
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$의 값을 구하시오. [4점]

216. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. [4점]

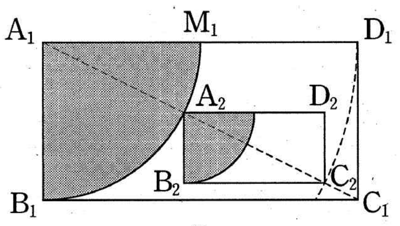
> (가) $1 \le a \le 10,\ 1 \le b \le 100$
>
> (나) 곡선 $y=2^x$이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$과 만나지 않는다.
>
> (다) 곡선 $y=2^x$이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$와 적어도 한 점에서 만난다.

[217~223] 2015학년도 6월 모의평가

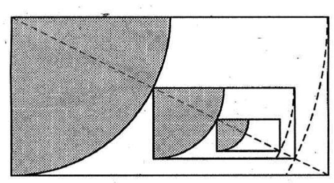
217. 그림과 같이 $\overline{A_1D_1}=2$, $\overline{A_1B_1}=1$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 선분 A_1D_1 의 중점을 M_1 이라 하자. 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 $A_1B_1M_1$ 을 그리고, 부채꼴 $A_1B_1M_1$ 에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에서 부채꼴 $A_1B_1M_1$ 의 호 B_1M_1 이 선분 A_1C_1 과 만나는 점을 A_2 라 하고, 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1D_1}$ 인 원이 선분 A_1C_1 과 만나는 점을 C_2 라 하자. 가로와 세로의 길이의 비가 $2:1$ 이고 가로가 선분 A_1D_1 과 평행한 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에서 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 부채꼴에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



R_1



R_2


R_3

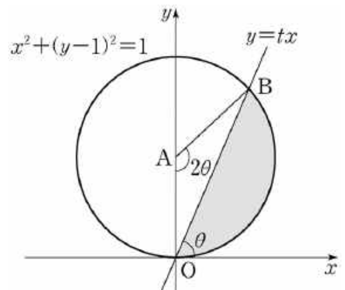
…

…

218. 양의 실수 t에 대하여 좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2 \le 1 \\ y \le tx \end{cases}$$

가 나타내는 영역의 넓이를 $f(t)$라 하자. 다음은 $f'(2)$의 값을 구하는 과정이다.

> 원 $C: x^2+(y-1)^2=1$의 중심을 A, 원 C와 직선 $l: y=tx$가 만나는 두 점을 각각 O, B라 하자.
> 직선 l이 c축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\angle OAB = 2\theta$이다.
>
> 
>
>
> 주어진 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이를 $g(\theta)$라 하면
> $g(\theta)=\theta-$ (가) 이다.
>
> $t=\tan\theta$이므로 $g(\theta)=f(t)=f(\tan\theta)$이고, 합성 함수의 미분법에 의하여 $g'(\theta)=f'(t)\times$ (나) 이다.
>
> $t=2$일 때, $\tan\theta=2$이므로 $f'(2)=$ (다) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $h_1(\theta)$, $h_2(\theta)$라 하고 (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a\times h_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\times h_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [4점]

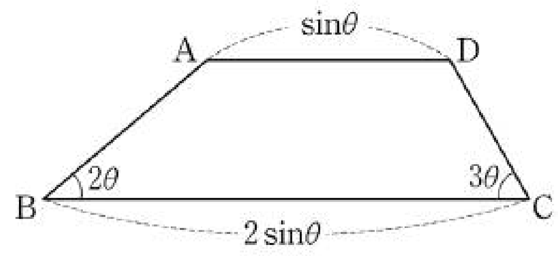
219. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = f(x)\ln x^4$$

이라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(e,\ -e)$에서의 접선과 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(e,\ -4e)$에서의 접선이 서로 수직일 때, $100f'(e)$의 값을 구하시오. [4점]

220. 다음 그림과 같이 사다리꼴 ABCD에서 변 AD와 변 BC가 평행하고 $\angle\mathrm{B} = 2\theta$, $\angle\mathrm{C} = 3\theta$, $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{AD}} = \sin\theta$이다. 사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{\theta^3} = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



221. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이다.
> (나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n,\ 8n)$, 점 $(4n+1,\ 8n+2)$, 점 $(4n+2,\ 8n+5)$, 점 $(4n+3,\ 8n+7)$을 모두 지난다.
> (다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌구간 $[2k,\ 2k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)dx=a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오. [4점]

222. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(1)=0$
> (나) $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

223. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-11,\quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

[224~233] 2014학년도 대수능

224. 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln(x+1)} & (x\neq 0)\\ 8 & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1,\infty)$에서 연속일 때, $f(3)$의 값은? [3점]

225. 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1B_1}=2$이다. 그림과 같이 선분 A_1D_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하자. 중심이 N_1, 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $N_1M_1B_1$을 그리고, 중심이 D_1, 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $D_1M_1C_1$을 그린다. 부채꼴 $N_1M_1B_1$의 호 M_1B_1과 선분 M_1B_1로 둘러싸인 부분과 부채꼴 $D_1M_1C_1$의 호 M_1C_1과 선분 M_1C_1로 둘러싸인 부분인

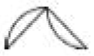
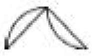
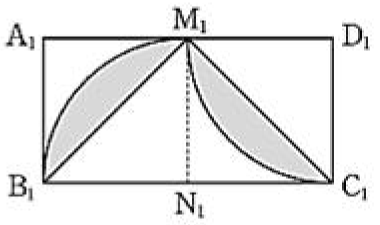
 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

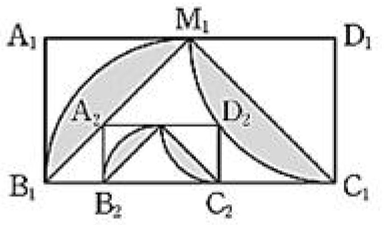
그림 R_1에 선분 M_1B_1 위의 점 A_2, 호 M_1C_1 위의 점 D_2와 변 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는

 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

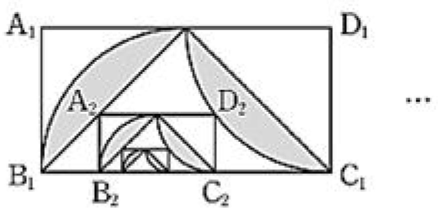
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



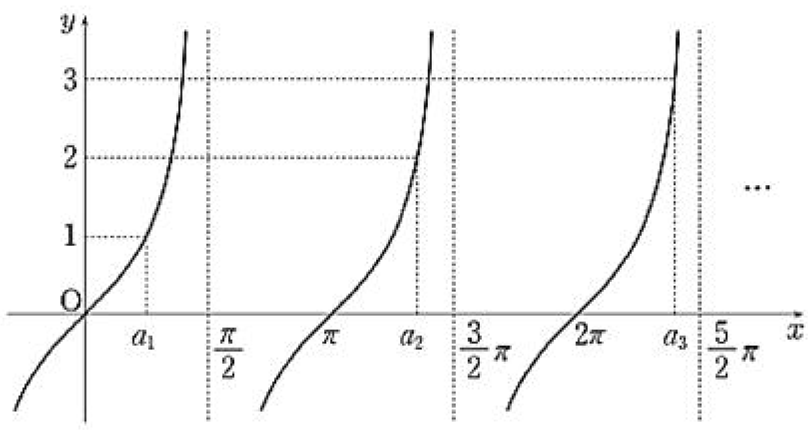
R_2



R_3

⋯

226. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=\tan x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [4점]

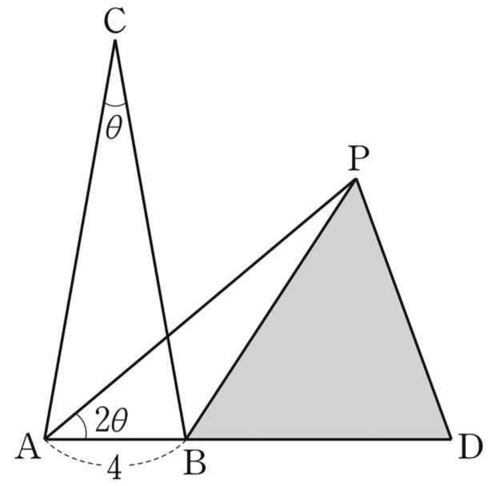


227. 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$$

이다. $f(1)=1$일 때, $\pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)dx$의 값은? [4점]

228. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 한 변으로 하고, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\angle \mathrm{ACB}=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}$인 점 D를 잡고, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AP}}$이고 $\angle \mathrm{PAB}=2\theta$인 점 P를 잡는다. 삼각형 BDP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}(\theta\times S(\theta))$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]



229. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다. $g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 점 $(1,\ g(1))$과 점 $(4,\ g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
> (나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

230. 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\log_3 n & (n\text{이 홀수})\\ \log_2 n & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

20 이하의 두 자연수 $m,\ n$에 대하여 $f(mn)=f(m)+f(n)$을 만족시키는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는? [4점]

231. 좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$ (나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

232. 함수 $f(x)=3x^2-ax$가

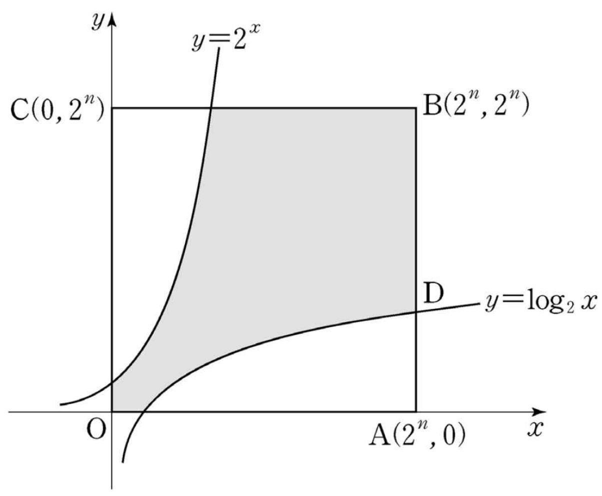
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{3k}{n}\right)=f(1)$$

을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

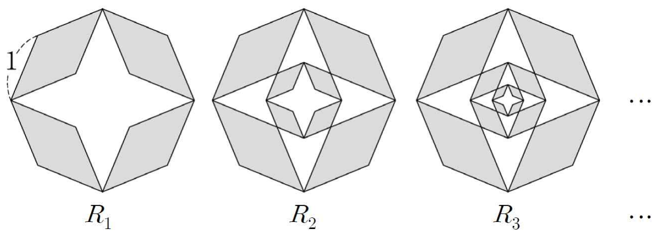
233. 좌표평면에서 $a>1$인 자연수 a에 대하여 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되도록 하는 a의 개수를 구하시오. [4점]

[234~241] 2014학년도 9월 모의평가

234. 그림은 좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 $O(0,\ 0)$, $A(2^n,\ 0)$, $B(2^n,\ 2^n)$, $C(0,\ 2^n)$인 정사각형 $OABC$와 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$을 나타낸 것이다. 선분 AB가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 D라 하자. 선분 AD를 $2:3$으로 내분하는 점을 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 E, 점 E를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 F라 하자. 점 F의 y좌표가 16일 때, 직선 DF의 기울기는? (단, n은 자연수이다.) [3점]



235. 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정팔각형의 이웃한 두 변을 변으로 하는 4 개의 평행사변형을 서로 겹치지 않게 그리고, 이 평행사변형 4 개를 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4 개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 4 개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻는 그림을 R_2 라 하자.
그림 R_2 에 가장 작은 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4 개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 4 개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻는 그림을 R_3 이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



236. 자연수 n 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 를 매개변수 t 로 나타내면

$$\begin{cases} x=e^t \\ y=(2t^2+nt+n)e^t \end{cases}$$

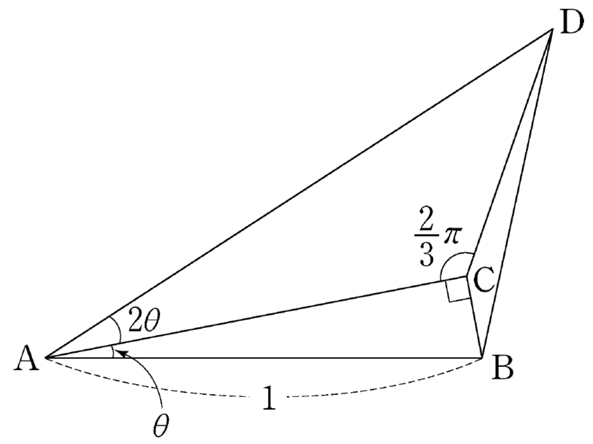
이고, $x \geq e^{-\frac{n}{2}}$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a_n$ 에서 최솟값 b_n 을 갖는다. $\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}$ 의 값은? [4점]

237. 함수 $f(x)=\ln(\tan x)$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{4g(8h)-\pi}{h}$의 값을 구하시오. [4점]

238. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 빗변으로 하고 $\angle BAC=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 D를 $\angle ACD=\frac{2}{3}\pi$, $\angle CAD=2\theta$가 되도록 잡는다.

삼각형 BCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=p$이다.

$300p^2$의 값을 구하시오. (단, 네 점 A, B, C, D는 한 평면 위에 있다.) [4점]



239. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ g(e^{x-1}) + 5 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)dx = 6e^2 + 4$이다.

$\int_1^e f(\ln x)dx = ae + b$일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 정수이다.) [4점]

240. 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x) = (x+1)(x^2 + ax + b)$$

이다. 함수 $y = f(x)$ 가 구간 $(-\infty,\ 0)$ 에서 감소하고 구간 $(2,\ \infty)$ 에서 증가하도록 하는 실수 a, b 의 순서쌍 $(a,\ b)$ 에 대하여, $a^2 + b^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자. $M+m$ 의 값은? [4점]

241. 자연수 n 에 대하여 부등식 $4^k-(2^n+4^n)2^k+8^n \leqq 1$ 을 만족시키는 모든 자연수 k 의 합을 a_n 이라 하자.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{a_n}=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

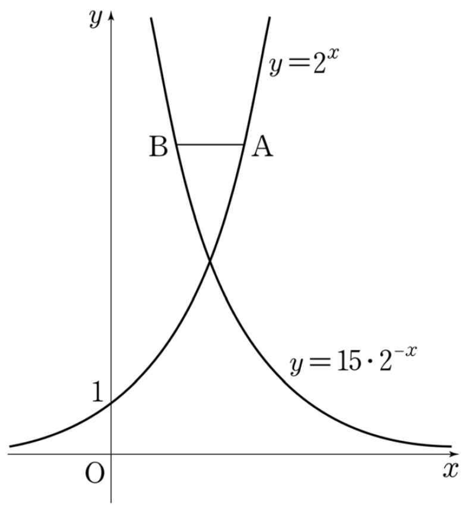
[242~250] 2014학년도 6월 모의평가

242. 실수 t 에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(t,\ t^3)$ 과 직선 $y=x+6$ 사이의 거리를 $g(t)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

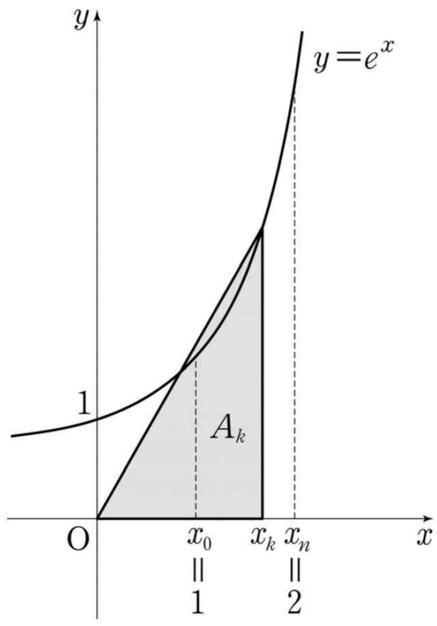
<보 기>

ㄱ. 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $g(t)$ 는 0 이 아닌 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $g(t)$ 는 $t=2$ 에서 미분가능하다.

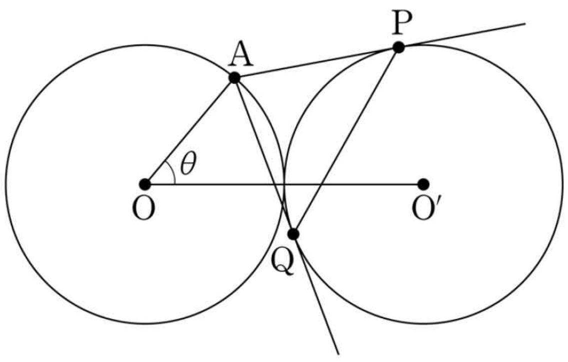
243. 그림과 같이 함수 $y=2^x$ 의 그래프 위의 한 점 A 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 함수 $y=15\cdot 2^{-x}$ 의 그래프와 만나는 점을 B 라 하자. 점 A 의 x 좌표를 a 라 할 때, $1<\overline{AB}<100$ 을 만족시키는 2 이상의 자연수 a 의 개수는? [4점]



244. 함수 $f(x)=e^x$ 이 있다. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[1,\ 2]$ 를 n 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $1=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=2$ 라 하자.
세 점 $(0,\ 0)$, $(x_k,\ 0)$, $(x_k,\ f(x_k))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 A_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$ 의 값은? [4점]



245. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1 인 두 원 O, O' 이 외접하고 있다. 원 O 위의 점 A 에서 원 O' 에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q 라 하자. $\angle AOO' = \theta$ 라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{\overline{PQ}}{\theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



246. 함수

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

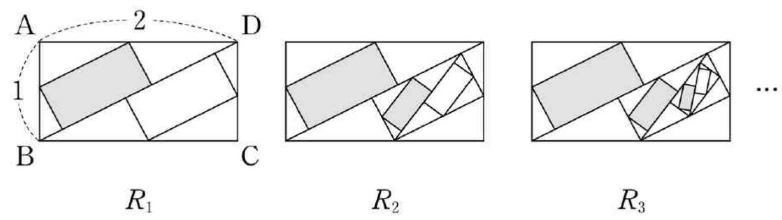
에 대하여

$$F(x) = \int_0^x t f(x-t)\,dt \quad (x \geqq 0)$$

일 때, $F'(a) = \ln 10$ 을 만족시키는 상수 a 의 값을 구하시오. [4점]

247. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, t $(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 $(s,\ t)$가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C위의 점 중에서 점 $(1,\ 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

248. 직사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$이다. 그림과 같이 직사각형 $ABCD$의 한 대각선에 의하여 만들어지는 두 직각삼각형의 내부에 두 변의 길이의 비가 1 : 2인 두 직사각형을 긴 변이 대각선 위에 놓이면서 두 직각삼각형에 각각 내접하도록 그리고 새로 그려진 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 새로 그려진 두 직사각형 중 색칠되어 있지 않은 직사각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_2이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



249. 함수

$$f(x)=\begin{cases}a(3x-x^3) & (x<0)\\ x^3-ax & (x\geq 0)\end{cases}$$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단 a는 상수이다.) [4점]

250. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=7$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2}=a_n-4 \quad (a=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$ 이다.

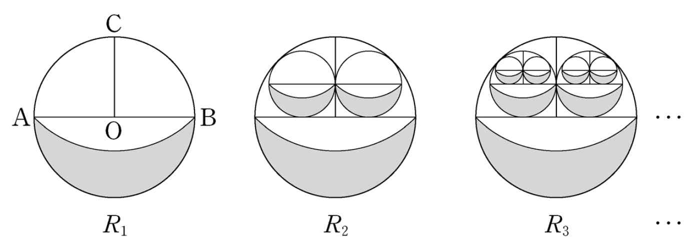
$\sum_{k=1}^{50} a_k=258$ 일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

[251~259] 2013학년도 대수능

251. 연속함수 $f(x)$가 $f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)\,dt$ 를 만족시킬 때,

$\int_0^1 xf(x)\,dx$의 값은? [3점]

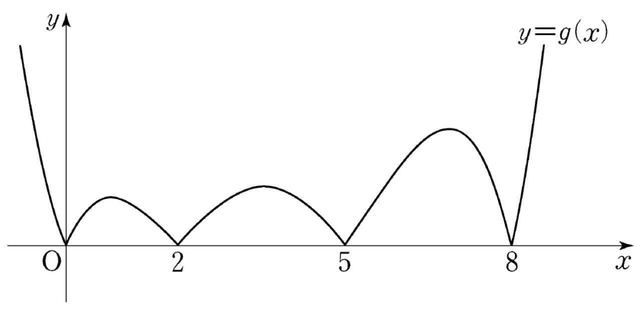
252. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라 하자.
점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 ◡ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◡ 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 새로 생긴 2개의 도형에 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◡ 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



253. 삼차함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|$$

라 할 때, 함수 $g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(0)<0$

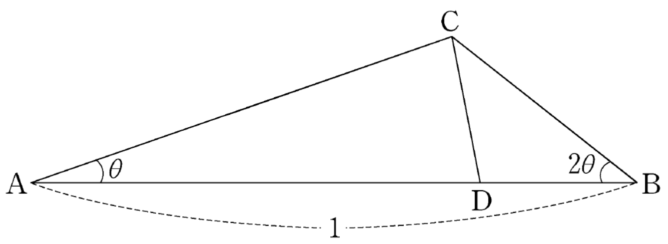
ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x)\,dx>0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.

254. 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? [4점]

255. 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 $\angle\mathrm{A}=\theta$, $\angle\mathrm{B}=2\theta$이다. 변 AB 위의 점 D를 $\angle\mathrm{ACD}=2\angle\mathrm{BCD}$가 되도록 잡는다.

$\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta}=\mathrm{a}$일 때, $27a^2$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



256. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\{(x,\ y)\,|\,2^x-n\le y\le \log_2(x+n)\}$$

에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n이라 하자.

(가) x좌표와 y좌표는 서로 같다.
(나) x좌표와 y좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1=2$, $a_2=4$이다. $\sum_{n=1}^{30}a_n$의 값을 구하시오. [4점]

257. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (|x|\geq 1)\\ 1 & (|x|<1)\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}1 & (|x|\geq 1)\\ -x & (|x|<1)\end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=-1$

ㄴ. 함수 $g(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

258. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a의 최솟값은? [4점]

259. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(3)=0$이고,

$\int_0^{2013} f(x)\,dx = \int_3^{2013} f(x)\,dx$를 만족시킨다.

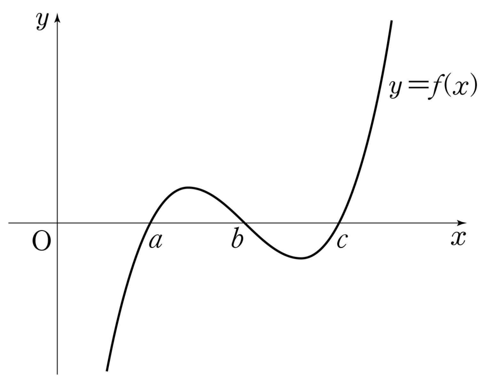
곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 S일 때, $30S$의 값을 구하시오. [4점]

[260~269] 2013학년도 9월 모의평가

260. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f(x)$는

$$\int_a^b f(x)\,dx = 3,\quad \int_a^c f(x)\,dx = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]



<보 기>

ㄱ. $F(b)=F(a)+3$

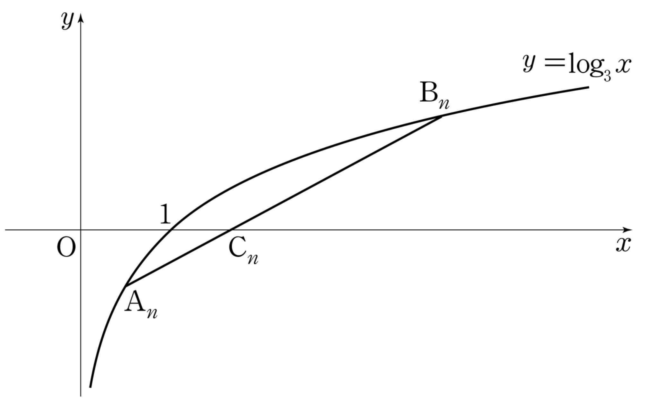
ㄴ. 점 $(c,\ F(c))$는 곡선 $y=F(x)$의 변곡점이다.

ㄷ. $-3<F(a)<0$이면 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

261. 2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y = \log_3 x$의 그래프 위의 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. 그래프 위의 점 B_n과 x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

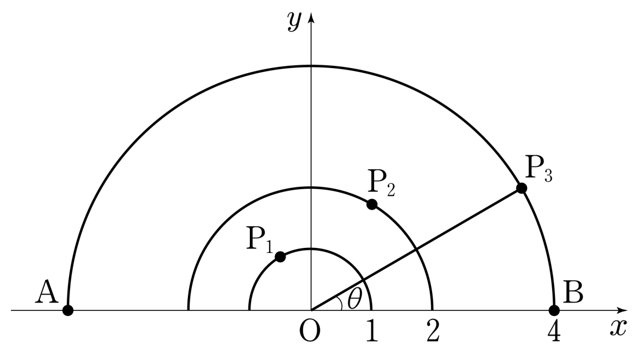
> (가) 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n B_n$과 x축의 교점이다.
> (나) $\overline{\mathrm{A}_n C_n} : \overline{\mathrm{C}_n B_n} = 1 : 2$

점 C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{n^2}$의 값은? [4점]



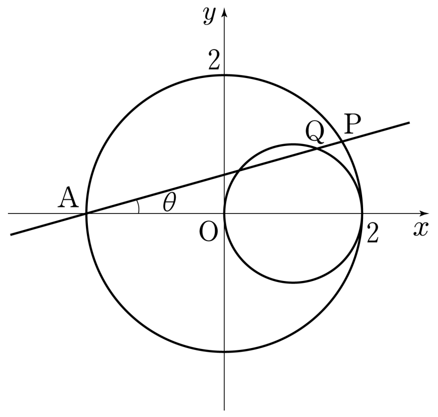
262. 그림과 같이 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1, 2, 4인 세 반원을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하자. 세 점 P_1, P_2, P_3은 선분 OB 위에서 동시에 출발하여 각각 세 반원 O_1, O_2, O_3 위를 같은 속력으로 시계 반대 방향으로 움직이고 있다. $\angle \mathrm{BOP}_3 = \theta$라 하고 삼각형 ABP_1의 넓이를 S_1, 삼각형 ABP_2의 넓이를 S_2, 삼각형 ABP_3의 넓이를 S_3이라 하자.

$3S_3 = 2(S_1 + S_2)$일 때, $\cos^3\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



263. 그림과 같이 점 $A(-2,\ 0)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P에 가까운 점을 Q라 하자.

$\angle OAP=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{\overline{PQ}}{\theta^2}$의 값은? [4점]



264. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x) \le \frac{1}{3}$이다.

(나) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\frac{8}{9}$

$f(1)$의 값은? [4점]

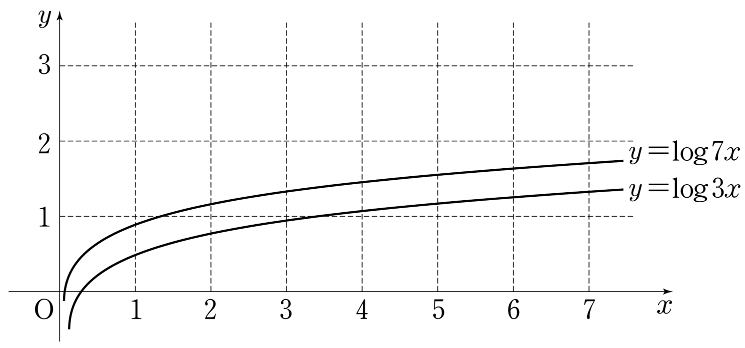
265. 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n < a_{n+1}, \quad \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

266. 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y=\log 3x$, $y=\log 7x$의 그래프와 모두 만나는 것의 개수를 구하시오. [4점]

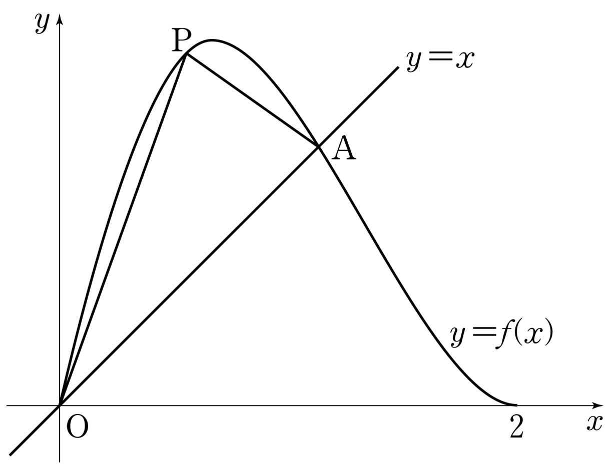
> (가) 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1이다.
> (나) 꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하이다.



267. 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수

$$f(x)=ax(x-2)^2 \left(a>\frac{1}{2}\right)$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자. 점 P가 원점으로부터 점 A까지 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이다. 상수 a의 값은? [4점]

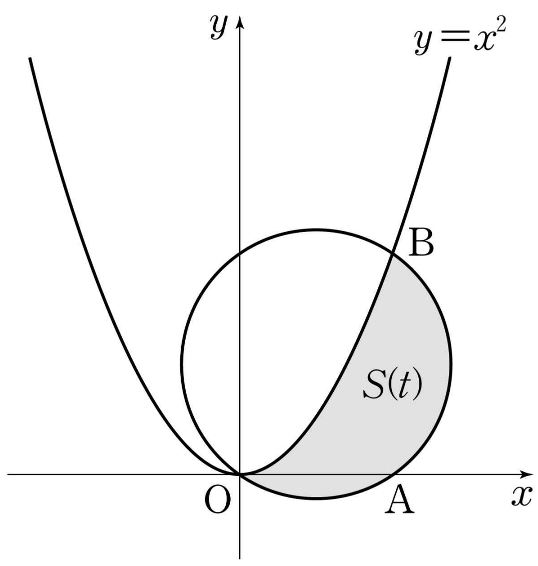


268. 좌표평면에서 두 함수

$$f(x)=6x^3-x, \quad g(x)=|x-a|$$

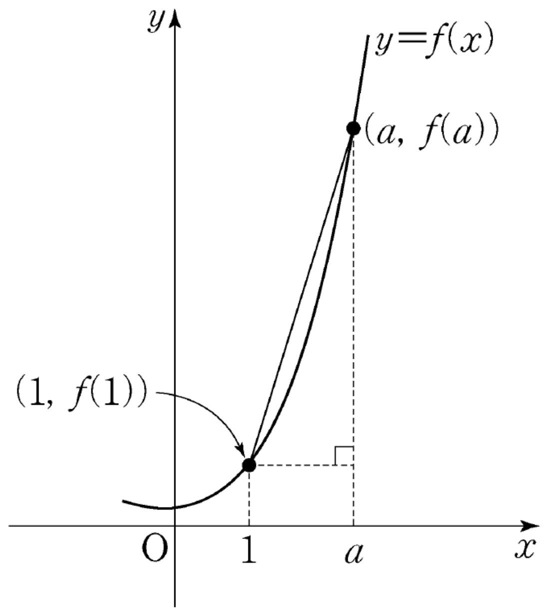
의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

269. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 양수 t에 대하여 세 점 O(0, 0), A(t, 0), B(t, t²) 을 지나는 원 C가 있다. 원 C의 내부와 부등식 $y \le x^2$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(1)=\frac{p\pi+q}{4}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]



[270~280] 2013학년도 6월 모의평가

270. 양의 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다. 1보다 큰 모든 실수 a에 대하여 점 $(1,\ f(1))$과 점 $(a,\ f(a))$ 사이의 거리가 a^2-1일 때, $f'(1)$의 값은? [4점]

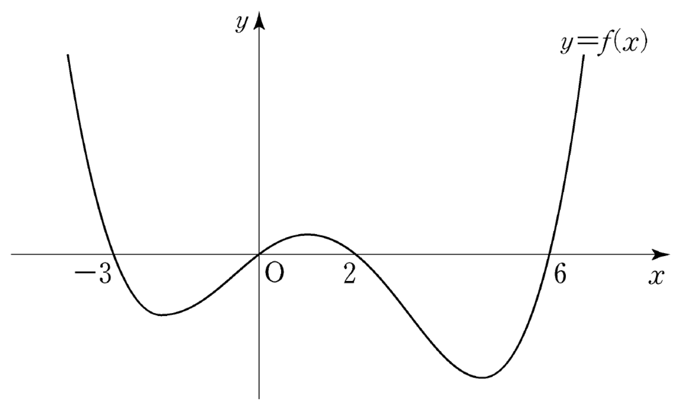


271. 2 보다 큰 자연수 n 에 대하여 $(-3)^{n-1}$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ 의 값은? [4점]

272. 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{k}{n}\right)<0$$

을 만족시키는 정수 m 의 개수는? [4점]

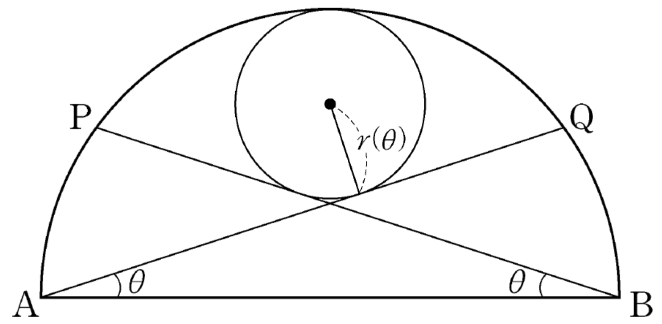


273. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$ 과 실수 m 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할때, m 의 값은? [4점]

274. 그림과 같이 길이가 2 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q 를 $\angle ABP=\angle BAQ=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ 가 되도록 잡는다. 두 선분 AQ, BP 와 호 PQ 에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}=p\sqrt{2}+q$ 이다. p^2+q^2 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]

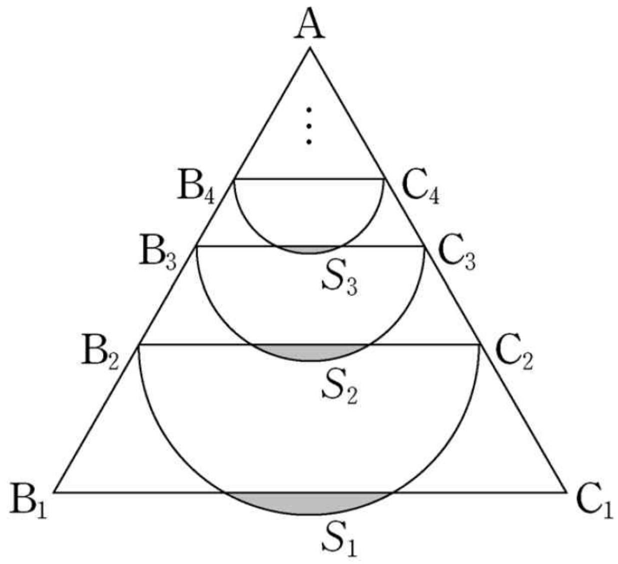


275. 3 보다 큰 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a 라 하자.

> (가) $a \geq 3$
> (나) 두 점 $(2,\ 0)$, $(a,\ \log_n a)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 보다 작거나 같다.

예를 들어 $f(5)=4$ 이다. $\sum_{n=4}^{30} f(n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

276. 한 변의 길이가 3 인 정삼각형 AB_1C_1 이 있다. 그림과 같이 선분 AB_1 과 선분 AC_1 을 $2:1$ 로 내분하는 점을 각각 B_2, C_2 이라 하고, 선분 B_2C_2 를 지름으로 하는 원의 호 B_2C_2 와 선분 B_1C_1 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하자.
정삼각형 AB_2C_2 에서 선분 AB_2 과 선분 AC_2 을 $2:1$ 로 내분하는 점을 각각 B_3, C_3 이라 하고, 선분 B_3C_3 를 지름으로 하는 원의 호 B_3C_3 와 선분 B_2C_2 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 부분의 넓이를 S_n 이라할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [3점]



277. 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (|x|\geq 1) \\ -x & (|x|<1) \end{cases}$ 에 대하여,

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

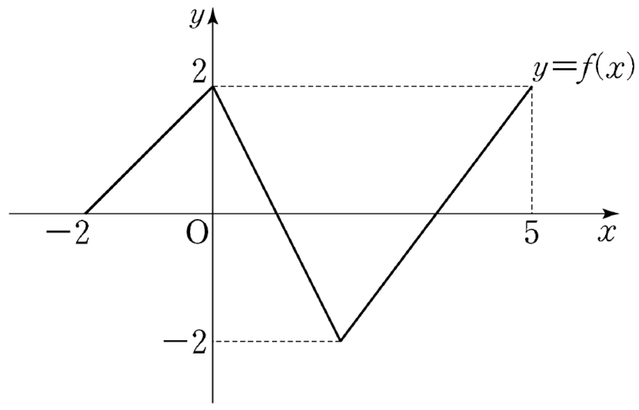
<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$ 가 불연속인 점은 2 개다.

ㄴ. 함수 $(x-1)f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

278. 닫힌 구간 $[-2,\ 5]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=1$ 을 만족시키는 상수 a 의 개수는? [4점]

279. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 2$ 이고, $n \geqq 1$ 일 때, a_{n+1} 은

$$\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$$

을 만족시키는 자연수 k 의 개수이다. a_{10} 의 값을 구하시오. [4점]

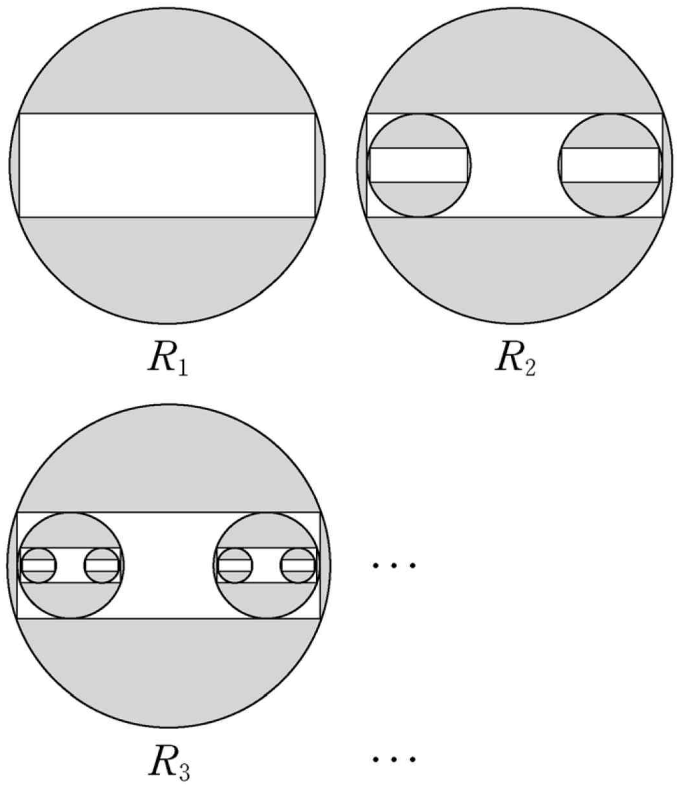
280. 방정식

$$4^x + 4^{-x} + a(2^x - 2^{-x}) + 7 = 0$$

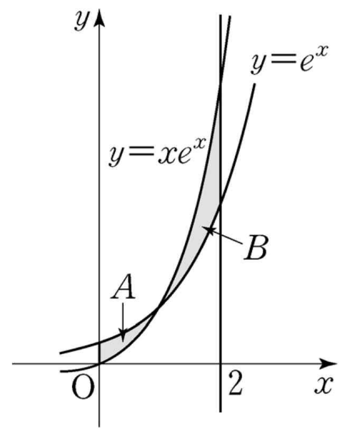
이 실근을 갖기 위한 양수 a 의 최솟값을 m 이라 할 때, m^2 의 값을 구하시오. [4점]

[281~290] 2012학년도 대수능

281. 반지름의 길이가 1 인 원이 있다. 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 3 : 1 인 직사각형을 이 원에 내접하도록 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에서 직사각형의 세 변에 접하도록 원 2 개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
그림 R_2 에서 새로 그려진 직사각형의 세 변에 접하도록 원 4 개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



282. 그림에서 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$ 과 y 축으로 둘러싸인 부분 A 의 넓이를 a, 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$ 과 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분 B 의 넓이를 b 라 할 때, $b-a$ 의 값은? [4점]



283. 정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ 인 함수 $f(x) = 2x\cos x$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f'(a) = 0$ 이면 $\tan a = \frac{1}{a}$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극댓값을 가지는 a 가 구간 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ 에 있다.

ㄷ. 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 방정식 $f(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2 이다.

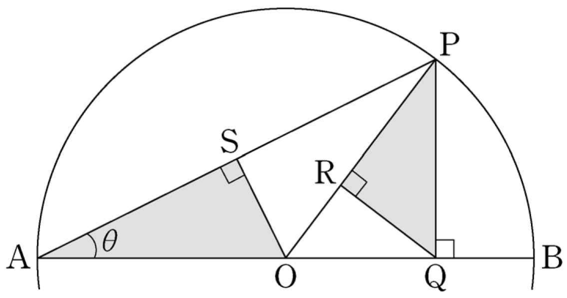
284. 실수 m 에 대하여 점 $(0, 2)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선이 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 과 만나는 점의 개수를 $f(m)$ 이라 하자. 함수 $f(m)$ 이 구간 $(-\infty, a)$ 에서 연속이 되게 하는 실수 a 의 최댓값은? [4점]

285. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2 인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 R, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 S라 하자.

$\angle \mathrm{PAQ} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$ 일 때, 삼각형 AOS의 넓이를 $f(\theta)$,

삼각형 PRQ의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{\theta^2 f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{q}{p}$ 일 때,

$p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q는 서로소인 자연수이다.)



286. 함수 $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$ 에 대하여 함수 $F(x)$ 를

$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ 라 하자. 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$F(g(x)) = \frac{1}{2}F(x)$$

를 만족시킨다. $g'(2) = p$ 일 때, $30p$ 의 값을 구하시오. [4점]

287. 자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^x$이 직선 $x=t$ $(t \geq 1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.
다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. 예를 들어, $a=4$, $b=5$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2 \leq a \leq 10$, $2 \leq b \leq 10$
(나) $t \geq 1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} \leq 10$이다.

288. 이차함수 $f(x)$는 $f(0)=-1$이고,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

를 만족시킨다. $f(2)$의 값은? [4점]

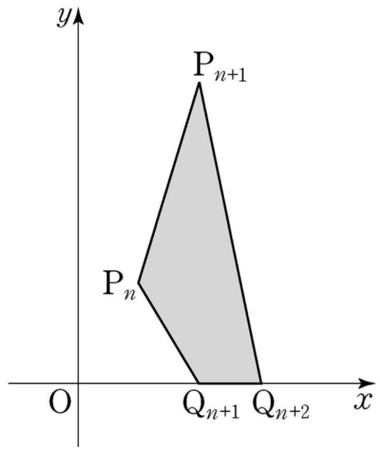
289. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4 일 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

290. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 점 $\mathrm{P_n}$의 좌표를 $(n,\ 3^n)$, 점 $\mathrm{Q_n}$의 좌표를 $(n,\ 0)$ 이라 하자.

사각형 $\mathrm{P_nQ_{n+1}Q_{n+2}P_{n+1}}$의 넓이를 a_n 이라 할 때,

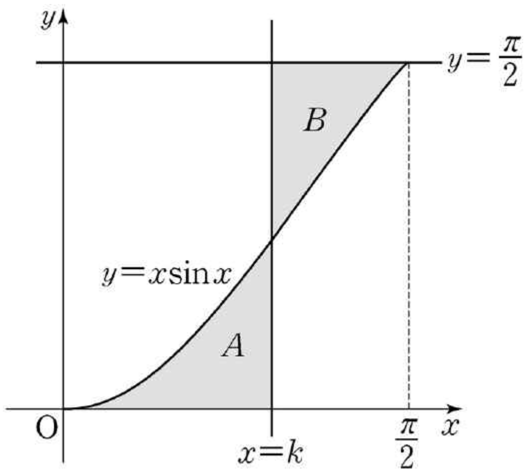
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{q}{p}$ 이다. p^2+q^2 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



[291~294] 2012학년도 9월 모의평가

291. 그림과 같이 곡선 $y=x\sin x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 이 곡선과 x축, 직선 $x=k$로 둘러싸인 영역을 A, 이 곡선과 직선 $x=k$, 직선 $y=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값은? (단, $0 \leq k \leq \frac{\pi}{2}$) [4점]



292. 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [4점]

(가) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=1$
(나) $\cos x\int_0^x f(t)dt=\sin x\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt \left(단, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

293. 삼차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

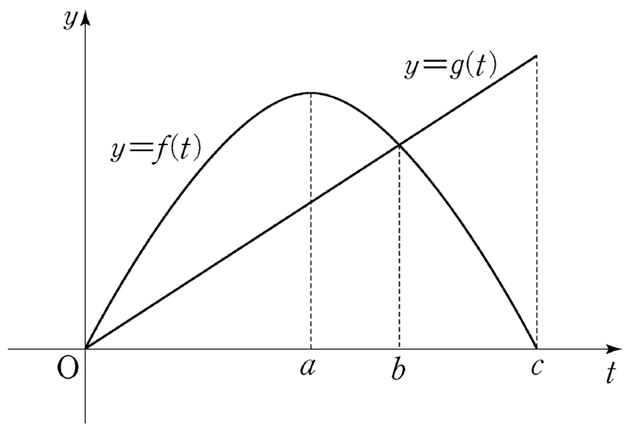
(가) 방정식 $f(x)-x=0$이 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 갖는다.
(나) $x=3$일 때 극값 7을 갖는다.
(다) $f(f(3))=5$

$f(f(x))$를 $f(x)-x$로 나눈 몫을 $g(x)$, 나머지를 $h(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. α, β, γ는 방정식 $f(f(x))-x=0$의 근이다.
ㄴ. $h(x)=x$
ㄷ. $g'(3)=1$

294. 같은 높이의 지면에서 동시에 출발하여 지면과 수직인 방향으로 올라가는 두 물체 A, B가 있다. 그림은 시각 t $(0 \leq t \leq c)$ 에서 물체 A의 속도 $f(t)$와 물체 B의 속도 $g(t)$를 나타낸 것이다.



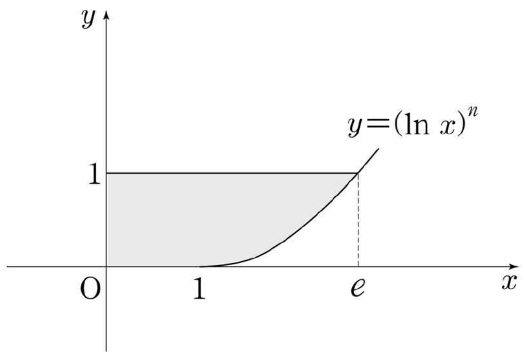
$\int_0^c f(t)\,dt=\int_0^c g(t)\,dt$ 이고 $0 \leq t \leq c$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $t=a$ 일 때, 물체A는 물체B보다 높은 위치에 있다.
ㄴ. $t=b$ 일 때, 물체A와 물체B의 높이의 차가 최대이다.
ㄷ. $t=c$ 일 때, 물체A와 물체B는 같은 높이에 있다.

[295~300] 2012학년도 6월 모의평가

295. 2이상의 자연수 n 에 대하여 곡선 $y=(\ln x)^n\ (x \geq 1)$ 과 x 축, y 축 및 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n 이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $1 \leq x \leq e$ 일 때, $(\ln x)^n \geq (\ln x)^{n+1}$ 이다.

ㄴ. $S_n < S_{n+1}$

ㄷ. 함수 $f(x)=(\ln x)^n\ (x \geq 1)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면 $S_n = \int_0^1 g(x)\,dx$ 이다.

296. 정의역이 $\{x \mid x > -1\}$ 인 함수 $f(x)$ 에 대하여

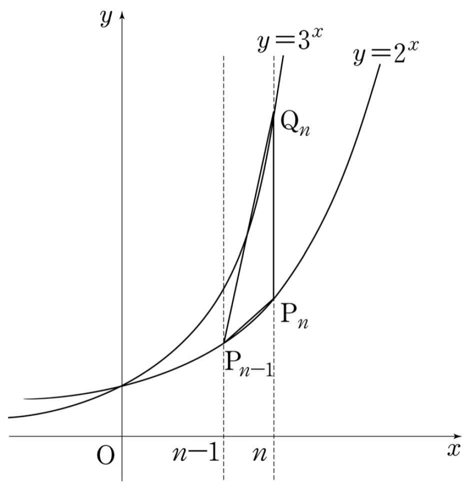
$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^3)^2}$$

이고, 함수 $g(x)=x^2$ 일 때,

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx = \frac{1}{6}$$

이다. $f(1)$ 의 값은? [4점]

297. 자연수 n 에 대하여 직선 $x=n$ 이 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$ 과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n 이라 하자. 삼각형 $P_nQ_nP_{n-1}$ 의 넓이를 S_n 이라 하고, $T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k$ 라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{3^n}$ 의 값은? (단, 점 P_0 의 좌표는 $(0,\ 1)$ 이다.) [4점]



298. 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

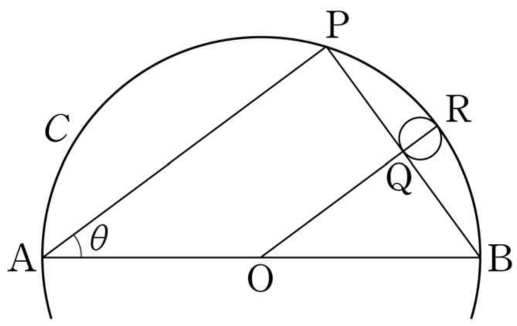
$$f(x)=\frac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)$$

에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 점 $(2,2)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=x$ 의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.
ㄷ. 함수 $|f(x)-g(x)|$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

299. 중심이 O이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝으로 하며 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 그림과 같이 원 C 위의 점 P에 대하여 점 O를 지나고 직선 AP와 평행한 직선이 선분 PB와 만나는 점을 Q, 호 PB와 만나는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{PAB} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 Q와 점 R를 지름의 양 끝으로 하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta^4} = \frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{QR}} < 1$이고, p와 q는 서로소인 정수이다.) [4점]



300. 100 이하의 자연수 전체의 집합을 S라 할 때, $n \in S$에 대하여 집합 $\{k \mid k \in S$이고 $\log_2 n - \log_2 k$는 정수$\}$의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(10) = 5$이고 $f(99) = 1$이다. 이때, $f(n) = 1$인 n의 개수를 구하시오. [4점]

1	ㄱ, ㄴ	26	$-\frac{1}{4}$	51	2	76	$\frac{125}{12}$
2	$\frac{441}{115}$	27	105	52	5	77	ㄱ, ㄴ, ㄷ
3	2	28	3π	53	64	78	14
4	130	29	16	54	11	79	30
5	$\frac{15}{2}$	30	$\ln 4$	55	$\log 2+\log 3$	80	162
6	16	31	ㄱ, ㄴ, ㄷ	56	$\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$	81	19
7	92	32	$\frac{27\sqrt{3}}{46}$	57	ㄱ, ㄴ	82	$\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$
8	60	33	162	58	728	83	$\frac{1}{2}$
9	13	34	7	59	7	84	ㄱ, ㄴ, ㄷ
10	72	35	15	60	51	85	$\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$
11	29	36	331	61	$\frac{2}{\ln 2}$	86	27
12	27	37	58	62	15	87	2π
13	$\sqrt{6}$	38	38	63	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	88	18
14	39	39	7	64	2	89	$\frac{5}{13}$
15	e^2	40	2	65	93	90	117
16	28	41	ㄱ, ㄷ	66	$\frac{2(3-\sqrt{3})}{5}$	91	5
17	ㄱ, ㄴ	42	72	67	ㄱ, ㄴ, ㄷ	92	$\frac{5}{2}$
18	11	43	25	68	75	93	$\frac{\pi^2}{2}$
19	4	44	26	69	42	94	ㄱ, ㄴ
20	9	45	14	70	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	95	16
21	23	46	$\frac{1}{4}$	71	$e^{\pi}+1$	96	10
22	43	47	12	72	ㄱ, ㄴ, ㄷ	97	30
23	6	48	5	73	$-\frac{\sqrt{e}}{4}$	98	ㄱ, ㄴ
24	2	49	$3^{\frac{2}{3}}$	74	40	99	$5-\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{35}{36}\pi$
25	$\frac{29}{6}$	50	ㄱ, ㄴ, ㄷ	75	12	100	46

101	8	126	-50
102	40	127	6
103	1	128	3
104	3	129	$\frac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$
105	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$	130	-3
106	99	131	ㄱ, ㄴ
107	16	132	10
108	3	133	200
109	$\frac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$	134	$-\frac{11}{4}$
110	ㄱ, ㄷ	135	2
111	20	136	-9
112	65	137	51
113	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	138	34
114	$\ln 17$	139	20
115	$\frac{1}{16}$	140	16
116	$\frac{1}{(e-1)(e+1)}$	141	$\frac{9\sqrt{3}+6\pi}{16}$
117	21	142	$\frac{3}{2}$
118	10	143	13
119	$\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$	144	243
120	ㄱ, ㄷ	145	$\frac{1}{8}$
121	32	146	2
122	9	147	ㄱ, ㄴ, ㄷ
123	8	148	$1+2\sqrt{2}$
124	4	149	216
125	$e-2$	150	-15

151	$\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$	176	$\frac{25}{17}(\pi+3)$
152	4	177	$2+\sqrt{5}$
153	ㄱ, ㄴ, ㄷ	178	$\frac{97}{12}$
154	32	179	30
155	16	180	35
156	65	181	1
157	$\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$	182	$\frac{1}{5}$
158	$\frac{20}{3e^4}$	183	21
159	4	184	97
160	48	185	45
161	$\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$	186	$(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$
162	440	187	$\frac{\pi}{2}$
163	ㄱ, ㄴ, ㄷ	188	80
164	$\frac{4}{3}$	189	15
165	43	190	$\frac{14}{9}$
166	$\frac{1}{4}(e^2-3)$	191	5
167	$16-5\ln 10$	192	$4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$
168	ㄱ	193	-1
169	15	194	9
170	83	195	52
171	$\frac{125}{41}$	196	25
172	39	197	128
173	ㄱ, ㄴ, ㄷ	198	3
174	186	199	8
175	78	200	120

201	$\frac{4}{3}$	226	π	251	$e-1$	276	$\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$
202	109	227	$2(\pi-2)$	252	$\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$	277	ㄱ, ㄴ, ㄷ
203	96	228	16	253	ㄱ, ㄴ, ㄷ	278	2
204	39	229	72	254	e	279	513
205	10	230	220	255	16	280	36
206	48	231	30	256	573	281	$\frac{5}{4}\pi-\frac{3}{2}$
207	16	232	12	257	ㄱ, ㄷ	282	2
208	120	233	15	258	2	283	ㄱ, ㄴ, ㄷ
209	$\frac{1}{\pi}$	234	$-\frac{11}{28}$	259	40	284	$\frac{15}{4}$
210	$\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$	235	$2+\sqrt{2}$	260	ㄱ, ㄷ	285	65
211	ㄱ, ㄴ	236	12	261	$\frac{1}{3}$	286	24
212	6	237	16	262	$\frac{3}{4}$	287	39
213	127	238	100	263	4	288	11
214	36	239	17	264	-11	289	18
215	4	240	$\frac{11}{2}$	265	12	290	37
216	196	241	103	266	79	291	$\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$
217	$\frac{5}{16}\pi$	242	ㄱ, ㄴ	267	$\frac{4}{3}$	292	$\frac{1}{2}$
218	$\frac{8}{25}$	243	49	268	$-\frac{4}{9}$	293	ㄱ, ㄴ
219	50	244	$\frac{1}{2}e^2$	269	13	294	ㄱ, ㄴ, ㄷ
220	14	245	$2\sqrt{2}$	270	$\sqrt{3}$	295	ㄱ, ㄴ, ㄷ
221	167	246	9	271	$\frac{1}{6}$	296	$\frac{1}{3}$
222	12	247	109	272	7	297	$\frac{3}{4}$
223	10	248	$\frac{40}{61}$	273	-12	298	ㄱ, ㄴ, ㄷ
224	9	249	13	274	8	299	17
225	$\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$	250	11	275	86	300	25


Kice Archive
Ver. 2022