Killer's IDEA - in 수학 I

#1. 거듭제곱근

계산 Tip : "□의 △제곱근"을 보면 ① 뒤부터 읽고 ② 식으로 표현해 계산한다. ⇒ $\sqrt[\triangle]{\square} = x$, 즉 $x^{\triangle} = \square$

↳ 주의 지수법칙으로 지수를 유리수·실수 지수로 바꾸려면 안이 무조건 양수일 때만 가능. → 홀수일 땐 ⊖를 밖으로 뺀 뒤 식으로 쓰기.

IDEA) a의 n제곱근 중에 음의 실수가 존재하도록 함 … n이 홀수일땐 $a<0$ (1개). n이 짝수일땐 $a>0$ (2개 中 1개)

#2. 지수법칙

계산 Tip : 보통 (가). (나) 형으로 두 개의 식이 나오는데, 두 개의 미지수에 두 개의 식이 나오니까 연립하고 소거가 기본이다. (한 문자로 정리 first!)

↳ 주의 유리수 지수는 밑이 양수일 때 성립하므로 밑의 부호에 유의할 것. 수학 I은 특히 숫자조건에 주의★★

IDEA) 1순위는 밑통일이지만 2순위로 지수통일을 시도해야 한다. 이때 지수통일은 구하고자 하는 것을 기준으로 하자. … $a^n \times b^n = (ab)^n$, OR
$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$ 등.

cf.) 최후의 수단으로는 log를 씌우거나 / log로 표현하는 방법이 있다.

IDEA) 집합표현 & 이차함수가 나오면 이차의 대칭성을 이용해 중복되는 집합의 원소를 골라낼 수 있다.

#3. 로그와 밑변환

계산 Tip : 로그 계산식은 밑변환을 어떻게 쓸지부터 고민한다. 이때도 구하고자 하는 것을 기준으로 식 변환!
if 밑변환이 불가능한 경우 같은 값을 미지수로 놓는다. ⇒ $\log_{\alpha}(an) = \log_{\beta}(bn)$에서 $=k$로 놓고 지수로 정리.

#4. 지수함수와 로그함수

계산 Tip : 복잡한 함수 개형일수록 교점에 있는 좌표값을 구하거나 미지수로 놓은 뒤 식에 대입하면 해결된다.
특히 두 G의 교점은 두개의 식이 나올 수 있으므로, 구할 수 있는 모든 식을 쓰고 연립한다.

IDEA) 좌표를 대하는 가장 기본적인 태도: 수선의 발을 내린다.

IDEA) 이등변△을 대하는 태도: ① 꼭지각~밑변 수선 내리기 ⇒ 밑변의 중점 ② 꼭지각~밑변 수선 위에 아무 점 ⇒ 양 끝점까지 거리 ⊜

IDEA) △의 무게중심 : ① 좌표들의 평균 (just 좌표계산) ② 중선들의 교점 (OR 중선의 2:1 내분점)

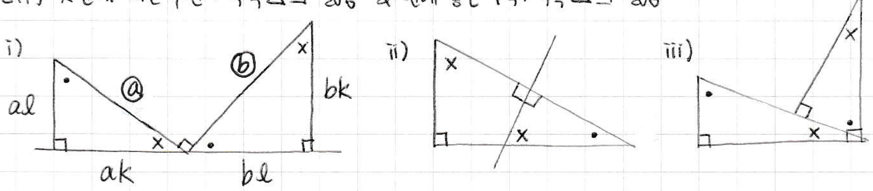
Tip 좌표 간 비율관계 ⇒ x, y축에 수선 내린 뒤 x값, y값의 비율관계로 바꾼다.

Tip 평행선은 관통하는 직선을 중심으로 엇각, 동위각을 관찰한다.

IDEA) log (등비) = (등차)는 log 함수 위의 3개 점을 찾은 뒤, x좌표를 관찰한다. (x좌표가 등비)
단, y축 평·이된 log 함수는 좌표 간 등비/등차 관계 사용 가능 // x축 평·이된 log 함수는 just 계산.

IDEA) 기울기가 ±1인 직선 & 지수·로그 함수: 특수각 45° & 직각이등변△을 이용해 좌표 구하기
특히 기울기가 −1인 직선은 x좌표 + y좌표 합 일정함을 이용하기.

IDEA) 빗변에 내린 수선 : 직각△의 닮음 & 변에 놓인 수직: 직각△의 닮음



↳ 주의 대응변을 잘 찾아야함!
실수로 잘못 대응시켜 비율 쓰면 X.

IDEA) 평행이동과 넓이: 직사각형 (or 평행사변형)으로 바꿔서 넓이 구하기

YEAR MONTH DAY

IDEA) 선대칭이동 : 이등변 △ 이용하기. 점대칭이동: 원 이용하기

예) $\overline{OS}=2\overline{OP}$ 이고 $\angle SOP=90°$ → $P(a.b)$ 일때 $S(-2a.2b)$로 한번에 쓰기 OR 닮음 이용

IDEA) 한 문제에 지수함수 & 로그함수 같이 등장: 서로 역함수 관계임을 쓸 수 있는지 확인하고 $y=x$ 그리기. (특히 밑이 같을 때 의심.)

IDEA) 감소함수인 f와 f^{-1}의 교점 구하기: 직접 G 그리면 X. ① $y=x$ 대칭 표시 ② 기울기가 -1인 직선 그리고 교점 표시.

Tip $f=f^{-1}$ 교점이 단 1개 → $y=x$ 위의 점. 교점수가 짝수 ⇒ f는 증가함수. f가 감소함수 ⇒ 교점 수 홀수.

↳ 주의 지/로/삼/다 사이의 교점좌표는 연립하는 식으로 구할 수 X. just G 관찰만을 이용해야 한다.

5. ㄱㄴㄷ 문제와 지수·로그 G

계산 Tip : ㄱ.ㄴ.ㄷ의 유기적인 연결에 주목하자. ㄱ에서 주는 hint가 ㄴ.ㄷ을 풀때 hint가 될 수 있다.

지수·로그 G를 직접 그릴 땐 (0.0) ~ (1.1)의 한 칸을 크게 그리고, 격자 위주로 관찰한다.

if 부등식에서 한 쪽이 넓이, 다른 쪽이 길이라면 꼭 동일선상으로 맞춘 후에 비교하기.

특히 좌표의 곱은 넓이, 몫은 기울기로 해석하고, 필요에 따라 곱 ⇔ 몫 바꿀 수 있다.

(6평 21번처럼) 좌표를 이용해서 계산하는 관점도 남겨두어야 하므로, 교점은 두개의 연립식으로 먼저 표현해놓는다.

↳ 주의 부등식을 조작할 때 1사분면이 아니거나, 밑이 $0<\square<1$인 경우는 방향을 한번 더 신경써야 한다.

IDEA) $x_1<y_1$ … ① 좌표를 $y=x$을 이용해 x나 y 둘 중 하나로 바꿔서 비교. ② 기울기로 나타내서 비교 ($1<\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_1-0}{x_1-0}$)

Tip 기울기의 비교는 두 G의 교점 이후 오른쪽을 기준으로 비교한다.

IDEA) 좌표끼리의 곱 ⇔ ① 넓이 ② 대수적 비교 (좌표값 비교) ③ 식에 대입해서 비교 (x값의 곱 … log의 진수 활용)

cf.) 좌표끼리의 합은 지수 G의 지수 활용.

IDEA) 좌표끼리의 몫 ⇔ ① 기울기 ② 부등식의 영역 (부등식의 기본틀은 방정식임을 이용)

6. 삼각함수의 주기와 대칭성

↳ 주의 주기/M/m 값 구할 때 $a\sin(\ )$에서 a는 ⊕/⊖ 모두 고려해야 하고, $|a|$로 바꿔서 구한다.

특히 교점의 개수를 구하는 문제는 x의 범위의 경계값 포함 여부를 확인하기.

IDEA) sin은 기함수이므로 $a\cdot\sin bx$의 case 분류는 ① $ab>0$ $(a\sin bx=-a\sin(-bx))$ ② $ab<0$ $(a\sin(-bx)=-a\sin bx)$

cos는 우함수이므로 $a\cdot\sin bx$의 case 분류는 ① $a>0$ $(a\sin bx=a\sin(-bx))$ ② $a<0$ $(-a\sin bx=-a\sin(-bx))$.

Tip $\sqrt{3}.\sqrt{2}.1$과 같은 삼각함수 값이 나와있다면 특수각을 이용하는 문제일 수 있음.

7. 삼각형의 넓이 구하기

계산 Tip : ① $\frac{1}{2}\times$ 밑변 $\times$ 높이 ② if 끼인각 존재 ⇒ $\frac{1}{2}\times ab\times\sin\theta$ ③ if 좌표평면의 △ : i) 축과 평행·수직인 변을 밑변으로 ii) 축과 평행·수직되게 쪼개기

iii) 사선식 (신발끈) 이용하기 (한 꼭짓점이 원점일 때 유리함. if not, 평행이동해서 사선식 쓰기).

8. 삼각 방정식·삼각부등식

계산 Tip : 방정식.부등식 모두 해의 경계는 방정식을 기본으로 한다. → 인수분해 first!

그래프를 이용하거나 단위원을 이용해 x값을 구할 수 있다. (단위원일때, x는 cos 값이고 y는 sin 값이다.) G 우선, 안되면 단위원으로!!

↳ 주의 $A=B$의 식을 항부로 제곱하면 안된다. $A^2=B^2$은 $A=B$과 $A=-B$이기 때문.

IDEA) 구간 내의 실근 개수 / 총합 : 주기성과 대칭성 이용 & 구간 양 끝 값 (열린구간 / 닫힌구간 check)

↳ 주의 삼각방·부등식에서 치환을 이용할 땐 $\sin\theta=t$라 하고, $-1\le t\le 1$라고 써놓고 시작.

IDEA) 이차함수 $f(x)$. $f(\sin x)=f(\cos x)$ ⇒ $\sin x=\cos x$ or 대칭축 대칭관계

YEAR MONTH DAY

#9. sin 법칙

계산 (Tip) : ① 마주보는 두 쌍의 각과 변 ② 외접원 ③ 변의 비 = sin 비 가 제시될 때, sin 법칙을 사용한다.

IDEA) $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ & $A+B+C=\pi$ ⇒ $C=\pi-(A+B)$ → $\sin C = \sin(\pi-(A+B)) = \sin(A+B)$

IDEA) $\frac{1}{2}\times ab\times \sin C = \triangle ABC$ & $c = 2R\cdot\sin C$ ⇒ $\sin C = \frac{c}{2R}$ → $\triangle ABC = \frac{1}{2}\times ab\times\frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$

↳ 주의 각변환 시 부호는 원래 속했던 사분면에 따라 결정한다.

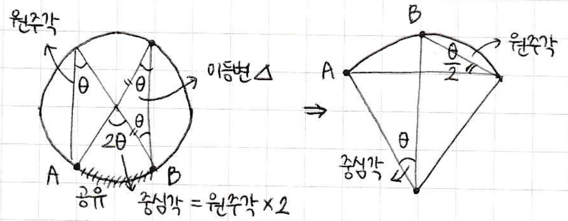
10. cos 법칙

계산 (Tip) : ① 두변 & 끼인각 ⇒ 남은 한 변 구하기 ② 세변 ⇒ 세 내각 구하기 할 때 cos 법칙을 사용한다.

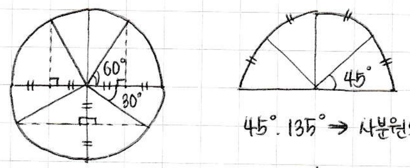
IDEA) 두△이 한 변을 공유하는 경우 : cos 법칙 두번써서 = 로 묶기

11. 도형 종합판단

① 원주각 & 중심각 → 이등변 △ → 부채꼴과 원주각



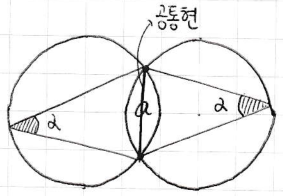
② 원 & 특수각



45°. 135° ⇒ 사분원의 호의 중점

30°. 60°. 120°. 150°
⇒ 반지름의 1/2

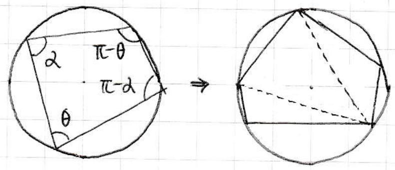
③ 현 & 원주각 → sin 법칙



r이 같은 두원의 원주각 ⊜

⇒ $\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$

④ 원에 내접 □은 마주보는 각의 합 : π

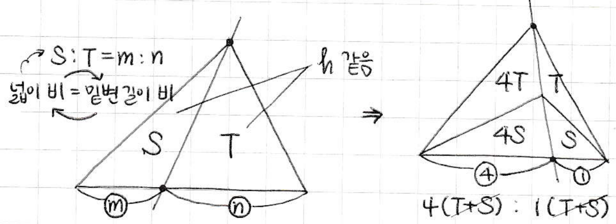


□. ⬠. ⋯ 등은 나눠서!
if 내접 △ → sin 법칙

⑦ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 쓸 때

(sin 값 = ⊕
(cos 값 = 둔각 → ⊖
예각 → ⊕

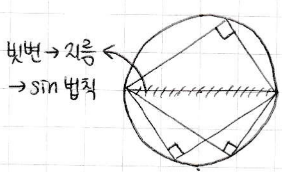
⑤ 삼각형의 내분선 → 길이 비 / 넓이 비



4(T+S) : 1(T+S)

⇒ 전체. 부분 넓이관계 성립!

⑥ 빗변 공유 두 직각 △ : 외접원 그리기 first



⑦ 수선조건 ⇒ 넓이조건으로 사용할 준비 first.

motemote

YEAR MONTH DAY

#12. 등차수열 ~ 등비수열

계산 Tip : 두 등차항이 나오면 간격을 이용해 공차 d를 구한다.

등차수열의 Σ = 상수항이 0인 n에 대한 2차식 = n을 인수로 갖는다 = "(n^2의 계수) $\times 2$ = (공차)" = 대칭성 사용가능 ($\because$ 2차식)

IDEA) 모든 항이 서로 다른 자연수 $\Leftrightarrow$ $d \neq 0$인 자연수. $a_1 > 0$ // 모든 항이 정수인 등차수열 $\Leftrightarrow$ 공차는 정수 $\Leftrightarrow$ 대입해보기

IDEA) $a_n \cdot a_{n+1} \geq 0$ $\Leftrightarrow$ ⊕에서 ⊖로 jump 하지 X $\Leftrightarrow$ $a_n = 0$인 특수한 case 존재.

IDEA) $a_6 = 0$. 공차 > 0 $\Leftrightarrow$ $a_5 < 0$. $a_7 > 0$ $\Leftrightarrow$ $S_5 + \cancel{a_6} = S_6$ $\Leftrightarrow$ $S_{5.5}$가 대칭축 $\Leftrightarrow$ $S_{11} = 0$ (in G)

IDEA) 등차 $\Sigma = 0$ $\Leftrightarrow$ 정중항 $= 0$ (항의 개수가 홀수일 때). 정중앙 기준으로 부호 반대

IDEA) 더 이상 조건이 안 남음 & 방정식(관계식) 존재 + 정수/자연수 조건 $\Rightarrow$ 부정방정식 $\rightarrow$ 대입해서 해결

IDEA) 등차수열의 재구성 : 상수곱/합/차. // 등비수열의 재구성 : 상수곱/<u>합/차</u>(등비 같을때만)/곱/몫

IDEA) $A = B = C$ 꼴은 두개씩 나눠서 계산한다. $A = B$ or $B = C$.

IDEA) 일정한 비율로 커지거나 작아지는 길이/넓이 $\rightarrow$ 등비수열

길이비 $a : b$ $\Rightarrow$ 길이의 공비 $\frac{b}{a}$. 넓이의 공비 $\frac{b^2}{a^2}$

IDEA) (G에서) 한 직선 위에 있음 $\Leftrightarrow$ $\tan\theta$ 값(기울기) 모두 동일

IDEA) just "수열"이라고 제시 : ① n에 관한 식으로 등차·등비인지 판단 ② 직접 써보고 규칙성 판단 ③ a_n, S_n 관계 사용 ($a_1 = S_1$ 잊지말 것!)

IDEA) 시그마의 용도 : ① 자연수의 거듭제곱의 합 ② 수열의 합의 표현 $\Rightarrow$ just 써보기 $\rightarrow$ 주의 적어도 3개 까지는 특수항으로 간주. 성급한 일반화 금지.

③ $\Sigma(*) = (n$의 식$)$ $(n \geq 1)$ $\Rightarrow$ (n의 식) $= S_n$라 하고 a_n. S_n 관계 사용 $\rightarrow$ 주의 첫째항 특수항인지 check.

IDEA) 교대급수 : ① $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$. ② $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+2}) = a_1 + a_2 - a_{n+1} - a_{n+2}$ 주의 if 분자차 $\neq$ 분모차 : $\frac{1}{B-A}$ 쓰기!

③ $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1} - a_k}{a_k \cdot a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}$ ④ $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+2} - a_k}{a_k \cdot a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+2}}\right) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}}$

IDEA) 등차·등비 관계 : 등차 $b_n \rightarrow c^{b_n}$ = 등차 // 등비 $a_n \rightarrow \log_c a_n$ = 등차

IDEA) $(-1)^n$: 홀수 or 짝수로 나눠 생각

IDEA) 수열의 귀납적 정의 : ① no 점화식 : 등차/등비 $\Rightarrow$ 점화식 작성, 그 외 $\Rightarrow$ 직접 써서 원하는 항 구하기

② 점화식 O
- 항 모두 나열해서 원하는 항 구하기 (항수 작을 때) : $\rightarrow$ or $\leftarrow$ (순행 / 역행)
  - ↳ IDEA) 주기수열일때 큰 항이 작은 항에 대응되는 경우 (역행).
- 처음 몇개 나열해서 등차 / 등비 / 주기 규칙성 찾기 (항수 클 때) : 꼭 첫째항부터 나열할 필요는 X.
  - ↳ 주의 계산구조를 살려서 나열해야 규칙찾기 용이하다.
- 변변합 / 곱

IDEA) $a_n = a_{n-1} \times f(n)$ 꼴은 $a_n = a_1 \times \{f(1) \times f(2) \times \cdots \times f(n-1) \times f(n)\}$