2021학년도 수능 (가) 수학

해설.

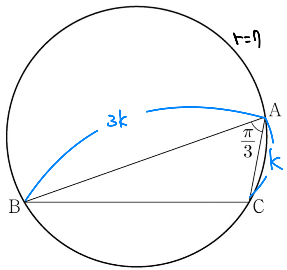
2021.01.08

심상범

10. $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3:1$ 인 삼각형 ABC가 있다.
익숙한 각
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때,
선분 AC의 길이는? [3점] 외접원? → 사인법칙!

① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

V



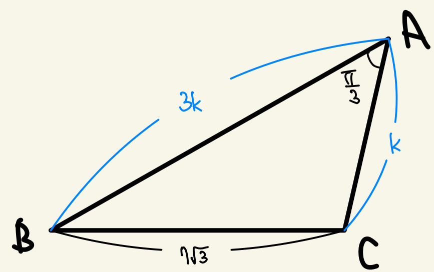
우선 조건 중 외접원의 반지름을 줬다는 것은 사인법칙을 사용할 것이라는 강한 표시이다.

외접원의 반지름이 7이고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 이므로 사인법칙을 사용하여 $\angle A$와 마주보는 $\overline{BC}$의 길이를 구할 수 있다.
사인법칙은 서로 마주보는 두 친구끼리

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle A)} = 2 \times 7$$

$$\overline{BC} = \sin(\angle A) \times 14 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14 = 7\sqrt{3}$$

현재 우리가 구한 정보들을 다시 추합하여 그림을 그려보자.



우리가 구해야 하는 것은 k 값이고 삼각형 세 변의 길이를 모두 나타낼 수 있고 하나의 각이 있으므로 코사인법칙을 사용하여 해결해보자.
↳ 코사인법칙은 피타고라스 정리의 일반화
세각이 60°

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\frac{\pi}{3}$$

$$49 \cdot 3 = 9k^2 + k^2 - 2 \cdot 3k \cdot k \cdot \frac{1}{2}$$

$$147 = 10k^2 - 3k^2 = 7k^2 \qquad k^2 = 21 \qquad \overline{AC} = k = \sqrt{21}$$

$\boxed{답 : \sqrt{21}}$

13. $\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

특이하네.

<보 기>

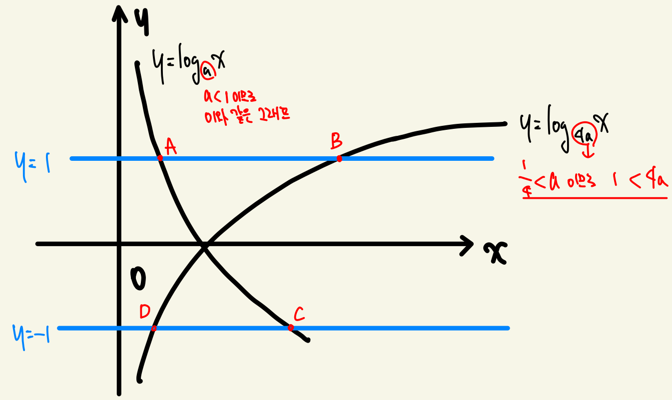
ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $(0, 1)$이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{AB}<\overline{CD}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 본문에 있는 정보들을 직접 그림으로 그려서 눈에 보기 편하도록 하자.



이 문제에서 대부분 물어보는 것은 좌표, 거리이므로 점 A,B,C,D의 좌표를 정리해주자.

$A(a, 1)$　$B(4a, 1)$　$C(\frac{1}{a}, -1)$　$D(\frac{1}{4a}, -1)$

$\log_a a=1$이므로　$\log_{4a} 4a=1$이므로　$\log_a \frac{1}{a}=-1$이므로　$\log_{4a} \frac{1}{4a}=-1$이므로

ㄱ. 선분 AB를 내분하기 위해서는 점 A와 점 B의 좌표를 이용하면 된다.

$A(a, 1)$　$B(4a, 1)$

$1:4$ 외분점

$$P\left(\frac{1\cdot 4a-4a}{1-4}, \frac{1\cdot 1-4\cdot 1}{1-4}\right)=P\left(\frac{0}{-3}, \frac{-3}{-3}\right)=P(0, 1)$$ (옳은 선지다)

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이려면 A와 D의 x좌표가 서로 같고 B와 C의 x좌표가 서로 같아야 한다.

직사각형은 90°가 있어야 하고 $y=1$, $y=-1$과 수직이려면 y축에 평행한 직선이 필요하다.

$\underbrace{a}_{A\text{의 }x\text{좌표}}=\underbrace{\frac{1}{4a}}_{D\text{의 }x\text{좌표}}$　　$\underbrace{4a}_{B\text{의 }x\text{좌표}}=\underbrace{\frac{1}{a}}_{C\text{의 }x\text{좌표}}$

$a=\frac{1}{2}$　　$a=\frac{1}{2}$ → 옳은 선지이다!

~~ㄷ~~. 선분 AB와 선분 CD를 좌표를 이용하여 구하고 이를 풀자.

$\overline{AB}=\underbrace{4a-a}_{x\text{값들의 차}}=3a$　　$\overline{CD}=\underbrace{\frac{1}{a}-\frac{1}{4a}}_{x\text{값들의 차}}=\frac{3}{4a}$

y값이 같으므로 x값의 차만 본다.

$3a<\frac{3}{4a}$　$12a^2<3$　$a^2<\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ + $\underbrace{\frac{1}{4}<a<1}_{\text{문제의 조건}}$ → $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$　이 친구는 거짓!

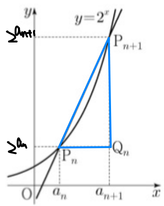
답: ③

16. 상수 $k(k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고
> 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 $P_n(a_n, 2^{a_n})$, $P_{n+1}(a_{n+1}, 2^{a_{n+1}})$을
> 지나는 직선의 기울기는 $k\times 2^{a_n}$이다.

수열 a_n으로 표현가능.

점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n이라 하고 삼각형 $P_nQ_nP_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 하자.



다음은 $a_1=1$, $\frac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.

> 두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기가 $k\times 2^{a_n}$이므로
> $$2^{a_{n+1}-a_n}=k(a_{n+1}-a_n)+1$$
> 이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은 방정식 $2^x=kx+1$의 해이다.
> $k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이고, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.
> 점 Q_n의 좌표가 $(a_{n+1}, 2^{a_n})$이므로
> $$A_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$$
> 이다. $\frac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 $\boxed{(가)}$이고,
> 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
> $$a_n=\boxed{(나)}$$
> 이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+\frac{g(4)}{f(2)}$의 값은? [4점]

① 118 ② 121 ③ 124 ④ 127 ⑤ 130

수열. a_n을 문제에서 정의하였고 곡선 $y=2^x$의 점을 수열로 표현하여 문제를 시작하였다.
첫번째 박스와 두번째 박스 사이에서 a_n을 이용하여 새로운 수열 A_n을 정의하였다.
그리고 문제를 풀어나갈 실마리를 2개 주었다.

이제 두번째 박스안의 내용을 살펴보자.
두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기를 문제에서 정의해주었고 두 점의 좌표를 알고 있으므로 이를 식으로 써보면 아래와 같다. $k\cdot 2^{a_n}$

$P_n(a_n, 2^{a_n})$, $P_{n+1}(a_{n+1}, 2^{a_{n+1}})$ 이므로 기울기는 $\frac{2^{a_{n+1}}-2^{a_n}}{a_{n+1}-a_n}$ 이다. $=k\cdot 2^{a_n}$ (문제에서 준다)

$2^{a_{n+1}}-2^{a_n}=k\cdot 2^{a_n}(a_{n+1}-a_n)$ $\downarrow \div 2^{a_n}$

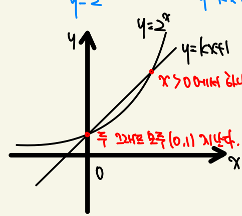
$2^{a_{n+1}-a_n}-1=k(a_{n+1}-a_n)$

$2^{a_{n+1}-a_n}=k(a_{n+1}-a_n)+1$

이 상황에서 $a_{n+1}-a_n$를 x라고 한다면 식을 아래와 같이 바꿀 수 있다.

$2^x=kx+1$

$y=2^x$ $y=kx+1$로 나눠서 교점을 생각해보자.



여기서 두 그래프의 교점인 x는 이어진 두 수열간의 차이이다.
문제에서 분명. $a_n<a_{n+1}$ 라고 하였기에 차이가 0일때는 불가능하고 교점의 x좌표 하나만을 값으로 가진다.
그것이 수열 a_n의 공차이다. → 수열 a_n은 등차수열이며 공차는 d라고 하자.

점 Q의 좌표가 $(a_{n+1}, 2^{a_n})$이므로 A_n을 정의할 수 있다.

$A_n=\frac{1}{2}\cdot\overline{P_nQ_n}\cdot\overline{P_{n+1}Q_n}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$

문제에서 $\frac{A_3}{A_1}=16$이라고 하였으므로 값을 대입해보자.

$\frac{A_3}{A_1}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{(a_4-a_3)}(2^{a_4}-2^{a_3})}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{(a_2-a_1)}(2^{a_2}-2^{a_1})}=\frac{2^{1+3d}-2^{1+2d}}{2^{1+d}-2^1}=\frac{2^{1+2d}\cancel{(2^d-1)}}{2\cancel{(2^d-1)}}=2^{2d}=16$

a_n은 등차수열이므로 같다.

$\frac{A_3}{A_1}=16$

$\boxed{d=2=(가)}$

수열에 대한 첫 항과 공차를 모두 알게 되었으므로 일반항을 작성해보자.

$\boxed{a_n=2n-1=1+2(n-1)=(나)}$

그렇다면 A_n로 구할 수 있다. → a_n으로 이루어져있었으므로

$A_n=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\{2^{2(n+1)-1}-2^{2n-1}\}=2^{2n+1}-2^{2n-1}=2^{2n-1}(2^2-1)$ $\boxed{=3\cdot 2^{2n-1}=(다)}$

$p=2$, $f(n)=2n-1$, $g(n)=3\cdot 2^{2n-1}$이므로 $p+\frac{g(4)}{f(2)}$를 구해보자.

$=2+\frac{\cancel{3}\cdot 2^7}{\cancel{3}}=2+2^7=2+128$
$=130$

답: ⑤

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
>
> (나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91　V ② 92　③ 93　④ 94　⑤ 95

고난이도 수열 문제의 특징인 무엇부터 해야할지 모르는 상태에서 시작하자.

조건 2개가 주어져있고 이 두 조건을 통해 a_{2n}과 a_{2n+1}의 관계를 식으로 쓸 수 있다.

$$a_{2n} = a_2 \cdot a_n + 1$$

$$a_{2n+1} = a_2 \cdot a_n - 2 = (a_2 \cdot a_n + 1) - 3 = \underline{a_{2n} - 3}$$

$$a_{2n+1} = a_{2n} - 3$$

주어진 식인 $a_8 - a_{15} = 63$을 조건들을 통해 최대한 단순하게 만들어보자.

$$a_8 = a_2 \cdot a_4 + 1 \qquad a_4 = a_2 \cdot a_2 + 1$$

$$= a_2 \cdot (a_2 \cdot a_2 + 1) + 1$$

$$= \underline{a_2^3 + a_2 + 1}$$

$$a_{15} = a_2 \cdot a_7 - 2 \qquad a_7 = a_2 \cdot a_3 - 2$$

$$= a_2(a_2 \cdot \underline{a_3} - 2) - 2$$

a_2만 있어야 정리가 쉬운데.... → 그러면 a_2의 형식으로 바꿔주자.

(가) $a_{2\times1} = a_2 \cdot a_1 + 1$

(나) $a_{2\times1+1} = a_2 \cdot a_1 - 2$

→ $a_3 = a_2 - 3$

$$a_{15} = a_2(a_2 \cdot a_3 - 2) - 2 \qquad a_3 = a_2 - 2$$

$$= a_2\{a_2(a_2 - 3) - 2\} - 2$$

$$= a_2(a_2^2 - 3a_2 - 2) - 2$$

$$= a_2^3 - 3a_2^2 - 2a_2 - 2$$

$$a_8 - a_{15} = (\cancel{a_2^3} + a_2 + 1) - (\cancel{a_2^3} - 3a_2^2 - 2a_2 - 2)$$

$$= 3a_2^2 + 3a_2 + 3 = \underline{63} \qquad a_8 - a_{15} = 63$$

$$a_2^2 + a_2 + 1 = 21$$

$$a_2^2 + a_2 - 20 = 0 \qquad \begin{matrix} -4 \\ +5 \end{matrix}$$

$$\rightarrow (a_2 - 4)(a_2 + 5) = 0$$

$$\underline{a_2 = 4 \text{ or } -5}$$

a_2가 2개의 가능한 후보가 있는데 답은 하나이다.

우리가 문제 조건 중에 <u>사용하지 않은 조건이 하나 있다</u>.

$0 < a_1 < 1$ → a_2를 통해 a_1을 알 수 있으니 체크해보자.

• $a_2 = 4$

$$\underbrace{a_{2\times1}}_{4} = \underbrace{a_2}_{4} \cdot a_1 + 1 \rightarrow a_1 = \frac{3}{4} \ (\text{O})$$

$0 < a_1 < 1$ 이네

• $a_2 = -5$

$$\underbrace{a_{2\times1}}_{-5} = \underbrace{a_2}_{-5} \cdot a_1 + 1 \rightarrow a_1 = \frac{6}{5} \ (\text{X})$$

$0 < a_1 < 1$ 이 아니네

구해야 하는 값을 위해서는 a_8과 a_1을 구하면 된다.

$$a_1 = \frac{3}{4}$$

$$a_8 = a_2^3 + a_2 + 1 = 4^3 + 4 + 1 = 69$$

$$\frac{a_8}{a_1} = \frac{\frac{69}{1}}{\frac{3}{4}} = \frac{\overset{23}{\cancel{69}} \cdot 4}{\cancel{3}} = 92$$

답: ②

25. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 55$일 때,

수열의 종류 + 첫 항

$\sum_{k=1}^{5} k(a_k - 3)$의 값을 구하시오. [3점] 160

수열의 종류와 첫 항을 바로 문제에서 주었기 때문에 우리가 이 수열에 대해서 모르는 정보는 공차뿐이다.

ㄴ공차를 찾아야한다.

첫 항부터 다섯번째 항까지의 합이 55라고 하였으므로 이를 식으로 써보면 아래와 같다.

$$S = \underbrace{\frac{\overset{=3}{a_1} + a_5}{2}}_{=11} \cdot 5 = 55 \rightarrow a_5 = 19$$

$$= \underbrace{a_1}_{=3} + 4\underbrace{d}_{4}$$ 공차가 4네.

수열의 첫 항과 공차를 모두 알아냈으므로 일반항을 잡아보자.

$$a_n = 4n - 1$$
$$= 3 + 4(n-1)$$

그렇다면 우리가 구해야 하는 값도 구할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{5} k(4k-1-3) = \sum_{k=1}^{5} 4k^2 - 4k = 4 \cdot \sum_{k=1}^{5} k^2 - 4 \cdot \sum_{k=1}^{5} k = 4 \cdot \frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 11}{\cancel{6}} - 4 \cdot \frac{5 \cdot \cancel{6}^{3}}{\cancel{2}_{1}}$$
$$= 4 \cdot 55 - 4 \cdot 15$$
$$= 220 - 60 = 160$$

$\boxed{\text{답: } 160}$

27. $\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$의 값이 40 이하의 자연수가 되도록

형태가 복잡... 바꿔주자.

하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점] 13개

주의!

주어진 식을 변형하지 않고서는 이 값이 40이하의 자연수가 되는 n은 구하기 어렵다.

이를 풀기 위하여 주어진 식을 로그의 성질을 활용하여 단순화시켜보자.

$$\frac{n}{m}\log_a b = \log_{a^m} b^n$$

$$\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n} = \log_4 2n^2 - \log_4 \sqrt{n} = \log_4 \frac{2n^2}{\sqrt{n}} = \log_4 2n^{\frac{3}{2}}$$

밑을 4로 할까 2로 할까?

A. $\frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$을 밑을 2로 처리하게는 힘들어보인다.

4로!

정리한 식이 자연수가 되기 위해서는 로그 안에 있는 진수가 4의 거듭제곱 형태이어야 한다.

밑이 4인 로그이니까.

$$\log_4 2n^{\frac{3}{2}} \rightarrow \underbrace{4\text{의 거듭제곱}}_{4^k} (4, 16, 64, \cdots\cdots)$$

$$2n^{\frac{3}{2}} = 4^k$$
$$n^{\frac{3}{2}} = 4^k \cdot \frac{1}{2}$$
$$n = 4^{\frac{2k-1}{3}} \rightarrow$$ 이게 자연수가 되야한다.

$$k = \underbrace{2, 5, 8, \cdots, 35, 38}_{13\text{개}}$$

40 이하인 자연수이므로

$\boxed{\text{답: } 13\text{개}}$