제 2 교시

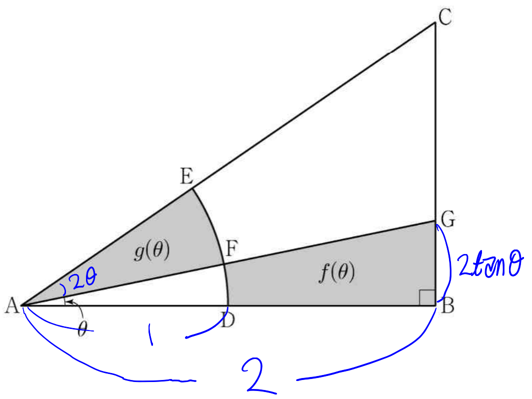
수학 영역

MENTOR

1. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자.
호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자.
$\angle BAG=\theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$)

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 가형 24번]

60



$f(\theta)=(\triangle ABG \text{ 넓이})-(\text{부채꼴 } AFD \text{ 넓이})$

$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\tan\theta-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\theta$

$=\boxed{2\tan\theta-\frac{\theta}{2}}$

$g(\theta)=(\text{부채꼴 } AEF \text{ 넓이})$

$=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta$

$=\boxed{\theta}$

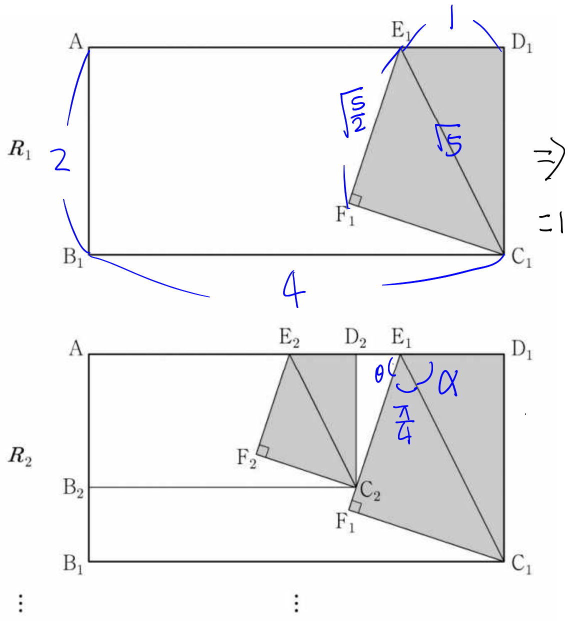
$\therefore \lim_{\theta\to0}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to0}\frac{2\tan\theta-\frac{\theta}{2}}{\theta}=\frac{3}{2}$

$\therefore 40\times\frac{3}{2}=\boxed{60}$

2. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 선분 AD_1을 $3:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다.
사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AE_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$ 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

3

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 가형 14번]



$\Rightarrow S_1 = 1+\frac{5}{4}=\boxed{\frac{9}{4}}$

① $\frac{441}{103}$ ② $\frac{441}{109}$ ③ $\frac{441}{115}$ ④ $\frac{441}{121}$ ⑤ $\frac{441}{127}$

$\theta=\pi-(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{3}{4}\pi-\alpha$, $\tan\alpha=2$

$\tan\theta=\tan(\frac{3}{4}\pi-\alpha)=\frac{-1-\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=3$

$\Rightarrow \overline{E_1D_2}=k$, $\overline{D_2C_2}=3k$

$3k:3-k=1:2$ $\therefore k=\frac{3}{7}$

닮음비 $2:\frac{9}{7}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{넓이비 } 1:\frac{81}{196}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{81}{196}}=\frac{196}{115}\cdot\frac{9}{4}=\boxed{\frac{441}{115}}$

3. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0,\ 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은?

5

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
>
> $$\int_{-1}^{1} h(x)dx=2,\qquad \int_{-1}^{1} xh(x)dx=-\frac{1}{32}$$
>
> 이다.

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 가형 20번]

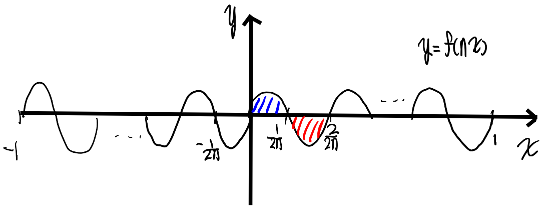
① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$g(x)$의 치역이 $\{0,1\}$ 이라는 조건에서 $g(x)$의 값이 교대될 것이라 예상할 수 있는데, 이와 함께 $h(x)$가 연속이라는 조건도 만족시켜야 한다.

⇒ 연속함수의 성질을 고려해 볼 때,

$g(x)$가 불연속인 지점에서 $f(nx)=0$ 임을 알 수 있다.

$f(nx)=0$ 인 지점은 정해져 있으므로 그 지점에서 $g(x)$의 값이 변할수도, 유지될 수도 있는데, 이 개형을 결정지어주는 조건이 박스 안 첫번째 조건이다.



색칠한 부분 한 개의 넓이를 구해보면,

$$\int_0^{\frac{1}{2n}} f(nx)dx=\int_0^{\frac{1}{2n}}\pi\sin 2\pi nx\,dx=\left[-\frac{1}{2n}\cos 2\pi nx\right]_0^{\frac{1}{2n}}=\boxed{\frac{1}{n}}$$

$[-1,1]$ 구간 내 파란색 구간이 $2n$개, 빨간색 구간이 $2n$개이고, $g(x)=0$인 구간은 $h(x)=0$이고, $g(x)=1$인 구간은 $h(x)=f(nx)$이다.

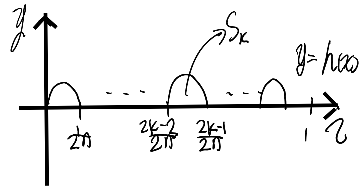
$\int_{-1}^{1}h(x)dx=2$ 라는 조건에서 $h(x)$는 파란색 구간이 $2n$개, 빨간색 구간이 0개라는 것을 알수 있다.

⇒ $[-1,1]$ 구간 내 $f(nx)<0$인 모든 x에 대해 $g(x)=0$이다.

〃 $f(nx)>0$인 모든 x에 대해 $g(x)=1$이다.

$\int_{-1}^{1}xh(x)dx$를 계산하기 위해 $x\geq0,\ x<0$일 때 k 번째 파란색 구간의 넓이를 구하고, $\sum_{k=1}^{n}S_k$를 계산하자.

i) $x\geq 0$



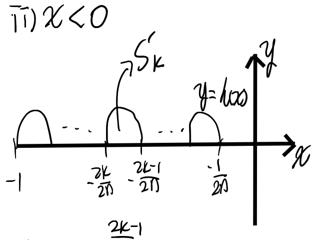
$$S_k=\int_{\frac{2k-2}{2n}}^{\frac{2k-1}{2n}} x\pi\sin 2\pi nx\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2n}x\cos 2\pi nx\right]_{\frac{2k-2}{2n}}^{\frac{2k-1}{2n}}+\int_{\frac{2k-2}{2n}}^{\frac{2k-1}{2n}}\frac{1}{2n}\cos 2\pi nx\,dx$$

$$=\left(\frac{2k-1}{4n^2}+\frac{2k-2}{4n^2}\right)+\left[\frac{1}{4n^2\pi}\sin 2\pi nx\right]_{\frac{2k-2}{2n}}^{\frac{2k-1}{2n}}$$

$$=\boxed{\frac{4k-3}{4n^2}}$$

ii) $x<0$



$$S_k'=\int_{-\frac{2k}{2n}}^{-\frac{2k-1}{2n}} x\pi\sin 2\pi nx\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2n}x\cos 2\pi nx\right]_{-\frac{2k}{2n}}^{-\frac{2k-1}{2n}}+\int_{-\frac{2k}{2n}}^{-\frac{2k-1}{2n}}\frac{1}{2n}\cos 2\pi nx\,dx$$

$$=\left(-\frac{2k-1}{4n^2}-\frac{2k}{4n^2}\right)+\left[\frac{1}{4n^2\pi}\sin 2\pi nx\right]_{-\frac{2k}{2n}}^{-\frac{2k-1}{2n}}$$

$$=\boxed{-\frac{4k-1}{4n^2}}$$

$$\therefore\int_{-1}^{1}xh(x)dx=\sum_{k=1}^{n}(S_k+S_k')=\sum_{k=1}^{n}\frac{-2}{4n^2}=-\frac{1}{2n}=-\frac{1}{32}$$

$$\therefore\ \boxed{n=16}$$

4. 두 상수 a, b $(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

72

> (가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) $h'(3)=2$

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 가형 28번]

$h(x)=(f\circ g^{-1})(x) \rightarrow h(g(x))=f(x)$ 이고,

$g(x)$의 치역이 실수 전체이므로 (가) 조건을 보는 데 지장이 없다.

$g(x)$의 치역이 실수 전체가 아닌데 $(g(x)-1)|h(g(x))|$가 실수 전체에서 미분가능하다고 하고 풀면 $g(x)$의 치역이 아닌 값에 대해 조사하지 못하기 때문에 문제를 풀 수 없거나 불완전하게 풀 수 있다.

(가) 함수 $(x^3+x)|(x-a)(x-b)^2|$은 실수 전체의 집합에서 미분 가능하다. (이 함수를 $k(x)$라 하자.)

위 함수는 $x=a$ 근방에서 절댓값 내부의 부호가 바뀌므로, 함수가 미분가능하려면 $k(a)=0$ 이어야 하므로,

$\boxed{a=0}$ 이어야 함을 추론할 수 있다.

$h(g(x))=f(x)$

$h'(g(x))\cdot g'(x)=f'(x)$

$h'(x^3+x+1)(3x^2+1)=(x-b)^2+2x(x-b)$

$x=1$ 대입

$h'(3)\times 4=(1-b)^2+2(1-b)$, $h'(3)=2$ 대입

$(1-b)^2+2(1-b)-8=0$, $1-b=B$ 치환

$(B+4)(B-2)=0$

$1-b=-4$ or 2 $\therefore b=5$ or -1

$b>a$ 이므로 $\boxed{b=5}$

$f(x)=x(x-5)^2$

$f(8)=8\cdot 9=\boxed{72}$

5. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x) = f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 < x < 1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2) = a + b\sqrt{2}$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)

29

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 가형 30번]

$0<x<1$ 에서 $f(\sin^2\pi x)$는 $x=\frac{1}{2}$ 대칭이므로 $x=\alpha$ $(0<\alpha<\frac{1}{2})$ 에서 $g(x)$가 극대이면 $x=1-\alpha$ 에서도 동일한 극대를 갖는다.

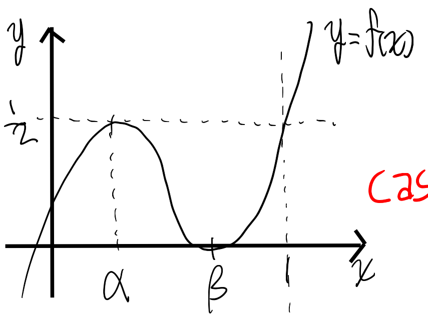
⇒ 극대를 갖는 x의 개수가 3이려면,

$x=\alpha, \frac{1}{2}, 1-\alpha$ $(0<\alpha<\frac{1}{2})$ 에서만 극대를 가져야 한다.

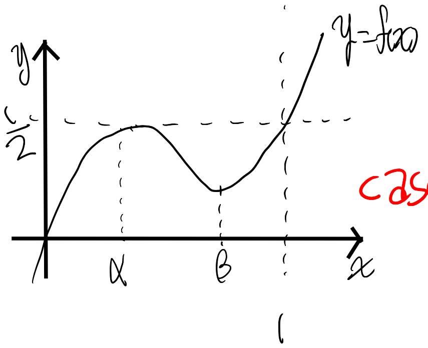
$f(\sin^2\pi x)$는 주기가 1인 주기함수이므로,

$g(x)$의 최대·최소는 $0<x<1$ 에서의 극대, 극소에서 발생한다.

$\Rightarrow g(\alpha)=g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, $g(\beta)=0$ or $g(0)=0$ ($x=\beta$에서 극소)



case 1



case 2

$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta) = 3x^2-3(\alpha+\beta)x+3\alpha\beta$

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)x^2+3\alpha\beta x+C$

$$\boxed{f(\alpha)=\frac{1}{2},\ f(1)=\frac{1}{2} \quad \begin{cases} \text{case1} & f(\beta)=0 \\ \text{case2} & f(0)=0 \end{cases}}$$

case1

$f(\alpha)=-\frac{1}{2}\alpha^3-\frac{3}{2}(\alpha^3+\alpha^2\beta)+3\alpha^2\beta+C = -\frac{1}{2}\alpha^3+\frac{3}{2}\alpha^2\beta+C=\frac{1}{2}$

$f(1) = 1-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)+3\alpha\beta+C=\frac{1}{2}$

$f(\beta) = -\frac{1}{2}\beta^3+\frac{3}{2}\alpha\beta^2+C=\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}\alpha^3+\frac{3}{2}\alpha^2\beta = -\frac{1}{2}\beta^3+\frac{3}{2}\alpha\beta^2$, $(\beta^3-\alpha^3)=3\alpha\beta(\beta-\alpha)$

$\alpha\neq\beta$이므로 $\beta^2-\alpha\beta+\alpha^2=3\alpha\beta$ ⇒ $\boxed{(\beta-\alpha)^2=0 \quad 모순}$

case 2

$f(0)=C=0$

$f(\alpha)=-\frac{1}{2}\alpha^3+\frac{3}{2}\alpha^2\beta=\frac{1}{2}$, $f(1)=1-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)+3\alpha\beta=\frac{1}{2}$

위 식으로 α, β를 구하기 힘들기 때문에 그래프 개형의 특징을 고려해

$f(x)$를 다시 쓰면,

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-1)+\frac{1}{2}$, $x=0$ 대입

$-\alpha^2+\frac{1}{2}=0$ $\boxed{\therefore \alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $(\alpha>0)$

$f(2)=(2-\frac{\sqrt{2}}{2})^2(2-1)+\frac{1}{2}$

$=4-2\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 5-2\sqrt{2}$

$\boxed{\therefore a^2+b^2=29}$