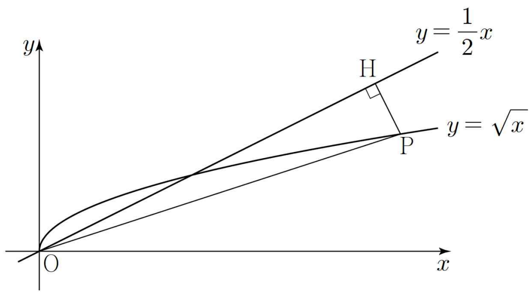
2020년 7월 교육청 나형 13번

13. 곡선 $y = \sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, \sqrt{t})$ $(t > 4)$ 에서 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. $\lim_{t \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{OH}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.)

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$



2020년 7월 교육청 나형 13번 문항 별해 by YoonSol

해당 풀이는 기본적으론 미적분 선택자들을 위한 풀이이나 미적분을 선택하지 않아도 충분히 이해할 수 있는 내용의 해설입니다

sol) 문제에서 물어보는 값이 $\lim_{t \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{OH}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2}$ 입니다.

그런데 그림을 보면 직각삼각형 OPH 가 그려져 있는 것을 확인할 수 있습니다.

만약 $\angle \mathrm{POH} = \theta$ 라 한다면 $\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OP}}}$ 의 값을 $\cos\theta$ 로 해석할 수 있게 됩니다.

θ 에 대해서 직접적으로 주어진 정보는 없지만 θ 가 직선 OH 와 OP 가 이루는 각이라는 것을 통해서 θ 에 대한 정보를 얻어낼 수 있습니다.
직선 OH 와 직선 OP 가 x 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하면
$\theta = \alpha - \beta$ 가 성립하게 됩니다.

$\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $\tan\beta = \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}$

$\therefore\ \tan\theta = \tan(\alpha - \beta)$

원래라면 덧셈정리(미적분 과정입니다)를 이용해서 $\tan\theta$ 의 값을 t 에 대한 식으로 표현해서 극한값을 구할 수 있지만
$t \to \infty$ 일 때, $\tan\beta$ 가 0 으로 수렴하기 때문에 이를 이용해서 직선 OP 가 x 축에 가까워진다고 근사하면 $\alpha - \beta \approx \alpha$ 로 근사할 수 있습니다.

즉 $t \to \infty$ 일 때, $\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) \approx \tan\alpha = \frac{1}{2}$ 이 되므로 $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 가 됩니다.

$$\therefore\ \lim_{t \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{OH}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2} = \lim_{t \to \infty} \cos^2\theta = \frac{4}{5}$$