2021학년도 수능 나형 - 수학Ⅰ

해설.

2021.01.04

실 상 벌.

다른 해설지와 달리 읽는 자료이므로 처음부터 차근차근 봐주시면 감사하겠습니다.

4. 함수 $f(x) = 4\cos x + 3$ 의 최댓값은? [3점]

너가 관건이구나! (변수)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f(x)$ 안에 있는 $\cos x$ 의 최댓값이 1이라는 것은 우리가 알고 있다. ($\cos$, $\sin$의 최댓값은 1) 참고!

$4\cos x$ 뒤의 $+3$은 전체 함수의 최대, 최소에 영향을 끼치지 않으므로 $4\cos x$ 의 최댓값에 더해주자.

단순히 모든 함숫값이 3 커졌다!

$\cos x$ 의 최댓값이 1이므로 $4\cos x$ 의 최댓값은 4이고 이에 3을 더해준 것이 $f(x)$의 최댓값이 된다.

$$\boxed{f(x)\text{의 최댓값} = 4 \times \underbrace{1}_{\cos x\text{의 최댓값}} + 3 = 7}$$

답: ②

7. 부등식 $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x}$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수는? [3점]

옆을 보니 3으로 밑을 통일해야겠다.

주의! 주의!

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

우선 주어진 식이 지수함수와 비슷한 형태를 띄고 있다는 것을 볼 수 있다.

이런 식을 효율적으로 처리하기 위해서는 지수를 통일하거나 밑을 통일해줘야 한다.

우변의 지수를 보니 이거는 어렵겠다.

그러면 마침 9와 3이니 이 방법으로 해보자.

마침 밑이 9와 3이므로 밑을 3으로 통일해보자.

$\left(\frac{1}{9}\right)^x = 9^{-x} = (3^2)^{-x} = 3^{-2x}$

3^{21-4x} 이미 밑이 3이네.

$3^{-2x} < 3^{21-4x}$ → 지수의 수가 클수록 전체 수가 커진다.

└ 밑이 1보다 크므로, $y = 3^x$는 증가함수이다.

$-2x < 21 - 4x$

$2x < 21$

$x < \frac{21}{2} = 10.5$

└ x는 자연수이므로 $1 \sim 10$ ⇒ 10개

답: ⑤

10. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\underline{\sum_{k=1}^{5} a_k = 8}, \quad \underline{\sum_{k=1}^{5} b_k = 9}$$

셋 다 동일하네 a_k와 b_k에 대한 정보

↓ 로 나누기 가능

일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k - b_k + 4)$의 값은? [3점]

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27 V

수열 a_k와 수열 b_k의 1~5항의 합이 주어져 있고 구하는 수열이 1~5항인 것을 보아 주어진 조건을 활용할 것 같다.

우선 우리가 구해야 하는 수열을 시그마의 성질을 이용하여 나누어보자.

$$\sum_{k=1}^{m}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{m} a_k \pm \sum_{k=1}^{m} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{5}(2a_k - b_k + 4) = \sum_{k=1}^{5} 2a_k - \sum_{k=1}^{5} b_k + \sum_{k=1}^{5} 4$$

4가 5개? $4 \times 5 = 20$

$$= 2\underbrace{\sum_{k=1}^{5} a_k}_{\text{조건에서 8이라며}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{5} b_k}_{\text{조건에서 9라며}} + 20$$

$$= 2 \times 8 - 9 + 20 = 16 - 9 + 20 = 27$$

$\boxed{\text{답: ⑤}}$

12. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

중요한 첫 항

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-n^2+n$$

익숙한 형태는 아니네...

을 만족시킨다. a_{11}의 값은? [3점]

① 88　② 91　③ 94　④ 97　⑤ 100

-수열의 성질 $S_n-S_{n-1}=C_n$ 을 사용한 풀이

수열 a_k-a_{k+1}의 합에 대한 식을 알고 있으므로 우리가 개념 수업 때 배운 $S_n-S_{n-1}=C_n$의 방식을 사용하여 새로운 수열 a_k-a_{k+1}의 일반항을 구할 수 있다.

굉장히 빈번하게 쓰인다.

우리가 구할 수열 a_k-a_{k+1}을 쉽게 b_k라고 하자.

$a_k-a_{k+1}=b_k$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-n^2+n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\underbrace{S_n}_{\text{수열 } b_n\text{의 합}}=-n^2+n$$

$$\underbrace{S_{n-1}}_{S_n\text{을 아니까 } S_{n-1}\text{도 구할 수 있다.}}=-(n-1)^2+(n-1)=-n^2+2n-1+n-1$$

$$=-n^2+3n-2$$

$$S_n-S_{n-1}=b_n=(-n^2+n)-(-n^2+3n-2)$$

$$=\underbrace{-2n+2}_{b_n\text{의 일반항}}$$

수열 b_n의 일반항을 알아냈으므로 몇 개의 수를 대입하여 양상을 살펴보자.

$b_1=a_1-a_2=0$

$b_2=a_2-a_3=-2$

$b_3=a_3-a_4=-4$

$b_4=a_4-a_5=-6$

$\vdots$

$b_n=\underbrace{a_n-a_{n+1}}$

이어진 두 수열 간의 관계네.

$a_1=1$ ↓+0
$a_2=1$ ↓+2
$a_3=3$ ↓+4
$a_4=7$ ↓+6
$\vdots$

규칙성이 보이네.

규칙성을 찾았으니까 수열을 대하는 기본 자세인 '직접 해보자'를 실천하자.

물론 우리가 익숙한 등차·등비는 아니다. 그러므로

$a_1=1$
$a_2=1$
$a_3=3$
$a_4=7$
$a_5=13$
$a_6=21$
$a_7=31$
$a_8=43$
$a_9=57$
$a_{10}=73$
$a_{11}=91$

※ 알고보니?

문제의 조건을 다시 살펴보면 이어진

두 항의 뺄셈을 계속 더하는 것이므로 주어진 식에 $n=10$을 대입해보면

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-a_{k+1})=(a_1-\cancel{a_2})+(\cancel{a_2}-\cancel{a_3})+(\cancel{a_3}-\cancel{a_4})+\cdots+(\cancel{a_{10}}-a_{11})=-10^2+10$$

$$=-90$$

$$=a_1-a_{11}=-90 \text{ 이므로 } \underline{a_{11}=91}$$

$a_1=1$이라면

답: ②

16. $0 \le x < 4\pi$일 때, 방정식

x의 범위가 특이하다. 주의!

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 3 = 0$$

확률과 통계, 기하 선택자: 각변환

미적분 선택자: 각변환, 덧셈정리

의 모든 해의 합은? [4점]

빠짐없이, 모든 것을!

① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

문제에서 주어진 식에서 가장 눈이 띄는 부분은 $4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$이다.

각변환을 보통 생각할 것이고 미적분 선택자들은 삼각함수의 덧셈정리를 생각해볼 수 있는데 각변환을 먼저 시도해보기를 추천한다. 왜냐하면 덧셈정리를 할 경우 더 복잡해지는 경우가 존재하기 때문이다.

2019학년도 9월 (가) 14번

$4\sin^2 x - 4\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}_{-\sin x} - 3 = 0$ 각변환

$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$

2 +3

2 −1

sinx = t로 치환해서 해도 ok

다만 극대, 극소 구할 때는 치환 유의.

그래프의 특성

$(2\sin x + 3)(2\sin x - 1) = 0$

$\sin x = -\frac{3}{2}$ or $+\frac{1}{2}$

sinx는 −1보다 작아질 수가 X

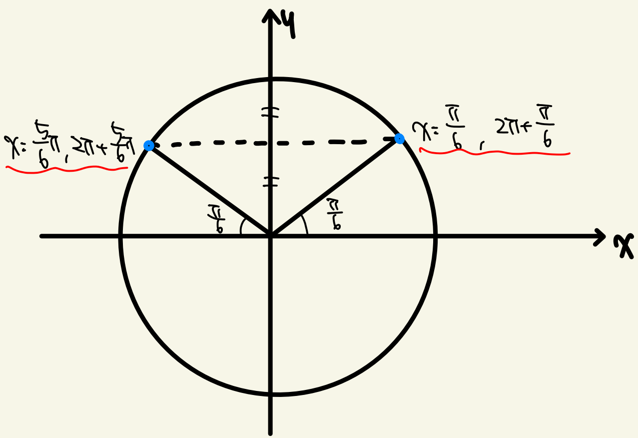
넌 가능

식을 처리하면서 얻은 결론은 $\sin x = \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 x값을 찾는 것이라는 것이다.

그러나 이 문제의 특이한 점은 범위가 $0 \le x < 4\pi$라는 것이다.

원 두 바퀴

위의 식을 만족시키는 x값을 구하기 위해 단위원을 그려보자.



이를 만족시키는 모든 x값들을 더해보면 다음과 같다.

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi + \underbrace{\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi}_{\pi} + 2\pi + \frac{5}{6}\pi = 2\pi + 2\pi + \pi + \pi = 6\pi$$

π

답: ②

18. $\frac{1}{4}<a<1$ 인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

익숙한 그래프가 아니다.

<보 기>

ㄱ. 선분 AB를 1:4로 외분하는 점의 좌표는 $(0, 1)$이다.

외분공식

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

모든 각이 90°인 사각형.

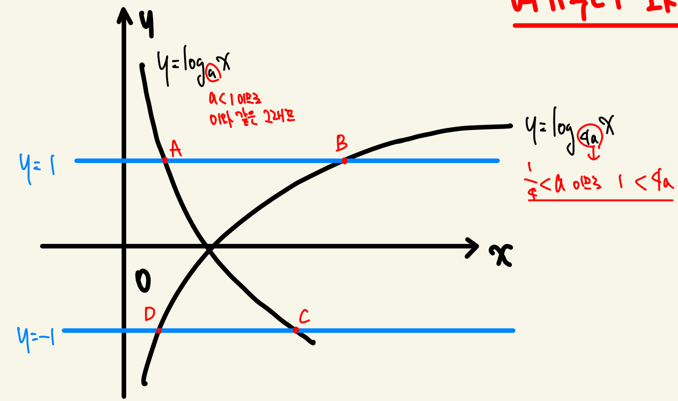
ㄷ. $\overline{AB}<\overline{CD}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

여기부터 봐주세요!

문제 본문에 있는 정보들을 직접 그림으로 그려서 눈에 보기 편하도록 하자.



이 문제에서 대부분 물어보는 것은 좌표, 거리이므로 점 A,B,C,D의 좌표를 정리해주자.

$A(a,1)$ $B(4a,1)$ $C(\frac{1}{a},-1)$ $D(\frac{1}{4a},-1)$

$\log_a a=1$이므로 $\log_{4a}4a=1$이므로 $\log_a \frac{1}{a}=-1$이므로 $\log_{4a}\frac{1}{4a}=-1$이므로

ㄱ. 선분 AB를 내분하기 위해서는 점 A와 점 B의 좌표를 이용하면 된다.

$A(a,1)$ $B(4a,1)$

1:4 외분점

$P\left(\frac{1\cdot 4a-4a}{1-4}, \frac{1\cdot 1-4\cdot 1}{1-4}\right)=P\left(\frac{0}{-3}, \frac{-3}{-3}\right)=P(0,1)$ (옳은 선지다)

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이려면 A와 D의 x좌표가 서로 같고 B와 C의 x 좌표가 서로 같아야 한다.

↳ 직사각형은 90°가 있어야 하고 $y=1$, $y=-1$과 수직이려면 y축에 평행한 직선이 필요하다.

$\underbrace{a}_{A의\ x좌표}=\underbrace{\frac{1}{4a}}_{D의\ x좌표}$ $\quad$ $\underbrace{4a}_{B의\ x좌표}=\underbrace{\frac{1}{a}}_{C의\ x좌표}$

$a=\frac{1}{2}$ $\quad$ $a=\frac{1}{2}$ → 옳은 선지이다!

ㄷ. 선분 AB와 선분 CD를 좌표를 이용하여 구하고 이를 풀자.

$\overline{AB}=\underbrace{4a-a}_{x값들의\ 차}=3a$ $\quad$ $\overline{CD}=\underbrace{\frac{1}{a}-\frac{1}{4a}}_{x값들의\ 차}=\frac{3}{4a}$

↳ y값이 같으므로 x값의 차만 본다.

$3a<\frac{3}{4a}$ $\quad$ $12a^2<3$ $\quad$ $a^2<\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ + $\underbrace{\frac{1}{4}<a<1}_{문제의\ 조건}$ → $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ 이 친구는 거짓!

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

a_1은 결정지을 요소.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$ 이거 왜 같지?

$a_7 = 2$일 때, a_{25}의 값은? [4점]

유일한 수

① 78 ② 80 ③ 82 ④ 84 ⑤ 86

주어진 조건들을 보았을 때 수열 a_n은 우리가 아는 등차, 등비인지 알 수 없다.

수열은 보통 주어진 식들을 통해 유추하는 경우가 많으니 식을 살펴보자. 수열은 이런게... 제발.

식 (가)와 (나)에 겹치는 부분이 존재하는 것을 보아 두 식을 연립하여 새로운 식을 만들 수 있을 것이다.

$$a_{2n} = a_2 \cdot a_n + 1$$
$$a_{2n+1} = a_2 \cdot a_n - 2$$

$$a_2 \cdot a_n = a_{2n} - 1 = a_{2n+1} + 2 \longrightarrow a_{2n+1} = a_{2n} - 3$$

새로운 식 탄생!

새로운 수열을 찾아냈으니 여러 수를 대입하여 양상을 보자.

$$a_3 = a_2 - 3$$
$$a_5 = a_4 - 3$$
$$a_7 = a_6 - 3$$

① 조건에서 $a_7 = 2$ ② $a_6 = 2+3 = 5$

→ 식 (가)에 의하면

$$a_6 = a_2 \cdot a_3 + 1$$

5 4

$a_2 \cdot a_3 = 4$

우리가 새로운 수열을 찾은 후에 대입하여 만든 식 중 a_2와 a_3의 관계를 나타내는 식이 있었다. $a_3 = a_2 - 3$

모르는 기호가 2개이고 식이 2개이므로 모두 구할 수 있다. 구해보자.

$$a_2 \cdot a_3 = a_2 \cdot (a_2 - 3) = 4$$
$$\downarrow$$
$$a_2 = -1 \text{ or } a_2 = 4$$

왜 2개가 나오지? ㄴ 판별해보자.

① $a_2 = 4$

식 (가)를 사용하면

$$a_2 = a_2 \cdot a_1 + 1$$

$4 = 4 \cdot \frac{3}{4} + 1$

문제 조건에서 $0 < a_1 < 1$이라고 하였으므로 만족시키네

② $a_2 = -1$

식 (가)를 사용하면

$$a_2 = a_2 \cdot a_1 + 1$$

-1 -1 2

문제 조건에서 $0 < a_1 < 1$이라고 하였으므로 X

수열의 첫 항을 찾았으므로 우리가 구해야하는 a_{25}을 최대한 단순화시켜보자.

$$a_{25} = a_{24} - 3 = (a_2 \cdot a_{12} + 1) - 3 = a_2 \cdot a_{12} - 2 = a_2 \cdot (a_2 \cdot a_6 + 1) - 2$$

$a_{25} = a_{24} - 3$, $a_{24} = a_2 \cdot a_{12} + 1$, $a_{12} = a_2 \cdot a_6 + 1$

$a_2 = 4$, $a_6 = 5$ 이므로

$$a_{25} = a_2 \cdot (a_2 \cdot a_6 + 1) - 2$$

4 4 5

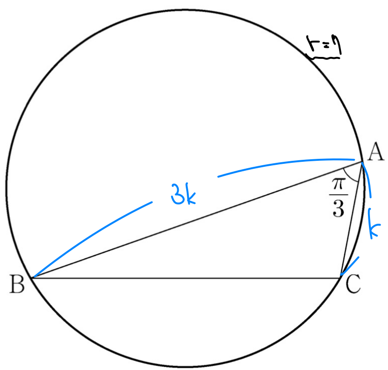
$$= 84 - 2 = 82$$

답: ③

28. $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3:1$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [4점]

익숙한 각

외접원! → 사인법칙



우선 조건 중 외접원의 반지름을 줬다는 것은 사인법칙을 사용할 것이라는 강한 표시이다.

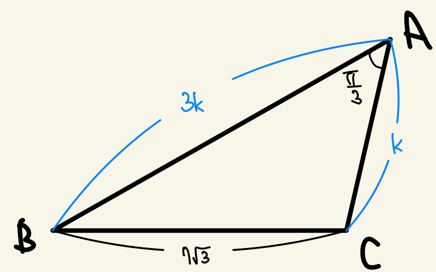
외접원의 반지름이 7이고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 이므로 사인법칙을 사용하여 $\angle A$와 마주보는 $\overline{BC}$의 길이를 구할 수 있다.

사인법칙은 서로 마주보는 두 친구끼리

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle A)} = 2 \times 7$$

$$\overline{BC} = \sin(\angle A) \times 14 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14 = 7\sqrt{3}$$

현재 우리가 구한 정보들을 다시 추합하여 그림을 그려보자.



우리가 구해야 하는 것은 k값이고 삼각형 세 변의 길이를 모두 나타낼 수 있고 하나의 각이 있으므로 코사인법칙을 사용하여 해결해보자.

코사인법칙은 피타고라스 정리의 일반화

게다가 60°

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\frac{\pi}{3}$$

$$49 \cdot 3 = 9k^2 + k^2 - 2 \cdot 3k \cdot k \cdot \frac{1}{2}$$

$$147 = 10k^2 - 3k^2 = 7k^2 \qquad k^2 = 21$$

답: 21