수학 - 1. 기타 실수노트

YEAR

① '(미지수) ≠ 0' 인 조건이 없다면 함부로 소거하면 안된다.

예) $r^6(r+2) = (r+2)$ ⇒ case 1) $r=-2$인 경우 case 2) $r \neq -2$ 이고 $r^6=1$ 인 경우

같다고 해서 곧바로 $r^6=1$로 소거시키면 X

② 문제를 풀기 전 모르는 미지수의 개수와 풀이 도중 도출되는 방정식(조건)의 개수가 일대일대응인지 확인한다.

③ 부등식 문제는 방정식으로 먼저 푼다. 모든 부등식은 부등식이기 전에 방정식이므로, 미지수를 해결한 뒤 부호를 판단한다.

④ 99%가 풀렸는데 마지막 1%가 안 풀린다고 느껴질 땐 내가 주어진 조건을 다 쓴게 맞는지 다시 문제를 읽어본다. (특히 준킬러~킬러)

⑤ 절댓값을 포함한 부등식은 제곱하지 말고 양변에 ±를 쓴다.

예) $\left|\log_2 \frac{b}{5}\right| \le \log_4 \frac{4}{a}$ → $-\log_4 \frac{4}{a} \le \log_2 \frac{b}{5} \le \log_4 \frac{4}{a}$ ⋯ $(\log_2 \frac{b}{5})^2 \le (\log_4 \frac{4}{a})^2$ 안됨!!

⑥ 항등식을 보면 가장먼저 0을 만들 수 있는 x값이 있는지 관찰한 뒤, 대입해본다. (꼭 0 아니더라도 특별한 값 대입 ㄱㄱ)

예) $f(x) \cdot g(x) = x(x+3)$ ⇒ $x=0$, $x=-3$을 양변에 대입

⑦ 항등식 : 미분해도 항등식 but 방정식, 부등식 : 미분불가능

⑧ 최대·최소 문제는 2차함수 / 산술·기하 평균 으로도 활용될 수 있음을 기억하자.

예) $\tan(a+b)\pi$의 최댓값. $b^2=-a$ → $a+b=-b^2+b=-(b-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$ ~ $0 \le a+b \le \frac{1}{4}$. $M=\tan\frac{\pi}{4}=1$

⑨ 제곱근 없앨 땐 절댓값 유무 확인부터! $\sqrt{a^2}=|a|$ 이므로 개수 세기, 범위 설정에 주의하자.

⑩ 연립방정식 $ax+by=c$ 와 $a'x+b'y=c'$ 에서, 해를 갖지 않을 조건은 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ (모두 같으면 해는 모든 수)

⑪ 곱셈정리 쓰기 전 계수 다시 확인해보기!! $(a\pm b)^3$ 인지 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 의 일부인지 헷갈리면 X

예) $A+2=\frac{\square}{A^2-2A+4}$ → $A^3+2^3=\square$ ⋯ $\frac{\square}{(A-2)^2}$ 로 해석하면 안됨!!

⑫ x에 대한 방정식의 서로 다른 두 실근 ⋯ ⇔ 판별식 >0 인지 한번만 확인! 특히 1차/상수항에 미지수 있으면 꼭 해보기!!

예) $x^2+2(\cos\theta+1)x+\cos^2\theta=0$ ← 풀기전 확인 first! $D/4=(\cos\theta+1)^2-\cos^2\theta>0$. $\cos\theta>-\frac{1}{2}$

⑬ '자연수' 라는 단어도 중요한 조건이다. 킬러에서 조건 쓸 때 자연수 조건도 표시하자 (나중에 대입하는 문제일 수도 o).

⑭ "~서로 다른 세 개의 양의 근과 한 개의 음의 근⋯" 으로 나올때 ⊕/⊖는 x값의 부호! y값의 부호를 말하는게 아니다.

⑮ 마지막에 구해야 하는 것 꼭 확인 ★★ 정답 쓰기 전에 딱 3초만!! 내가 구한 답이 문제에서 묻는게 맞는지 검사하기!

⑯ 분수식이 최소가 되려면 분자는 최대가 되야함을 의미한다.

YEAR MONTH DAY

⑰ $2^m \times 3^n \times 5^r$ 의 경우 약수의 개수는 $(m+1)\times(n+1)\times(r+1)$ 개 이고, 총합은 $(2^0+2^1+\cdots+2^m)\times(3^0+3^1+\cdots+3^n)\times(5^0+5^1+\cdots+5^r)$

⑱ 합성함수의 방·부등식 / M·m 문제는 안쪽함수를 치환한다. 단, 범위 구하기!

예) $(f\circ f)(t)>1 \rightarrow f(t)=p$ 치환 $\Rightarrow f(p)>1$ (단, p는 $f(t)$의 치역)

⑲ 문제에서 어떤 식이 미리 인수분해되어 있는 건 평가원의 배려다. ① 왜 인수분해했는지 생각 ② 다시 전개하면 X

예) $\underset{x=1}{(x-1)}\{\underbrace{x^2(x-3)-t}_{=h(x)}\}=0$ ⋯ 인수분해 why? 함정조심하라고. $h(1)=0$ 이 될 때 근의 개수 중복해서 세면 안된다!

⑳ □의 "배수"는 □ 자기자신도 포함한 것이다. □×1. □×2. □×3 ⋯ 을 뜻하는 것! 그러므로 1의 배수는 1.2.3.4. ⋯

㉑ $n(U)=a$ 일 때, U의 모든 부분집합의 개수는 2^a 개이다.

㉒ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 헷갈리지 마!

㉓ 이차함수의 선대칭 & 삼차함수의 점대칭과 비율 & 사차함수의 선대칭은 항상 유념하자.

㉔ "가능한 집합 A의 / 모든 원소의 합⋯" 집합 A가 여러개 나오면 그 집합별 원소의 합 구하기!

㉕ 다항식에서 최고차항의 계수가 0이 아니라는 조건이 없을 때는 $a=0$ // $a\neq0$ case 분류하자.

㉖ $B=\{x+y \mid x.y\in A\}$ 에서 x와 y는 다른 수라는 조건이 없다면 $x=y$ 인 경우도 세야한다. 같은수 + 같은수도 허용.

㉗ 구해야되는게 절댓값 → 꼭 의심 first! ① 전체답이 ⊖일 수 있음 ② case 분류를 ⊕/⊖로 나누기

㉘ 양수.음수 조건은 0인 case를 제외한 것이다. 예) S_n이 양수인 n의 최댓값을 구하려면 $S_n>0$

㉙ 원의 방정식에서 $(x-a)^2+(y-b)^2=\square$ → 주의! □ ≠ 반지름. □ = (반지름)^2 이다.

㉚ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ← 2ab 아님!!

㉛ x축. y축. $x=a$. $y=b$ 주의하기!! 처음에 잘못보면 그림 고칠 때 시간 너무 오래걸리니까 그리기 전에 한번만 더 보자!!

㉜ 집합 원소로 표현하는 조건이 있다면 되도록 해당하는 집합 원소 모두 쓰기. 특히 교집합 파악해야 할 때 실수 주의✿

수학 - 2. 수I 실수노트

① $\sqrt{2^{3a} \times 3^{b-4}}$ 가 자연수가 되게 하는 a. b 개수? $(1 \le a \le 20,\ 1 \le b \le 50)$

$2^{\frac{3}{2}a} \times 3^{\boxed{\frac{b-4}{2}}} \to \frac{b-4}{2} = 0, 1, 2, 3, \cdots \Rightarrow 3^0 = 1$도 자연수 만들 수 O

② $2^a = 3^b$ 가 있다면 바로 $2^a = 3^b = k$ 로 설정한 뒤 최대한 지수 문제는 지수로, 로그 문제는 로그로 푼다.

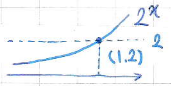
③ $6^{20} = a \times 10^n$ 에서 n은 $\log 6^{20}$의 정수부분 이다. 양변에 log 취하기!

④ $a + \log_2 b$ (a. b와 30 이하 자연수) 의 개수?

i) 자연수 (= b가 2의 거듭제곱) ii) 무리수 - 1) b가 1 아닌 홀수 2) b가 2의 거듭제곱 아닌 짝수.

⑤ $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 25\}$. $B = \{(x, y) \mid \sqrt{3}x - y = n\} \to A \cap B \ne \varnothing$ 원과 직선이 접하거나 두 점에서 만난다.

⑥ 지수부등식 $4^x - 2^x - 2 < 0$의 해는? ⇒ ① 치환범위 설정 ② 끝까지 계산

$2^x = t\ (t > 0)$. $t^2 - t - 2 < 0$. $-1 < t < 2 \Rightarrow 0 < t < 2$. $0 < 2^x < 2 \Rightarrow$ 

$x < 1$

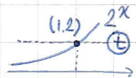
⑦ 로그 방·부등식 풀기 전 진수조건 검토 first!

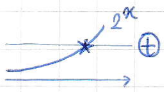
$\log_3(x+1) + \log_3(x-5) < 3 \to x > -1$. $x > 5 \to \log_3(x+1)(x-5) < 3$

⑧ 지수·로그 부등식 부호 판단 전에 밑 한번 확인하기. $\log_2 a < \log_2 b \to \log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$

⑨ $\sqrt{4-a} > 0$ or $|4-a| > 0 \iff \sqrt{4-a} \ne 0$. $|4-a| \ne 0$ 즉, $a \ne 4$

⑩ 근의 부호와 관련된 조건은 ① 근의 합 ② 근의 곱 ③ 판별식 을 이용해서 나타낸다.

⑪ x에 대한 방정식 $4^x - 4 \times 2^x + a = 0$ 의 근 중 1보다 큰 근이 존재 ~ ⟺ $x > 1$ 이므로 $2^x = t\ (t > 0)$ 에서 $t > 2$ 

⑫ $4^x + a \times 2^x + b = 0$ 이 오직 하나의 실근을 가짐 → $2^x = t\ (t > 0)$. $t^2 + at + b = 0$ 

$t > 0$. 1개

⟺ i) 양수 t가 중근 ii) 양수 t 1개. 음수 t 1개 iii) 양수 t 1개. $t = 0$ 1개

⑬ 제발 지수방정식 치환했으면 끝까지 계산을 좀 해;; 예) $2^{2x} - 2^{x+3} + 12 = 0$. $t = 2.6 \to x = \log_2 2 : \log_2 6$ ← 치환했으면 꼭 3초 검산!!

⑭ 닮음을 이용한 ⓖ 풀이 시 도형의 길이는 꼭 표시해두기. ⓖ의 좌표와 혼동하지 않게 주의한다.

⑮ 교점의 순서 주의! 예) 직선 $y = -x + k$ 가 두 곡선 $\overset{P}{y = \log_a x}$, $\overset{Q}{y = (10-a)^x}$ 과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, ⋯

⑯ 기울기 비교할 때 어떤 수로 나누면 0이 아니라 1이 남는다. 예) $\underbrace{x_1 - x_2}_{\text{if } \ominus} < y_1 - y_2 \cdots \to \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} < 1$

① 부채꼴의 둘레의 길이가 일정 ⇔ 둘레를 미지수 (a)로 놓고 식 first. 예 $a = 2r + l$

② 동경이 나타내는 각의 대칭문제에서 θ를 구하는지, □ θ를 구하는지 확인하고 끝까지 계산하기!

예 $6\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, \cdots, 13\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{3}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \cdots, \frac{13}{6}\pi$

③ 삼각함수의 각변환에서 θ가 2π를 넘는다면 ① $\theta>0$는 대칭성(우·기함수)을 이용해서 $\theta>0$로 바꾸기

② $2\pi \times n$으로 묶고 제거하기 ③ 다시 θ의 부호에 따라 정리 의 순서를 따른다.

예 $-\tan\frac{15}{4}\pi = -\tan\overset{②}{(\cancel{4\pi}-\frac{\pi}{4})} = \overset{③}{\tan}\frac{\pi}{4}$ ($\because \tan(-\theta) = -\tan\theta$)

$\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\overset{①}{\sin}\frac{\pi}{6}$ ($\because \sin(-\theta) = -\sin\theta$)

④ 삼각함수를 이용해서 표현한 좌표가 주어질 경우 단위원을 그려 기하적 관점에서 접근할 수 있다.

예 $P(\cos\alpha, \sin\alpha) \Leftrightarrow r=1$인 단위원. $\rightarrow \cos\alpha + \cos\beta = 1 \Leftrightarrow$ 두 점의 x좌표 합이 1, 중점은 $x=\frac{1}{2}$ 위에 존재 등등

⑤ 제곱의 형태로 제시된 삼각함수는 각변환 시 부호 상관 X

⑥ 삼각함수에 미지수가 있을 경우 부호와 절댓값 사용기준에 주의하자. 특히 주기, 최대·최소는 절댓값 잊지 말 것!

예 $\sin\frac{x}{2}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. $\frac{2\pi}{2} = \pi$로 계산하지 않게 주의!!

⑦ 합성 삼각함수는 속함수의 범위 먼저 구한 뒤 풀기!

예 $\cos(\boxed{4\pi\cdot\sin 2x}) = 1 \rightarrow -4\pi \le \square \le 4\pi$. $\cos\square = 1$ 만족하는 □ 찾고 $4\pi\cdot\sin 2x = \square$ 만족하는 x 찾기.

⑧ 삼각함수의 대칭성 쓸 때 sin 함수는 3번째부터 ⊖ 이고 cos 함수는 2번째부터 ⊖ 다.

예 $\cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}$인 x는 순서대로 $\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \cdots$ ⊖

반대로 $\sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2}$인 x는 순서대로 $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \cdots$ ⊖

⑨ 미지수를 각에 설정해야 하는 경우 제곱이 없는 각 기준으로 설정한다. 제곱 있으면 부호 상관 없기 때문!

예 $2\sin^2(x+\frac{\pi}{4}) + \cos(-x+\frac{\pi}{4}) = 1$ $\cdots \bigcirc + \triangle = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\triangle = t$, $\bigcirc = \frac{\pi}{2} - t$. $\Rightarrow 2\cos^2 t + \cos t = 1$

⑩ 직각 △이 나온 삼각함수 문제는 빗변을 지름으로 하는 원으로 해석할 수 있다.

⑪ 대칭써서 접혀져 있는 (반사되는) 부분 구할 때 제시된 선분과 수직으로 선대칭을 이루어야 한다.

⑫ 삼각함수의 식변형을 이용해 삼각형을 구할 땐 sin과 cos 법칙의 기본형을 이용해서 전개한뒤 정리한다.

예 $a\cdot\cos A + \underbrace{b\cdot\cos(A+C)}_{-b\cdot\cos B} = 0 \rightarrow a \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - b \times \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = 0$. $\underbrace{(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)}_{a=b \text{ or } \angle C = 90^\circ} = 0$

YEAR MONTH DAY

⑬ sin.cos은 주기가 2π 지만 tan는 주기가 π !! 예) $\tan\frac{1}{3}x=\sqrt{3} \rightarrow \frac{1}{3}x=\frac{\pi}{3}+n\pi$

⑭ 삼각함수 그래프에 전체 절댓값있으면 first는 G sol 이다. 예) $|\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}|=k \rightarrow |\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}|$ 그린 뒤 $y=k$와의 교점

⑮ 삼각함수표 실수하지 말자!! 30°와 60° ($\frac{\pi}{6}$과 $\frac{\pi}{3}$) 헷갈리지 않게 주의하자. → 삼각형 그려서 확인하기.

$\sin 30^\circ=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ // $\sin 60^\circ=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,

$\tan 60^\circ=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

⑯ 부채꼴의 호의 길이 : $l=r\theta$ // 부채꼴의 넓이 : $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

⑰ 삼각함수의 대칭성을 이용해 G의 식을 보기좋게 바꿀 수 있다. sin 만 $-(\sin(-x))=\sin x$ 이고 cos. tan는 $\cos(-x)=\cos x$
$\tan(-x)=\tan x$

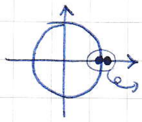
부분만 변환.

예) $y=\boxed{-\sin(-2x)}+6=\sin 2x+6$. // $y=-\boxed{\cos(-2x)}+6=-\cos 2x+6$

⑱ 삼각함수의 각변환 시 이전 함수의 정의역은 고려하는게 X. 예) $0\le x<2\pi$ 일 때, $y=\cos(x+\frac{\pi}{2})+1=\sin x+1$ (이때 정의역 변화X)

⑲ 두변과 한 각 나왔다고 해서 바로 cos 달려가지 말고 sin으로 더 쉽게 풀리는지 & 묻는 부분이 어딘지 check.

⑳ ⓕ 삼각함수의 범위가 $[0, 2\pi]$ 라면, 단위원을 이용해 삼각 방·부등식 풀 때 범위 표시 주의! →



0, 2π 두개 존재표시하기

㉑ sin 함수 확장해서 그릴 때 정의역 조심! 예) $\sin(\frac{3}{2}a)=\sin(\frac{3}{2}b)$ 에서 $\sin x$ 위의 두 점으로 그리려면 x 정의역 ⇒ $\frac{3}{2}a$, $\frac{3}{2}b$ 범위로 change.

㉒ $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. 헷갈릴 땐 $\sin\theta=y$, $\cos\theta=x$ 라 생각하자.

① 등비수열에서 곱의 규칙성 쓸 때 연속 3개의 곱은 세제곱이다. ㉮ $a_1 \times a_2 \times a_3 = (a_2)^{③}$ ☆ ⋯▸ 곱은 $(\text{중항})^{\boxed{\text{항의 개수}}}$ $\sqrt{a_1 \times a_n}$

② 자취의 방정식 (점 P가 나타내는 도형의 길이 / 넓이는?) 과 수열을 합친 문제는 P(x, y)라 놓고 식 세운 뒤 수열의 특징을 쓴다. ↗ 자취의 방정식 기본 step.

단, 이때 자취의 방정식의 x와 y의 범위에 주의하자. ㉮ $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ but $0<x<3$, $0<y<3$ → $6\pi \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}\pi$.

③ a_n, S_n 관계 쓸 때 꼭 $n=1$일때 먼저 구한 뒤 $S_n - S_{n-1} = a_n \ (n \geq 2)$ 쓰기! 이때 구해진 a_n이 a_2, $a_3 \cdots$과 맞는지 확인해야 한다.

㉮ $* a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6 \cdots$ $r=3$일때 $a_1 = 1$이고 $a_n = 3^{n-2} \cdot 2 \ (n \geq 2)$ 이다. 무의식적으로 $n-1$로 쓰면 X

④ S_n 식인데 안풀리면 매우 매우 매우 높은 확률로 a_n, S_n 관계를 쓰는 문제다. ~~안 되면 노가다~~⋯⋯.

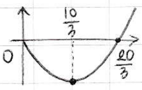
㉮ $\overbrace{S_n + S_{n+1}}^{T_n} = 3 \cdot 2^n - 2n - 3$ 에서 $T_n - T_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \ (n \geq 2) = a_{n+1} - a_n$. ← $n=1$일때 check 하려면 a_1, a_2 필요!

⑤ $\sum_{k=1}^{m} S_k$ 을 구하라는 것과 수열의 합 S_n을 구하라는 것은 혼동하면 안된다! $\sum_{k=1}^{m} S_n$은 수열의 합의 시그마 구하기.

⑥ ~~수평에서도 그랬지만~~ / 수열 역추적할 땐 "1단계 끝나고 멈추기"를 반복하자. 한번에 제대로 풀 것

⑦ 교대수열 $\frac{1}{A} - \frac{1}{B}$ 꼴에서, $\frac{1}{A \cdot B}$ 일때 더 큰 쪽이 뒤로 간다. ㉮ $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

⑧ 등차수열의 합공식에서, (항의 개수) × (등차중항) 이다. 등차중항일 때는 $\frac{1}{2}$ 쓰면 X ㉮ $\sum_{k=1}^{25} a_k = 25 \times a_{13}$

⑨ S_n을 Ⓖ로 표현했을 때 항상 중심이 자연수 / (자연수) + $\frac{1}{2}$ 인 건 X. ㉮ 

$S_n = n(3n-20)$

⑩ $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} \neq S_{2k-1}$ 주의!! $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$. 즉 홀수번째의 합이지만 S_{2k-1}은 a_1부터 a_{2k-1}까지의 합이다.

⑪ 교대수열은 한번에 쓰기X. 구조를 대칭 맞게 따로 따로 쓴다 (더할 것을 윗줄, 뺄 것을 아랫줄에 배치)

수학 - 3. 수Ⅱ 실수노트

① $\frac{0}{0}$꼴 극한 계산에서, 부정형에 영향을 주지 않고 상수로 나오는 값은 미리 계산한다.

예) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\sqrt{1+x}(1+bx)-(1+ax)}{\cancel{1+bx}\ 1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\cdot\left\{\sqrt{1+x}(1+bx)-(1+ax)\right\}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\cdot\frac{(1+x)(1+bx)^2-(1+ax)^2}{\cancel{\sqrt{1+x}(1+bx)+(1+ax)}\ 2}$

② 합성함수의 연속 판단에서, 겉함수가 연속일 때는 방향성이 필요 없지만, 연속이 아닐 땐 방향성이 꼭 필요하다.

③ 구간함수의 연속 판단은 3단계 모두 필수이다. ① $x\le a$에서 연속 ② $x=a$에서 연속 ③ $x>a$에서 연속

예) $f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\le a)\\ h(x) & (x>a)\end{cases}$ 에서 ① $x\le a$에서 $g(x)$ 연속 ② $x=a$에서 $g(a)=h(a)$ ③ $x>a$에서 $h(x)$ 연속

④ $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{f(x)}=\frac{1}{4}$ 라고 해서 $\frac{1}{f'(4)}$로 해석하면 안됨!! 미분계수는 특수 case 이고, $f(4)=0$만 알아낼 수 있다.

⑤ $g(-1)=0$ 이고 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ 이면 단순히 $f(-1)=0$ 말고 $f(x)=(x+1)^2(\cdots)$를 끌어내기!

⑥ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k\ (k\ne0)$ 에서 $g(a)$의 값을 모르면 i) $g(a)=0$일때 ii) $g(a)\ne0$일때 로 case 분류한다.

→ 보충) just $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ 만 있다면 확실한 $f(-1)=0$ 부터 사용한다.

⑦ 사차방정식 근의 개수 구하는 문제에서 (일차)×(삼차)로 나뉘었을 때 (일차)=0 의 근이 (삼차)=0 와 중복되는지 꼭 확인!

예) $(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$ 에서 $x=1$, $x^2(x-3)=t$ 로 나누고 $x^2(x-3)=t$ 에서 $x=1$은 개수에 포함X ($\because$ 중근)

⑧ 분수식에서 연속 조건은 (분모)$\ne0$ 이다. 분모가 3차일 경우엔 분자와 약분한 뒤 남은 2차식에 판별식을 사용한다.

예) $\frac{x\cancel{(x-1)}}{f(x)}$ 이 연속이 되게 하는 $f(x)=\cancel{(x-1)}(x^2+ax+2)$ 에서, $D=a^2-8<0$

⑨ 절댓값 함수는 절댓값 안쪽의 함수가 0일 때를 기준으로 푼다.

예) $f(x)-|f(x)|$ $f(x)\ge0:0$, $f(x)<0:2f(x)$ ⇒ 불연속일 때는 $f(x)$ 좌.우.항 中 1개가 ⊕. 1개가 ⊖.

⑩ f가 2차인데 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\cdot g(x)=6x+6$ 과 같이 나올때 곧바로 $g(x)=\frac{6x+6}{f(x)}$ 쓰면 안됨!

$f(x)\cdot g(x)=h(x)$ 나오면 $g(x)=\begin{cases}\frac{h(x)}{f(x)} & (f(x)\ne0)\\ \square & (f(x)=0)\end{cases}$ 로 나누기. 단, $g(x)$가 연속이라고 나오면 $f(x)\ne0$ 이므로 $g(x)=\frac{h(x)}{f(x)}$ 로 쓰기 가능.

⑪ 일차식인 두 함수 f, g 에서 $f(x)\cdot g(x)=(2x+1)(x+3)$ → 최고차 계수 부호 case 분류!

→ $f(x)=2x+1$, $g(x)=x+3$ OR $f(x)=-(2x+1)$, $g(x)=-(x+3)$

⑫ 복잡한 미분식의 분자는 통째로 치환한다. 함부로 수렴렴렴 계산산산 쓰면 X → cf.) $\lim_{x\to a}\frac{\overset{a}{\triangle}+0}{\square}$ 절대 안돼!!! 곱셈일때만 가능☆☆

예) $\lim_{x\to1}\frac{\overbrace{(x^2+1)f(x)-6}^{=h(x)}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)=2f(1)+2f'(1)$

⑬ $g(x)=g^{-1}(x)$의 실근은 $g(x)$가 증가일때 / 감소일 때로 나눈 뒤 가운데 값을 $y=x$와의 교점으로 사용한다.

예) $g(x)=g^{-1}(x)$은 $x=-1,\frac{2}{3},2$ → g가 증가: $(-1,-1)\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)(2,2)$ / 감소: $(-1,2)\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)(2,-1)$ ☆

YEAR MONTH DAY

⑭ 조건이 한 개 모자르다면 혹시 근의 개수에서 특이점을 갖진 않는지 확인하자. (예) 2차와 일차의 교점이 한개 ⇔ (접)

⑮ 정의역에 0이 포함되어있는 기함수일 때, 원점을 지난다는 조건이 하나 더 있다. (예) $f(1)=0$ & f는 (기) ⇒ (3차일때) $f=p(x-1)(x+1)x$

⑯ 합성함수의 연속판단 시, $x \to$ 속·함 $\to$ 겉·함 쓰면서 진행하자.

① 복잡한 미분 분수식은 ① 분자를 치환하거나 ② $x=\square$을 대입해서 꼴을 파악한 뒤 계산을 시작한다.

예) $\lim_{h\to0}\dfrac{\boxed{3f(1+2h)-f'(1-h)}}{h\to0}$ $3f(1)-f'(1)=0$ $\therefore f'(1)=3f(1)$ $\Rightarrow \lim_{h\to0}\dfrac{3\{f(1+2h)-f(1)\}}{h} - \dfrac{f'(1-h)-f'(1)}{h}$

② 항등식을 세웠거나 문제에 제시되어 있다면 ① 미분하거나 ② 양변에 임의의 값을 대입 한다.

예) 항등식 (+나머지 정리) ㉠ $x^{20}-x^{10}+1=(x-1)^2\cdot Q(x)+ax+b \longrightarrow$ ㉡ $20\cdot x^{19}-10\cdot x^9=2(x-1)\cdot Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

㉠.㉡ 모두 항등식이므로 각각 $x=1$을 대입해서 미지수 a와 b를 구할 수 있다.

③ 함수방정식으로 미분계수를 만드는 문제에서 항상 순서는 ① 특정 값 대입해서 함숫값 구하기 ② 미분계수 식 쓰기 순이다.

④ 미분계수를 구할 때 쓰는 식에서, 미분계수와 관련한 조건 말고도 함숫값에 관한 조건도 잊지 말고 표시하자.

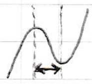
예) $\lim_{x\to2}\dfrac{\int_2^x f(t)dt-f(x)}{x^2-4}=4$ 에서 (분모) $\to 0$ 이므로 (분자) $\to 0$ 이고, ① $f(2)=0$. ② $f'(2)=16$

⑤ 도함수가 y축에 선대칭한 이차함수 $\longrightarrow$ $(0, a)$ 점대칭한 삼차함수, $y=a$ 기준으로 S 동일. 역도 생각해낼 수 있어야 한다.

⑥ 3차함수의 증감 v는 항상 2차함수의 증가 v 보다 크다. 3차와 2차가 접해있다면 앞 or 뒤에 교점 1개가 존재한다.

⑦ $\lim_{h\to0}\dfrac{f(2+3h)-f(2)}{2h}$ 의 값처럼, 미분계수 정의가 쓰인 식은 한번에 정리! $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=\dfrac{m-n}{k}\times f'(a)$

⑧ 극대·극소 차를 2차함수를 이용해 활용할 때, x값의 차는 극대인 x와 극소인 x 사이의 차이다. 근끼리의 차가 X!!



⑨ x축 대칭과 달리, y축대칭은 x만 보면 된다. 예) $f(x-k)$ 과 $f(-x-k)$ ··· y축대칭관계 & $f(x)$를 평·이

⑩ if 구한 Ⓖ의 식이 평행이동되어있다면 꼭 확인!! 구한 Ⓖ가 $f(x-k)$ 였다면 $f(x-k)=$ (구한 식)으로 쓰기.

⑪ 오잉 just 인수 x가 있을 땐 차수주의! 예) $-x(x-6)$ 가 아니라 $-x^2(x-6)$ 이니까 3차인 것!

⑫ $f(x)\pm g(x)=$ 미·가 이고 $g(x)$가 다항함수 (항상 미·가) 인 경우, $f(x)$는 미·가 조건을 충족해야 한다.

⑬ 변곡점이나 세 근의 합 ($\because$ 근과 계수) 구할 때 이차항의 계수가 0인지 한번 확인해야 한다 (자주 일차항을 이차로 봄 ㅡㅡ^)

⑭ $f(x)$가 오직 하나의 극값을 가짐 $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$의 부호변화가 1번 나타남. 무턱대고 $f'(x)=0$의 근의 개수 1개 라고 해석X

⑮ $f(x)$(3차)를 $(x-a)^2$으로 나눈 나머지 $R(x)$ $\Rightarrow$ 테일러급수 쓰기! $f(x)=(x-a)^2\cdot Q(x)+\underbrace{f'(a)(x-a)+f(a)}_{R(x)}$

⑯ 방정식 $f(x)$(3차)$=f(p)$는 서로 다른 두 실근 $\Rightarrow$ $x=p$가 중근 & 다른 실근 1개. OR $x=p$가 실근 & 다른 중근 1쌍. 무조건 중근으로 생각X

⑰ 분모·분자에 0이 여러개 있을 땐 배T sol 적극 활용하자**

YEAR MONTH DAY

① 도함수의 정적분은 ①부정적분의 함숫값 first. ② 계산. 특히 $\int_a^b |f'(x)| dx$는 총 이동거리지만 $\int_a^b f'(x)$는 변위다.

② 우함수·기함수의 정적분 특징을 쓸 땐 ∫꼴인 초기상태의 식에서 홀수차수 항을 제거하면 된다.

예) $\int_{-a}^{a} (\cancel{x^3}+x^2+\cancel{x}+c)\,dx = 2\cdot\left[\frac{1}{3}x^3+cx\right]_0^a$ cf.) $\int_{-1}^{3} \{\cancel{(x-1)^3}-3\}dx = (-3)\cdot 4 = -12$

③ Ⓖ의 대칭관계 파악하기 : ① x앞에 ⊖ → y축대칭, y 앞에 ⊖ → x축대칭. x&y 앞에 ⊖ → 점대칭

② $f(\bigcirc)+\square = f(\triangle)+☆$ 꼴로 바꾼 뒤 $\bigcirc+\triangle$으로 x, $\square+☆$로 y 정하기

예) $f(a-x)+\cancel{f(a+x)}=2b-f(a+x)$ … ① 점대칭 파악 ② $a-\cancel{x}+a+\cancel{x}=2a$ 이므로 $x=a$. $\frac{2b}{2}=b$ 이므로 $y=b$. (a,b) 점대칭!

④ ∫(기함수) = (우함수) but ∫(우함수) ≠ (기함수). just $(0,k)$에 대해 점대칭!

⑤ (t에 대한 부정적분) < (t에 관한 식(상수)) 에서 부정적분을 미분하면 X. 적분을 유사 넓이 상태로 생각하길 바라는 경우가 많다.

예) $\int_0^t f(x)dx < 3t$ $t\times 3$인 직사각형의 넓이 (Ⓖ관점 NO!!!)

⑥ 연속인 기함수라는 조건은 원점을 지난다는 조건이 더 숨어있다. 마찬가지로 다항함수인 우함수라는 조건은 $x=0$에서 $f'=0$을 의미한다.

⑦ 여러가지 정적분 넓이가 나오면 아무리 자신있어도 수직선 표현하자.

⑧ ☆☆☆ 부정적분은 함수로 취급! 부정적분은 미분X! ∫속의 함수를 도함수로 두고 원함수 그릴 수도 있음!

⑨ 적분과 주기함수가 같이 쓰인 문제는 등차수열을 이용한다. 단, 구하고자 하는 것의 주기의 시작점을 확인하자! 예) $\int_1^7 f\,dx$ 0부터 시작X

⑩ $f(x+\square)=f(x)+\triangle$ 꼴은 적분&주기함수에서 $\int_x^{x+\square} f(x)\,dx = \triangle x + C$ 로 바꾸고 시작한다.

⑪ 정적분 항등식은 변수의 분리 이후 0을 만들 수 있는 x값을 모두 대입해야 한다. OR 안 풀리면 (다항함수일 경우) just 식 세우기!

t 없으면 한번에 밖으로!

예) $\int_1^x (2x-1)f(t)dt = x^3+ax+b \rightarrow (2x-1)\int_1^x f(t)dt = x^3+ax+b$ … $x=1, \frac{1}{2}$☆ 대입

⑫ ∫ 안에 있는 함수 잘 보기^^… $g(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt$ 를 묻다가 $\int_a^b g(x)dx$ 묻는게 나올 때 혼동하면 안된다. (…)

⑬ 정적분에 관한 둘 이상의 넓이 나오면 도형 간 관계 파악 first! 안 보이면 ∫ 이용해서 써보기.

⑭ 이차함수 넓이 ⇒ 공식쓸 생각부터. Ⓖ 간 교점을 이어서 도형을 분할한다. if Ⓖ가 안 그려져 있으면 무조건 그리고 시작!!

⑮ 정적분 비교할 때는 항상 같은 상태에서 비교! 예) $A=f'(0)$. $B=f(1)$. $C=2\cdot\int_0^1 f(x)dx$ 비교 ⇒ $\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\times 1\times f'(0)$ … 넓이로 바꿔!

⑯ 평행이동 관계에 있는 두 함수의 교점은 중요한 조건이다. 교점 ⇒ 대입.

예) $f(x)$와 $-f(x-k)$는 $x=4$에서 만남 ⇒ $f(4)=-f(4-k)$ 조건 1개 생김☆

⑰ 정적분 계산할 때 $(\ )^{\square}-(\ )^{\triangle}$ 꼴의 순서로 계산해야 한다. 예) $[2x^3+x]_{1-h}^{1+h}$

$2\{(1+h)^3-(1-h)^3\}$ (O) $2\{(1+h)-(1-h)\}^3$ (X)

YEAR MONTH DAY

⑱ 도함수의 넓이는 원함수의 넓이와 같은게 X. 원함수의 y값의 차와 관련된 것!! & 도함수의 y값은 원함수의 기울기 ⇒ just 대입 OK!

⑲ just 접점만 구할 땐 길게 식 쓰지 X. "평변 = 미계" 이용해서 표현하는게 더 효율적이다.

⑳ 함수의 특징을 고려해서 풀자! $f(x)$가 $x=2$ 선대칭일 때 $\int_k^3 - 2\cdot\int_k^2 = 0 \rightarrow \cancel{\int_k^2} + \int_2^3 = \cancel{\int_k^2} + \int_k^2 \Rightarrow k=1$

㉑ 정적분의 항등식도 미분 항등식과 마찬가지로 0을 만들 수 있는 숫자 대입이 first! $\int_0^x (\cdots) = 3\cdot\int_2^x (\cdots)$ 에서 $x=0, 2$ 대입하기.

㉒ 낯선 부정적분 함수를 미분해서 도함수를 구했다면 if 도함수가 0 ⇒ 원함수는 상수 (0일수도 아닐수도 O)

수학 - 4. 확통 실수노트

☆검산 1순위!!!

☆2030 단계에서 아무리 앞번호더라도 맨 뒤에 풀기!!

확통은 대부분 처음 풀 때 틀렸는데 다시 풀어보니 맞는 경우가 대부분이다. 따라서 확통 문제는 꼭 검산 1순위로 두고, 다음의 경우를 빼먹은 건 아닌지 검사해보자. 문제를 다 풀고 문제를 다시 읽어보는 것도 좋다.

① 서로 다른 / 서로 같은

② 여사건 쓴 경우 집합에 올바르게 표시했는지

③ 일대일함수 / just 함수 ≒ 뒤에 있는 원소가 중복사용될 수 있는지 확인 first!

④ 원순열에서 첫번째 순서 고려 (일반적으로는 ×1 but 정□. 직□ 등 특수한 경우 주의)

⑤ 경로문제에서 처음으로 점 P를 지날 때 case 분류 한 뒤 중간에 P를 만나는 경우를 빼기.

⑥ 중복조합에서 한계치 넘어간 수는 없는지 (예) 숫자 만들기 할때, b′라 써놓고 b′=9인 경우는 없는지)

⑦ 집합과 관련된 문제일 때. ← 원소의 개수? : 중복되는 걸 빼라. 부분집합 선택하기? : 중복순열 (H) 써라.

⑧ n 자리의 자연수 만들기에서 첫번째 자리에 0이 포함X 고려. case 분류한 것 이외에도 첫번째 자리 0인 경우를 포함하진 않았는지!

⑨ (가). (나)형 벤 다이어그램 그려서 표현하기.

⑩ 주사위문제는 검산할 때 6×6표 사용하기. ⇒ 합은 대각선 ↘ 위에 있으면 동일.

우선배치로 인한 중복/누락 예방

⑪ n개를 일렬로 나열 (예 자연수 만들기 등) 하는 문제 & 특정자리에 어떤 값이 들어가야 / 가면 안되는 조건 : (전체배열) - (여사건배열)

⑫ nCr. nPr. nΠr 등에서 n은 '서로 다른 n개'를 의미. 즉, 같은 것을 나누는 사건은 고려X (다른 것을 나누면 같은건 자동)

⑬ (가) (나) 조건형 문제는 무조건! 벤 다이어그램 그리고 둘 중 어느 조건이 더 쓰기 쉬운지 생각 first.

⑭ 일대일 대응 : $x_1 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. 즉, $f(x_1) \neq f(x_2) \rightarrow x_1 \neq x_2$

⑮ (혹시 몰라서...) 이항계수는 조합수만을 의미하고, "계수"가 앞에 있는 수까지 고려해서 실제로 문자 앞에 쓰이는 수를 의미

⑯ 곱셈정리와 의도적 계산 누락은 달라.. 확률이 1인게 아니라면 꼭 계산과정 남기기.

확통 문제는 안 풀린다면 노가다를 통해서라도 풀어야 한다. 이때 노가다의 순서는 항상 구성 → 나열 이다.

① 조건부확률에서, 분모와 분자의 case가 분모가 같다면 경우의 수만 구해도 된다. 예) $\dfrac{\frac{4}{72}}{\frac{4+9}{72}} \rightarrow \dfrac{4}{13}$

② 수 만들기나 주사위 문제 등에서 적어도 하나가 △인 경우는 여사건을 이용한다.

예) 두 주사위의 눈의 곱이 4의 배수 → i) 4가 아닌 2의배수 2개 ii) 둘 중 적어도 하나가 4 : $36 - \underbrace{5 \times 5}_{\text{4제외하고}} = 11$

③ 원 안에서 △ 개수 구하기는 ① 한 점 당 △ 개수 구하고 ② × (점의 개수) ③ ÷ (중복개수) 3번 중복되면 ÷3

④ 숫자의 곱이 짝수일 p는 1−(곱이 홀수일 p) 을 이용해 여사건으로 해결한다.

⑤ '배반'과 '독립'은 같은게 아니다. 배반일때 교집합 $P(A \cap \cancel{B})$는 뒤에꺼 무시 $(=P(A))$. 독립일때 교집합 $P(A \cap B)$는 곱셈 $(P(A) \times P(B))$

마찬가지로 배반일때 조건부확률 $P(A|B) = 0$ $(\because P(A \cap B) = 0)$ 독립일때 조건부확률 $P(A|\cancel{B})$는 뒤에꺼 무시 $(=P(A))$

YEAR MONTH DAY

* 헷갈리는 통계 개념들 & 실수들

① $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 뺄셈이라고 뺄!셈!!

② (특히 이항분포 → 정규분포일 때) $N(m, \sigma^2)$ 쓸 때 분산을 (표준편차)^2 꼴로 써야 헷갈리지 않는다.

③ $P(X \le 44) = P(\overline{X} \ge a)$ 처럼 Z값 비교할 때 부등호가 서로 반대 ⇒ 한쪽의 Z값에 ⊖을 부여해서 푼다.

④ $P(\overline{X} = a)$를 구하라는 건 크기가 n인 경우, n개의 $\Sigma = n \times a$ 인 case를 모두 구하라는 것이다. 이때 같·있·순을 이용해 순서에 주의!

⑤ $\sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k) = E(X)$ / $\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot P(X=k) = E(X^2)$ / $\sum_{k=0}^{n}$ (상수) $\cdot P(X=k) =$ (상수) (단, n은 $X \sim B(\underline{n}, p)$)

⑥ 정규분포에서의 대소비교는 무조건 대칭 Ⓖ를 그리고 표현하는 것으로 시작한다.

⑦ 확률 사이의 관계식을 변수 사이의 관계식으로 쓰면 안된다. 예 $P(Y=k) = \frac{1}{2} P(X=k) + \frac{1}{10} \not\Rightarrow Y = \frac{1}{2}X + \frac{1}{10}$

⑧ 확률변수 X가 0을 포함 ⇒ 이항분포 의심

⑨ 확률밀도함수의 X값은 음수여도 상관 X. but $f(x) \ge 0$ 는 만족해야 한다. (∵ 정적분 Ⓣ=1 사용)

⑩ $P(X \le 18) + P(X \ge \frac{36}{a}) = 1$ 처럼 같은 분자이고 합 1이면 ○=△이다. (③번과 헷갈리지 않게 주의!)

⑪ $E(\overline{X}) = m$. $V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$. $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

⑫ 크기가 n인 표본 합 $n\overline{X}$ 구할 필요 X. $\overline{X} \sim (\ ,\ )$를 구한 뒤, $P(n \times \overline{X} \ge \cdots)$ 꼴로 바뀌 $P(\overline{X} \ge \frac{\cdots}{n})$를 계산한다.

motemote