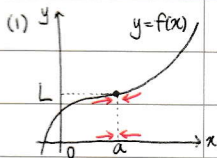


I. 함수의 극한과 연속 - 01. 함수의 극한

수2

1. 함수의 수렴과 발산



x 의 값이 a 가 아니면서 a 에 한없이 가까워질 때 $f(x)$ 의 값이 L 에 한없이 가까워지면 $f(x)$ 는 L 에 수렴

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff f(x) \text{의 } x=a \text{에서의 극한값}$$

(2) 수렴 X 함수 $f(x)$ 은 발산

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (\text{양의 무한대로 발산})$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad (\text{음의 무한대로 발산})$$

2. 유극한과 좌극한

극한값이 존재할 조건 ① 좌극한= a , 우극한= b ② $a=b$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$$

3. 함수의 극한에 대한 성질 **복과산도복**

두 함수 $f(x), g(x)$ 에서 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 가 존재할 때

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (c, \text{는 상수}) \quad \hookrightarrow \text{극한값 존재 } x \rightarrow \text{성립 } x \text{ 수렴할 때만 가능복}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad +) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\text{단, } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0) \quad (c \text{는 상수})$$

4. 함수의 극한값의 계산

(1) 다항함수

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 ($x \rightarrow \infty$ or $x \rightarrow -\infty$): 분모의 최고차항으로 분모·분자 나누

i) 분자차수 > 분모차수 **발산**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \infty \quad (\text{발산})$$

ii) 분자차수 = 분모차수 **최고차항의 계수**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 2$$

iii) 분자차수 < 분모차수 **0**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) : -x=t$ 로 치환 $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(-t)$

* $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 정의되지 않아도 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재할 수 있다.

* 극한값 = 근처에서의 함수값

* $\lim_{x \rightarrow a}$ 에서 $x \rightarrow a \iff x \neq a$. 즉, $(x-a)$ 로 나눌 수 있다.

* ① 그래프로 해결 ② 계산법 이용... 두가지 방법이 있다.

* 극한값을 좌/우로 나누어서 계산할 때, 함수값과는 상관 X. 꼭 기억!

* 유리함수 그리기 (고1) $\rightarrow$ ① 정근선 & 한 점 구하기

* 정대칭복

or ② 뺀 나머지 구하기 (나머지 정리 $\Rightarrow$ 나머지 구할 수 있음)

* 합성함수의 극한 판단하기 **(복 근처의 값, 상수 구분 복)** **E**

1st. 곱함수가 연속인 경우: 바로 함수값 이용 (유연 문제 5번)

$\therefore$ 연속함수 $\iff$ 근처의 값, 상수 구분 필요 X. 함수값 써도 O.

$$\text{예 } x \rightarrow g(x) \rightarrow f(g(x)) \quad (f(x) \text{는 연속함수})$$

$$\begin{matrix} a^- \rightarrow b^- \\ a^+ \rightarrow b^+ \end{matrix} \Rightarrow \underline{f(b)}$$

2nd. 곱함수가 gián단 경우: 곱함수를 그리다 (유연 문제 6번)

* 그래프 그림이 있으면 제발 식부터 쓰지 말고 그래프 조사부터 하자.

* 반례를 찾을 때 주로 사용되는 함수: 분수함수, 절댓값 함수, $[x]$

* 반례는 가정을 만족하지만 **결론을 만족하지 않는** 것을 찾아야 한다.

* 곡선과 직선 사이의 경계는 접할 때, 접점을 잡는 mind가 중요하다.

* 다항식에서 최고차항의 계수가 0이 아니라는 조건이 없을 땐 항상 주의!

* $f(\frac{1}{x})$ 은 $\frac{1}{x}=t$ 에서 $f(t)$ 로 바꾸기! $\lim_{x \rightarrow \infty} f(\frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$. $f(0)$ 아님!!

* 극한이 나온다 $\iff$ 그래프를 그릴 수 있는지부터 판단!

* $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ (발산), $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^k} = 0$ (c 는 상수)

* 극한값에 따른 사칙연산값 (a, b 는 상수)

$$\begin{matrix} \infty + \infty = \infty \text{ (발산)} & \infty + a = \infty \text{ (발산)} & a + b = a + b \\ \infty - \infty = \text{변형필요} & \infty - a = \infty \text{ (발산)} & a - b = a - b \\ \infty \times \infty = \infty \text{ (발산)} & \infty \times a = \infty \text{ (발산)} & \infty \times 0 = \text{변형필요} \\ \frac{\infty}{\infty} = \text{변형필요} & & \frac{0}{0} = \text{변형필요} \end{matrix}$$

* 수렴 $\pm$ 발산 = 발산. 즉, 수렴 $\pm$ 수렴하지 X 함수 = 수렴하지 X 함수

$$\begin{matrix} * \\ \text{부정형} \begin{cases} \text{① } \frac{0}{0} \\ \text{② } 0 \times \infty \text{ 꼴} \Rightarrow \frac{0}{0} \text{ 꼴} \\ \text{③ } \frac{\infty}{\infty} \text{ 꼴} \\ \text{④ } \infty - \infty \text{ 꼴} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ 꼴} \end{cases} \\ \text{극한식} \end{matrix}$$

부정형 X $\Rightarrow$ 직관적 판단

★ (3) $\infty - \infty$ 꼴 : $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형

i) 유리식 포함 $\Rightarrow$ 유리화 진행

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{1}{2} \left(\because \frac{1}{1+1} \right)$$

ii) 유리식 포함 $\Rightarrow$ 최고차항으로 묶음

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \infty \text{ (발산)}$$

(4) $\frac{0}{0}$ 꼴 ($x \rightarrow a$)

i) 유리식 포함 $\Rightarrow$ 유리화 후 약분

ii) 유리식 포함 $\Rightarrow$ 인수분해 후 약분

(5) $\infty \times 0$ 꼴 : $\infty \times C$, $\frac{C}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ (C는 상수) 꼴로 변형

i) 유리식 포함 $\Rightarrow$ 유리화

ii) 유리식 포함 $\Rightarrow$ 통분/인수분해 후 약분

5. 미정계수의 결정

(1) $\frac{0}{0}$ 꼴 $\Rightarrow$ ㉔ 작분하게 just 계산

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \dots \text{분모} = 0 \rightarrow \text{분자} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a (a \neq 0), \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

㉔ $\leftarrow 0$ 아닌 극한값 분자 $\rightarrow$ 분모 $\rightarrow 0$

(2) $\infty - \infty$ 꼴에서 $\sqrt{\quad}$: 유리화

(3) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = a (a \neq 0) \iff ① g(x) \text{ 차수} = f(x) \text{ 차수} \quad ② a \text{ 는 최고차항 계수비}$$

6. 함수와 극한의 대소관계 ($x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ 모두 성립)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 가 존재하고

$$(1) f(x) < g(x) \text{ (} f(x) \leq g(x) \text{도 가능)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \text{ (} L \text{은 실수) 이고}$$

$$(2) f(x) \leq h(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) \text{도 } L \text{ (} \therefore \text{샌드위치 정리)}$$

$\rightarrow$ ① 문제에 제시된 대로 $h(x)$ 조작

② $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 구한 뒤 $\lim h(x)$ 와 같음을 이용

$x \rightarrow \infty$ 일때
함수의 극한값 계산

* $x \rightarrow \infty$ 인지, $x \rightarrow 0$ 인지 잘 구분하도록 하자!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = (0 \text{대입}) = \frac{2}{1+1} = 1$$

* 로피탈의 정리 : 분자와 분모를 미분하자! (정의 사용 안하는 skill)

$$\text{ㅇ꼴에서, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \text{ 이면 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{g'(a)}{f'(a)}$$

* $\infty - \infty$ 꼴은 최고차항 계수·차수 모두 같을 때만 적용됨! $\Rightarrow$ 유리화하기

다들 때는 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한의 계산법에 따른다. $\Rightarrow$ 최고차항 계수 비교

* 함수의 결정 (4분자와 분모의 0의 개수 비교하기)

i) 최고차항 $\Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ 꼴.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{ax^n + \dots} = k \Rightarrow f(x) = k \times ax^n + \dots$$

ii) 최저차항 $\Rightarrow \frac{0}{0}$ 꼴

$$\textcircled{if} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = k \begin{cases} k \neq 0: f(x) = (x-a)^n g(x), g(a) = k \\ k = 0: f(x) = (x-a)^{n+1} (\dots) \end{cases}$$

$$\textcircled{if} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = k \begin{cases} k \neq 0: f(x) = \dots + k \cdot x^n \\ k = 0: f(x) = \dots + (\text{적어도}) \square \times x^{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ㅇㅇ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 1 \text{차항계수}$$

$\leadsto f'(0) = 0 \iff x$ 축과 접한다.

* 극한값이 0인 조건의 활용

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^n}{f(x)} = 0 \iff f(x) \text{는 } (x-a)^{n-1} \text{까지만 인수로 가정}$$

$$\textcircled{2} \text{ 분자의 극한값과 관계 } \times \text{ 극한값 } 0 \iff \text{분자는 } (x-a) \text{를 인수로 가정}$$

$$\text{* 로피탈 대신 수렴하는 부분들로 끊는 연습하기 } \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(\sqrt{x+2}+2)}{x-1} \rightarrow 4$$

* 어떤 한 점 주어진다면 $\Rightarrow x$ 축, y 축에 수선의 발부터 내려기

이등변 $\Delta \Rightarrow$ 수선의 발부터 그리기 ($\therefore$ 높이 설정) // 주각 수직 평행인 변을 일반설정

* $\lim_{x \rightarrow a}$ 에서 $x \rightarrow a$ 를 보고 생각해야 하는 idea 2가지

① $(x-a)$ 로 인수분해 할 수 있다.

② 식 조작할 때 $(x-a)$ 로 분자·분모 나눈다.

* 절댓값 주의! $\textcircled{if} \lim_{x \rightarrow 0} |x| \{ f \dots \}$ 식으로 있다면 $x > 0$, $x < 0$ 나눠서 풀기.

* 도형의 극한 문제는 좌측정 계산부터 X. 관찰 $\Rightarrow$ 도형 특징 확인 후 start!

무엇때고 아무 도형이나 내치 X (특히 수직이등변선 $\iff$ 이등변 Δ)

* $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$ 가 존재하도록 한다 (f, g 모두 불연속)

<sol 1> f, g 의 불연속 점끼리의 대소관계 $\rightarrow$ case 분류 >

sol 2) 움직이면서 직관적으로 (∞ 뉴런)

누구해야 하는 걸 먼저 정리한 뒤 문제해결방법 세우기

★ (가) $\infty - \infty$ 꼴 : $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형

i) 유리식 포함 $\Rightarrow$ 유리화 진행

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2} \left(\because \frac{1}{1+1} \right)$$

ii) 유리식 포함 $\Rightarrow$ 최고차항으로 묶음

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \infty \text{ (발산)}$$

(4) $\frac{0}{0}$ 꼴 ($x \rightarrow a$)

i) 유리식 포함 $\Rightarrow$ 유리화 후 약분

ii) 유리식 포함 $\Rightarrow$ 인수분해 후 약분

(5) $\infty \times 0$ 꼴 : $\infty \times C$, $\frac{C}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ (이런 상수) 꼴로 변형 $x \rightarrow a$ 일때 함수의 극한값

i) 유리식 포함 $\Rightarrow$ 유리화

ii) 유리식 포함 $\Rightarrow$ 통분/인수분해 후 약분

5. 미정계수의 결정 ★★

(1) $\frac{0}{0}$ 꼴 $\Rightarrow$ (E) 좌분하게 just 계산

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ 분자} = 0 \rightarrow \text{분자} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a (a \neq 0), \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

(E) $\cdot 0$ 아닌 극한값 분자=0 $\rightarrow$ 분자=0

(2) $\infty - \infty$ 꼴에서 $\sqrt{\quad}$: 유리화

(3) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = a (a \neq 0) \iff \textcircled{1} g(x) \text{ 차수} = f(x) \text{ 차수} \textcircled{2} \text{ a는 최고차항 계수비}$$

6. 극한과 극한의 대관계 ($x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ 모두 성립)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 가 존재하고

$$(1) f(x) < g(x) \text{ (} f(x) \leq g(x) \text{도 가능)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \text{ (L은 실수) 이고}$$

$$(2) f(x) \leq h(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) \text{도 } L \text{ (}\because \text{샌드위치 정리)} \textcircled{E}$$

$\rightarrow$ ① 문제에 제시된 대로 $h(x)$ 조작

② $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 구한 뒤 $\lim h(x)$ 과 같음을 이용

* 역함수의 극한 (뉴턴 문제 2번)

sol 1) $y=x$ 그래프에 대해 대칭시켜서 그리기

sol 2) y 축 $\leftrightarrow x$ 축 서로 바꾸기.

* 수렴하는 덩어리끼리! 잘 찾아내어 이들의 합자 곱 몫으로 재구성.
수렴하는 극한식을 보고 바로 계산 조작 X. (뉴턴 문제 9번) (E)

* 무한대로 발산하는 함수의 처리 : $\lim$ 안에서 식 조작은 자유롭다.

$\lim$ 안에 수렴하는 것들만 있으면 $\rightarrow$ 수렴형 계산산

$\lim$ 안에 발산하는 것이 보인다면 $\rightarrow \lim$ 안 식 조작 (뉴턴 문제 10번)

$0 \times \infty$ 꼴 만들기 ($\because$ 발산함수로 묶기)



$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = k \begin{cases} k \neq 0 : f(x) = \dots + k \cdot x^n \\ k = 0 : f(x) = \dots + (\text{적어도}) \square \cdot x^{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 1 \text{ 차항계수}$$

$$\rightsquigarrow f'(0) = 0 \iff x \text{ 축과 접한다.}$$

* 극한값이 0인 조건의 활용

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^n}{f(x)} = 0 \iff f(x) \text{는 } (x-a)^{n-1} \text{ 가지만 인수로 가정}$$

$$\textcircled{2} \text{ 분자의 극한값과 관계 X 극한값 } 0 \iff \text{분자는 } (x-a) \text{를 인수로 가정.}$$

* 로피탈 대신 수렴하는 부분들로 끊는 연습하기 $\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x+2)}{x-1} \xrightarrow{4, 2}$

* 어떤 한 점 주어진다면 $\rightarrow x$ 축, y 축에 수선의 발부터 내려기

이등변 $\Delta \rightarrow$ 수선의 발부터 그리기 ($\because$ 높이 설정) // 축과 수직-평행인 변을 일반설정

* $\lim_{x \rightarrow a}$ 에서 $x \rightarrow a$ 를 보고 생각해야 하는 idea 2가지

① $(x-a)$ 로 인수분해 할 수 있다.

② 식 조작할 때 $(x-a)$ 로 분자-분모 나눈다.

* 절대값 주의! $\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} |x| \{ f \dots \}$ 식으로 있다면 $x \geq 0$, $x < 0$ 나눠서 풀기.

* 도형의 극한 문제는 좌측정 계산부터 X. 관찰 $\Rightarrow$ 도형 특징 확인 후 start!

무터대고 아무 도형이나 내지 X (특히 수직이등변선 $\iff$ 이등변 Δ) (E)

* $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$ 가 존재하도록 한다 (f, g 모두 불연속)

$\hookrightarrow$ sol 1) f, g 의 불연속 점끼리의 대관계에 case 분류 (E)

sol 2) 움직이면서 직관적으로 (∞ 뉴턴)

능구해야 하는 걸 먼저 정리한 뒤 문제해결방법 세우기 ✨

I. 함수의 극한과 연속 - 02. 함수의 연속

1. 함수의 연속과 불연속

(1) 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 정의됨 $\dots f(a)=a$

극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재함 $\dots \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \dots a=b$

$\therefore$ 함수 $f(x)$ 은 $x=a$ 에서 연속

(2) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속 $x =$ 불연속

* $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 가 불연속이 되는 x 값: $0, \pm 2$

* 함수의 연속 판단은 ①의성정 찾기 $\rightarrow$ ② 직접 체크 (정의이름)

* 닫힌구간에서 연속 = 열린구간에서 연속 +

② 우극한 = 함수값 $\dots \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$

좌극한 = 함수값 $\dots \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)$

* 주기함수에서 연속 판단: 시작점 함수값 = 끝점 함수값

$f(a) = \lim_{x \rightarrow (a+p)-} f(x)$ 한 주기 안에서 해결.

2. 연속함수

(1) 구간

$\{x | a \leq x \leq b\} \dots [a, b]$ 닫힌구간

$\{x | a < x < b\} \dots (a, b)$ 열린구간

$\{x | a \leq x < b\} \dots [a, b)$ 반닫힌구간 = 반열린구간

$\{x | x \leq a\} \dots (-\infty, a]$

실수 전체의 집합 $\dots (-\infty, \infty)$

(2) 구간에서의 연속

i) 열린구간 (a, b) 에서 연속

ii) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)$

함수 $f(x)$ 는 구간 $[a, b]$

에서 연속

3. 연속함수의 성질

$f(x), g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$ 에서 연속이다.

① $c f(x)$ (c 는 상수)

② $f(x)g(x)$ ($f(x)=0$ 인 x 에서는 불연속)

③ $f(x) \pm g(x)$

$\frac{f(x)}{g(x)}$ ($c \neq 0$)

$g(f(x))$ 는 따져봐야 한다. $\Rightarrow f(x)$ 는 $x=a$ 연속. $g(f(x))$ 은 $f(x)=f(a)$ 연속.

$\rightarrow i) g(f(a)) = a$

ii) $\lim_{x \rightarrow a+} g(f(x)) = a$ iii) $\lim_{x \rightarrow a-} g(f(x)) = a$ 되는 2점.

* 다항함수는 항상 모든 실수 x 에 대하여 연속이다.

* $f(x), g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속 $\rightarrow f(g(x))$ (항상) 연속

but. $g(x)$ 치역 $c < f(x)$ 정의역 / 실수전체의 집합에서 정의된 $f(x), g(x)$

조건 있으면 $\rightarrow$ (극한도 똑같음)

* $f(x), f(x)g(x)$ 연속함수 $\rightarrow g(x)$ 연속함수 $\dots f(x) \neq 0$ 인 조건이 없어서.

* 연속함수 조건을 풀때 새로 나온 함수를 $h(x)$ 라 정의하고, 뒤의 함수를 $h(x)$ 를

이용하여 적절히 변형한 뒤 항-거짓을 판별한다.

* 연속함수 연속 판별 문제에서 $c+$ (c 는 상수)는 그래프 개형이 위아래가 있을때,

c 는 그래프 개형이 직선일때 쓴다.

* 함성함수에서 연속 판단: 대응관계 꼭 그리기! $x \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x))$

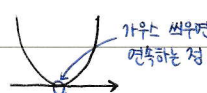
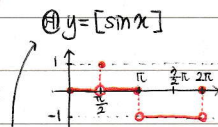
$f(g(x))$ $\left\{ \begin{array}{l} x=a \text{ 연속?} \left\{ \begin{array}{l} a- \dots a+ \\ \text{의성정 찾아서 } a \text{ 있는지 확인} \end{array} \right. \end{array} \right.$

실수전체 연속? = 의성정 찾기

1st. 속함수 $x=a, b$ 불연속

2nd. 결함수 ① $x=c$ 불연속 $\rightarrow g(x)=c$ 인 x 찾기

DO NOT COPY



(7) $(x-a) f(x) = g(x)$ 에서 $f(x)$ 연속

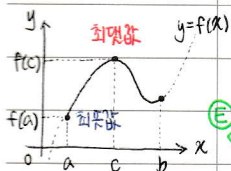
$\rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{x-a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a} = f(a)$ 이용 ($\because \frac{0}{0}$ 꼴 이용)

* 동한상의 오류 주의! ((3)번)

틀린 방법 $\rightarrow x \neq a$ 일때 $f(x) = \frac{g(x)}{x-a} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a}$ 값 구하기

$\rightarrow$ ③ 이 함수는 모든 실수 x 에서 연속이므로 극한값 = 함수값 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a} = f(a)$

5. 최대·최소 정리 $\rightarrow$ 유형 9 수능완성



$f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속

$\Rightarrow f(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 반드시 최댓값·최솟값 $\circ$

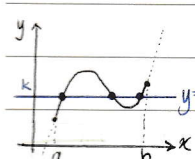
② 단, 역은 성립하지 않는다. 불연속인 함수도 존재가능

* 연속인 함수가 최대·최솟값을 갖는다. $\rightarrow$ 무조건 $\circ$. 증명 안해도 됨!

단, 열린구간 (a, b) 에서는 최대·최솟값이 존재하지 않을 수도 있다

* 최대·최소 정리에 의하여 '라는 조건이 있을 때 최대·최소를 갖더라도 한번 확인해보기!

6. 사잇값의 정리 $\rightarrow$ 유형 9 수능완성



$f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$

$f(a) \neq f(b) \Rightarrow f(a)$ 와 $f(b)$ 사이 임의의

값 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 c 가 a, b 사이

적어도 하나 존재함

* 사잇값 정리를 통해 방정식의 실근 판별하기

④ 세 실수 $a < b < c$ 에 대하여 다음 방정식의 근을 판별하라.

① 새로운 방정식 $= f(x)$ 로 치환
 $[f(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)] = 0$ 이 서로 다른 두 실근

② $f(a), f(b), f(c)$ 의 값 구하기 $\rightarrow f(a) > 0, f(b) < 0, f(c) > 0$

$\Rightarrow f(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

④ 그래프 그리기 $\rightarrow$



⑤ $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f(c) = 0$ 인 c 가 적어도 하나 존재함

$\sim$ 방정식 $f(x) = 0$ 이 a, b 사이에서 적어도 하나의 실근을 가짐

$\circ$ 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{x-5} = 10, \lim_{x \rightarrow 10} \frac{f(x)}{x-10} = 5$ 가 성립.

구간 $[5, 10]$ 에서 방정식 $f(x) = 0$ 은 적어도 몇개의 실근?

① $f(5) = 0, f(10) = 0$

② if $f(x)$ 가 2차 $\rightarrow f(x) = a(x-5)(x-10)$ 을 ①식에 대입 $\Rightarrow a \neq 0$

if $f(x)$ 가 3차 $\rightarrow f(x) = (x-5)(x-10)(ax+b)$ 을 ①식에 대입 $\Rightarrow a \neq 0$

③ $f(x) = (x-5)(x-10)(\frac{2x}{5}-5) \Rightarrow x=5, 10, \frac{25}{2}$

$\therefore$ 적어도 3개의 실근을 가진다.

$\circ$ 사잇값의 정리를 통해 최솟값의 개수를 구할 때는 주어진 조건 이외의 값의 부호를 함께

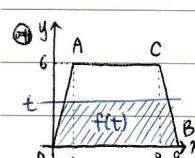
한다. ④ $f(1)f(2) < 0, f(2)f(4) < 0$ 일때, $f(1) = +$ 이라 하면 $f(2) = f(4) = -$

$\circ$ 연속함수 $f(x)$ 에서 $f(1) > 0, f(2) < 0, f(3) > 0$ 인 $(1, 3)$ 에서

적어도 한개의 실근을 가질 수도 있다. (x) $\Rightarrow$ 최솟값 2개 이상의 근을 가짐.

$\circ f(4+x) = f(4-x)$ 는 주기가 4인 함수가 아니라 $x=4$ 가 대칭축인 함수이다.

$\circ$ 넓이와 사잇값의 정리의 응용 $\Rightarrow$ 넓이를 $f(t)$ 라 하고 해결한다!



$\square ABC$ 의 넓이를 이용분하고 x 축에 평행한 직선 존재함

⑤ why? $f(0)=0, f(6)=48$ 이므로 $f(3)=\frac{48}{2}=24$ 인

c 가 0과 6 사이에 존재한다.

$\circ f(m)f(m+1) < 0$ 을 만족시키는 정수 m 의 값 구하기

$\Leftrightarrow (정수)(정수+1) < 0 \dots$ 함수값의 부호가 바뀔

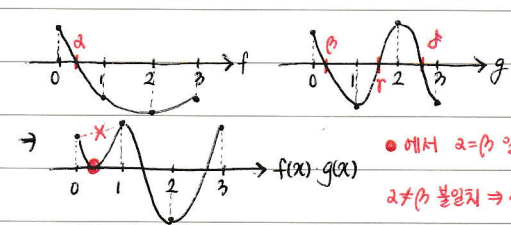
$\circ$ 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속인 두 함수 $f(x), g(x)$ 에서

(가) $f(0) > 0, f(0)f(1) < 0, f(1)f(2) > 0, f(2)f(3) > 0$

(나) $g(0) > 0, g(1) < 0, g(2) > 0, g(3) < 0$

방정식 $f(x)g(x) = 0$ 은 구간 $(0, 3)$ 에서 적어도 n 개의 실근을 갖는다. n 은?

$\star$ 반드시! $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프를 그려서 판단한다.



$\circ$ 에서 $a=b$ 일치 $\rightarrow$ 3개 실근

$a \neq b$ 불일치 $\rightarrow$ 4개 실근.

$\circ$ 사잇값의 정리를 이용하여 다음 방정식은 서로 다른 두 실근을 가짐을 보이시오. (서로동형)

$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-r) + (x-a)(x-r) = 0 \quad (a < b < r)$

1) 함수 $f(x)$ 는 $[a, b], [b, r], [a, r]$ 에서 모두 연속이다.

2) $f(a) > 0, f(b) < 0, f(r) > 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여

3) (a, b) 와 (b, r) 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

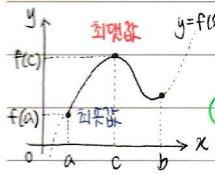
한편, $f(0) = 0$ 은 이차방정식이므로 최대 2개의 실근을 갖는다.

$\therefore$ 따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(가) $(x-a)f(x) = g(x)$ 에서 $f(x)$ 연속

$\rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{x-a}$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a} = f(a)$ 이용 ($\because \frac{0}{0}$ 꼴 이용)

5. 최대-최소 정리 $\rightarrow$ 유형 9 수능완성

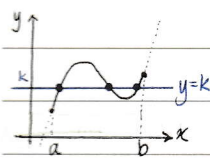


$f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속

$\rightarrow f(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 반드시 최댓값·최솟값

만약 성립하지 않는다. 불연속인 함수도 존재!

6. 사잇값의 정리 $\rightarrow$ 유형 9 수능완성



$f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고

$f(a) \neq f(b) \Rightarrow f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의

값 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 c 가 a, b 사이

적어도 하나 존재함

(가) $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f(c) = 0$ 인 c 가 적어도 하나 존재함

$\rightarrow$ 방정식 $f(x) = 0$ 이 a, b 사이에서 적어도 하나의 실근을 가짐

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{x-5} = 10$, $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{f(x)}{x-10} = 5$ 가 성립.

구간 $[5, 10]$ 에서 방정식 $f(x) = 0$ 은 적어도 몇 개의 실근?

① $f(5) = 0$, $f(10) = 0$

$\rightarrow$ 사잇값 정리 활용 = $f(x)$ 의 최솟값을 구하는 문제!

② $f(x)$ 가 2차 $\rightarrow f(x) = a(x-5)(x-10)$ 을 ①식에 대입 $\Rightarrow a > 0$

if $f(x)$ 가 3차 $\rightarrow f(x) = (x-5)(x-10)(ax+b)$ 을 ①식에 대입 $\Rightarrow a > 0$

③ $f(x) = (x-5)(x-10)$ ($\frac{25}{5} \frac{x-5}{x-5} \Rightarrow x=5, 10$) $\rightarrow [5, 10]$ 구간 성립하는지 확인하기!

$\therefore$ 적어도 3개의 실근을 가짐.

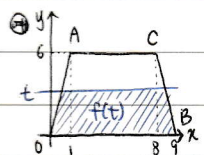
사잇값의 정리를 통해 최솟값의 개수를 구할 때는 주어진 조건 이외의 값의 부호를 함께 한다. $f(1)f(2) < 0$, $f(2)f(4) < 0$ 일때, $f(1) = +$ 이라 하면 $f(2) = f(4) = -$

연속함수 $f(x)$ 에서 $f(1) > 0$, $f(2) < 0$, $f(3) > 0$ 인 $(1, 3)$ 에서

오직 한개의 실근을 가질 수도 있다. (x) $\Rightarrow$ 최솟값 2개 이상의 근을 가짐.

$f(4+x) = f(4-x)$ 는 x 가 4인 함수가 아니라 $x=4$ 가 대칭축인 함수이다.

넓이와 사잇값의 정리의 응용 $\rightarrow$ 넓이를 $f(t)$ 라 하고 해결한다!



$\square ABC$ 의 넓이를 이등분하고 x 축에 평행한 직선 존재함

(why) $f(0) = 0$, $f(6) = 48$ 이므로 $f(3) = \frac{48}{2} = 24$ 인

c 가 0과 6 사이에 존재한다.

* 우함수, 기함수를 통해 연속 판단 (뉴턴 1번 문제)

$g(x) = f(x) + f(-x)$ 일때 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 존재?

$\rightarrow$ 그래프를 직접 그려봐도 되지만, $g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$ 로

$g(x)$ 는 우함수 $\Leftrightarrow y$ 축 대칭 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 항상 존재.

* 구간별로 정의된 함수의 연속은 연결지점에서의 좌·우극한 = 함수값을 일치시킨다. (뉴턴 3번 문제)

cf.) 새롭게 정의한 함수가 직선 & 곡선이면 (뉴턴 5번 문제)

연속조건 $\Rightarrow$ 곡선과 직선의 교점을 연결지점으로 한다.

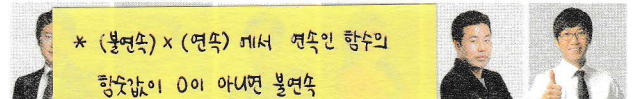
미분가능조건 $\Rightarrow$ 곡선에 직선이 접할때를 연결지점으로 한다.

* 곱함수 연속이면 $x \rightarrow g(x) \rightarrow (f \cdot g)(x)$ 에서 $g(x)$ 방향성 필요 X

결함수가 연속 X 경우 / 곱함수를 구하는 경우는 방향성 꼭 O

* $f(1) = f(0) = 3 \Leftrightarrow f(x) - 3 = x(x-1) \dots$

위의 경우처럼 $f(x)$ 식을 편리하게 재구성하는 것도 중요!!



* (불연속) $\times$ (연속) 에서 연속인 함수의 함수값이 0이 아니면 불연속

② $f(x)$ case 1. 불연속인 함수의 좌·우극한 각각 0 < 0 , $f(c) > 0$

$\Rightarrow (x-a)$ 인수 1개 추가

④ $g(x)$ case 2. " 극한이 $+\infty$ - 무한대로 발산

$\Rightarrow 0 \times \infty$ 꼴의 부정형 직접 계산

: 0의 개수 분모·분자 비교하기

⑤ $f(x) = \frac{1}{x-a}$, $g(x) = (x-a)^2$ 보다↑

$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$, $g(x) = (x-a)^3$ 보다↑

* 사잇값의 정리 $\Rightarrow$ 실근의 존재성

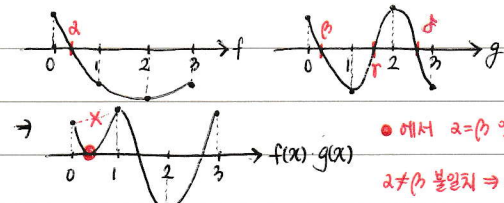
평균값의 정리 $\Rightarrow$ 미분계수의 존재성

(가) $g(0) > 0$, $g(1) < 0$, $g(2) > 0$, $g(3) < 0$

$f(x) = 0$ or $g(x) = 0$

방정식 $f(x)g(x) = 0$ 은 구간 $(0, 3)$ 에서 적어도 3개의 실근을 가짐. n은?

* 반드시! $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프를 그려서 판단한다.



에서 $a < b$ 일지 $\rightarrow$ 3개 실근

$a \neq b$ 불일치 $\Rightarrow$ 4개 실근.

사잇값의 정리를 이용하여 다음 방정식은 서로 다른 두 실근을 가짐을 보이시오. (서도형)

$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-r) + (x-a)(x-r) = 0$ ($a < b < r$)

1) 함수 $f(x)$ 는 $[a, b]$, $[b, r]$, $[a, r]$ 에서 모두 연속이다.

2) $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f(r) > 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여

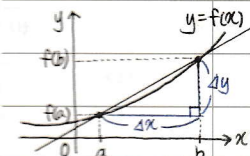
3) (a, b) 와 (b, r) 에서 각각 적어도 하나의 실근을 가짐.

한편, $f(0) = 0$ 은 이차방정식이므로 최대 2개의 실근을 가짐.

$\therefore$ 따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가짐.

II. 다항함수의 미분법 - 미분계수와 도함수

1. 평균변화율



x 의 값의 변화량 $b-a=x$ 의 증분 $=\Delta x$

y 의 값의 변화량 $f(b)-f(a)=y$ 의 증분 $=\Delta y$

cf.) $\Delta x = b-a$ 이므로 $b = a + \Delta x$

$y=f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 **평균변화율**:

$$\left[\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \tan \theta \right]$$

기하학적 의미: 두 점을 지나는 접선의 기울기

$\lim$ 가 없으면 평균변화율, $\lim$ 가 있으면 순간변화율.

* $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\frac{x+y}{2})$... 임의의 두 실수 x, y 에 대해 만족

$\Rightarrow f(x)$ 는 이차함수 ($f(x)$ 가 상차함수이면 항상 성립은 X)

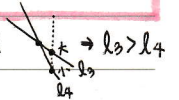
* 평균변화율=기울기 = 직각 $\Delta = \tan \theta \xrightarrow{\text{극한값}}$ 순간변화율 = 미분계수

* 분수식 ... 기울기와 관련

* $f(b)-f(a)$ 함수값의 차 $\Leftrightarrow$ ① 변화율의 형태로 변형: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times (b-a)$

② 도함수의 정적분: $\int_a^b f(x)dx = f(b)-f(a)$

* 기울기의 대소비교 밝히는 방법: 교점중심 오른쪽에서 비교

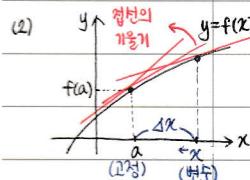


2. 미분계수와 미분계수의 기하학적 의미

(1) $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 **순간변화율=미분계수=평균변화율의 극한값**:

$$\left[f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right]$$

기하학적 의미: 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기



x (변수)가 a (정)에 가까워질수록

접선의 기울기는 $f(a)$ 에서의 접선의

기울기에 가까워진다.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta)-f(a)}{\Delta-a}$$

* $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh} = \frac{m-n}{k} \times f'(a)$... 바르게 계산하는 법

* 한쪽을 먹지로 맞추면 한쪽은 양아서 맞춰진다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2f(x)-x)f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2f(x)-x)f(x)-f(x)(x-2)}{x-2} = 2f'(2)-f(2)$$

* $a < b$ 일때 곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록하면 $f'(a) > f'(b)$

$$: f(\frac{a+b}{2}) > \frac{f(a)+f(b)}{2}, f'(a) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, f'(\frac{a+b}{2}) > f'(\frac{a+b}{2})$$

* 곡선 $y=f(x)$ 가 아래로 볼록하면 $f'(a) < f'(b)$

$$: f(\frac{a+b}{2}) < \frac{f(a)+f(b)}{2}, f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, f'(\frac{a+b}{2}) < f'(\frac{a+b}{2})$$

$$* \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(px)-f(ap)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(px)-f(ap)}{px-ap} \times p = p \cdot f'(ap)$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \text{ 이용하기}$$

3. 미분가능성과 연속성 ($\Rightarrow$ 도함수 활용 (9) 뒤에 씀)

(1) 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 정의됨 ... $f(a)$ 가 존재함

극한값이 존재함 ... $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 존재함 $\rightarrow f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow$ 연속

좌미분계수 = 우미분계수 ... $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\Rightarrow$ 미분가능한 함수

* 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 불연속인 점 $\Rightarrow$ 연속되지 않고 끊어진 점

미분가능하지 않은 점 $\Rightarrow$ 불연속인 점. 볼록한 점

* $f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \geq a) \\ h(x) & (x < a) \end{cases}$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 ① $g(a)=h(a)$
② $g'(a)=h'(a)$

$\hookrightarrow$ 서둘러 풀이는 미분계수의 정의를 이용해서 작성한다.

(2) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속

반례) $f(x)=|x|$ 는 연속 but 미분불가능

$\therefore$ 직관적으로 생각해서 $f(x)$ 는 볼록한 점이없는 부드러운 함수 개형을 가질때

미분가능하다.

① 연속인 $f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \sim \text{식 ①}$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = d, \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = b \rightarrow d=b \sim \text{식 ②}$$

② 식 ①과 ②를 연결해서 답을 구한다.

* 미분가능하면 연속인 함수임을 증명하십시오. ($x=a$ 미분가능 $\rightarrow x=a$ 연속)

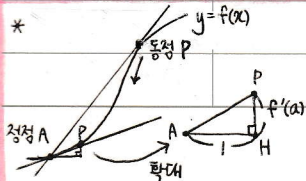
i) $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = p(x)$ 라 하고 $x-a = q(x)$ 라 하면 $= k(\text{상수}) = 0 (\because \text{다항함수})$

ii) $\lim_{x \rightarrow a} p(x) \cdot q(x) = \lim_{x \rightarrow a} p(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} q(x)$... 극한의 성질 이용

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x)-f(a)) = k \cdot 0 = 0 \quad (k = f'(a) = k)$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ $\therefore$ 따라서 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 연속인 함수이다.

* $f(x)$ 는 $f'(x)$ 로 나누어떨어진다. $\Leftrightarrow f(x)$ 는 $f'(x)$ 를 인수로 가진다. $\times$



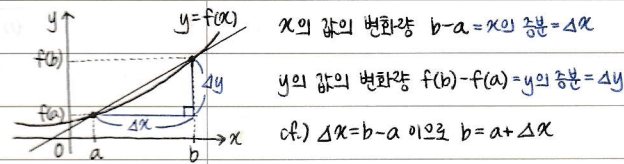
미분계수의 기하적 정의 (유연 3번문제)

① $\lim_{P \rightarrow A} (\text{직선 PA 기울기}) = f'(a)$

② $f'(a)=k$ 일때, $\triangle APH$ 에서 (일변의 길이): (높이) = 1 : k

II. 다항함수의 미분법 - 미분계수와 도함수

1. 평균변화율



$y=f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 b 까지 변화할 때의 **평균변화율**:

$$\left[\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \tan \theta \right]$$

기하학적 의미: 두 점을 지나는 직선의 기울기

2. 미분계수와 미분계수의 기하학적 의미

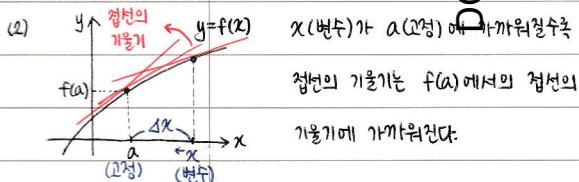
(1) $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 **순간변화율** = **미분계수** = **평균변화율의 극한값**:

$$\left[f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right]$$

Δx 대신 h 사용

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \tan \theta \quad (0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$$

기하학적 의미: 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기



3. 미분가능성과 연속성 (→ 도함수 활용 (3) 뒤에 씀)

(1) 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 정의됨 ... $f(a)$ 가 존재함

극한값이 존재함 ... $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 존재함 $\rightarrow f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow$ **연속**

좌미분계수 = 우미분계수 ... $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\Rightarrow$ **미분가능한 함수**

(2) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속

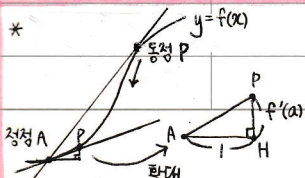
반례) $f(x)=|x|$ 는 연속 but 미분불가능

∴ 직관적으로 생각해서 $f(x)$ 는 뾰족한 점이 없는 부드러운 함수 개형을 가질때

미분가능하다.

* (미분가능한 함수) + (미분 불가능한 함수) = (미분 불가능한 함수)

but. 공변이나 합성함수는 케바케임! 정의대로 하자!

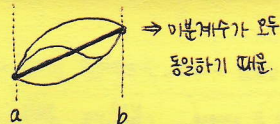


미분계수의 기하적 정의 (구분 3번문제)

① $\lim_{P \rightarrow A} (\text{직선 PA 기울기}) = f'(a)$

② $f'(a)=k$ 일때, $\triangle APH$ 에서 (밑변의 길이): (높이) = 1:k

* 함수가 뾰죽있을 때 가장 특수한 경우는 직선으로 이어진 경우이다.



* 함수 관련 "부등식" $\rightarrow$ 불확 (양기까지 할 필요 X) 그래프 해석

* ㉔ 아래로 볼록하면 (오목볼록/승가장소) 변화율 = 미분계수

* ① $a \neq b$ 일때 $\frac{f(a)+f(b)}{2} > f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

* ② $a < b < c$ 일때 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ 변형: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \times \frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)(c-b)}$

* ③ $a < b$ 일때 $f'(a) < f'(b)$

* ④ $x+a$ 일때 $f(x) > f'(a)(x-a) + f(a)$ 에서 비교 $\rightarrow l_3 > l_4$

* $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할때 미분계수는

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)-f(a)}{h} = 0$$

* $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{mh-nh} = \frac{m-n}{m-n} \times f'(a)$ $\rightarrow$ 바르게 계산하는 법

* 한쪽을 먹지로 맞추면 한쪽은 알아서 맞춰진다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)-xf(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(f(x)-f(2))}{x-2} = 2f'(2) - f(2)$$

* $a < b$ 일때 곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록하면 $f'(a) > f'(b)$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}, f'(a) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, f'(\sqrt{ab}) > f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

* 곡선 $y=f(x)$ 가 아래로 볼록하면 $f'(a) < f'(b)$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}, f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, f'(\sqrt{ab}) < f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(px)-f(ap)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(px)-f(ap)}{px-ap} \times p = p \cdot f'(ap)$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \text{ 이용하기}$$

* 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 불연속인 점 $\Rightarrow$ 연속되지 않고 끊어진 점

미분가능하지 않은 점 $\Rightarrow$ 불연속인 점. 뾰족한 점

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \geq a) \\ h(x) & (x < a) \end{cases} \text{가 } x=a \text{에서 미분가능하면 } \begin{cases} ① g(a)=h(a) \\ ② g'(a)=h'(a) \end{cases}$$

$\rightarrow$ 서둘러 풀이는 미분계수의 정의를 이용해서 작성한다.

$$① \text{ 연속인 } f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \sim \text{식 ①}$$

$$② \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \alpha, \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \beta \rightarrow \alpha = \beta \sim \text{식 ②}$$

③ 식 ①과 ②을 연결해서 답을 구한다.

* 미분가능하면 연속인 함수임을 증명해시오. ($x=a$ 미분가능 $\rightarrow x=a$ 연속)

$$i) \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = p(x) \text{라 하고 } x-a = q(x) \text{라 하면}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow a} p(x) \cdot q(x) = \lim_{x \rightarrow a} p(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} q(x) \dots \text{극한의 성질 이용}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x)-f(a)) = k \cdot 0 = 0 \quad (k = f'(a) = k)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \therefore \text{따라서 미분가능한 함수 } f(x) \text{는 연속인 함수이다}$$

* $f(x)$ 는 $f'(x)$ 로 나누어 떨어진다. $\Leftrightarrow f(x)$ 는 $f'(x)$ 를 인수로 가진다. $\checkmark$

* $\lim_{a \rightarrow b} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ 등정 = 정정

* 복잡한 함수의 미분계수는 (분자) = $f'(x)$

예) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x+1)}$
 $f(1) = 0$

4. 도함수

(1) 도함수

$y = f(x)$ 가 정의역에 속하는 모든 x 에서 미분가능할 때, 정의역의 각 원소 x 에

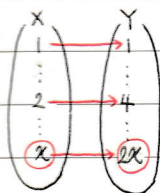
미분계수 $f'(x)$ 를 대응시킬 때 얻은 새로운 함수 = 도함수

$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 도함수의 정의 가장 중요

(2) $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분한다 = 도함수 $f'(x)$ 를 구한다

예) $f(x) = x^2$ 의 $x=a$ 미분계수

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$$



$f(x) = x^2$
 $f'(x) = 2x \Rightarrow$ 도함수

$\rightarrow f, g$ 미가 $\Rightarrow cf(x), f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$ 미가

5. 미분법의 공식

① $y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot h + \dots + h^n}{h} = n \cdot x^{n-1}$$

② $y = c$ (상수) $\rightarrow y' = 0$

③ $y = cf(x) \rightarrow y' = c \cdot f'(x)$

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때

④ $y = f(x) \pm g(x) \rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$

⑤ $y = f(x) \cdot g(x) \rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

⑥ $y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \rightarrow y' = f'g h + fg'h + fgh' \dots f(x) \cdot I(x)$ 로 치환

⑦ $y = f(x)^n \rightarrow y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

$[f(x)g(x)h(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

* 도함수의 함수값이 미분계수이다. 직관적으로 생각할 때, 미분계수는 수명의

각 항을, 도함수는 수명의 일반항을 의미한다. 도함수는 식으로 나오고 미분계수는

특정 값으로 나온다.

* 분수함수, 유리함수의 미분계수 구하기

* $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = 2f'(a)$ (0)

but. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ 이 존재하면 $2f'(a)$ 이다. (x)

반례) $f(x) = |x-a|$ 에서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{h} = 0$ 이므로 $2f'(a) \times$

* $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} = a$ 라면 $x=a$ 에서 미분가능하다. (x) $\div |h|$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} = p$ 라면 $x=a$ 에서 미분가능하다. (o)

첫번째 식은 $\left[\begin{matrix} h \rightarrow 0+ \\ h \rightarrow 0- \end{matrix} \right] \Rightarrow h^2 \rightarrow 0+$ 이므로 우변 미분계수를 나타내기 때문.

두번째 식은 $\left[\begin{matrix} h \rightarrow 0+ \\ h \rightarrow 0- \end{matrix} \right] \Rightarrow h^2 \rightarrow 0+ \text{ 이므로 } \text{우변 미분계수를 모두 나타내기 때문.}$

* $f(x) = \frac{1}{x+1}$ 의 도함수를 구하라. ... 정의대로 이용한다

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(x+1)(x+h+1)h} = \frac{-1}{(x+1)^2} \therefore f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

* $g(x) = \sqrt{x}$ 의 도함수를 구하라. * 분수식은 통분. 무리식은 유리화

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \therefore f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

도함수

① (1) 도함수 $f'(x)$ 는 연속함수이다. ... $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$ 가능!

(2) 모든 실수 x 에 대하여 $xf'(x) = 2f(x) + x^2 + 3x$ 가 성립한다.

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2f(x)}{x} + x + 3 \right]$ $f'(0) = 2f'(0) + 3 \therefore f'(0) = -3$

② 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 $f'(x)$ 로 나누어질 때, 몫을 $g(x)$ 라 하고

$h(x) = f(x)g(x)$ 라 할 때, $h'(x)$ 의 값은?

(1) $f(x)$ 는 $f'(x)$ 로 나누어떨어진다. $\rightarrow f(x) = f'(x)g(x) \Rightarrow \frac{1}{2}x + k$

(2) $y = f(x)$ 의 그래프는 $(-1, 9)$ 를 지난다. $\rightarrow f(-1) = 9$

$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \frac{1}{2}f(x)$ $h'(-1) = \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{9}{2}$

③ 두 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^3 + bx^2 + ax + 1$ 의 관계

계수가 반대로 있음 $\Rightarrow$ 역수관계 (단, $f(\frac{1}{x}) \neq g(x)$. 해반법)

④ 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점과 직선 $y = r(x+2)$ 사이의

거리의 최댓값과 최솟값 구하기

: ① (중심-직선 거리) - r = 최솟 ② $|| + r$ = 최댓

⑤ $f(-x) = -f(x)$... 기함수 > 모든 항의 차수는 홀수이다.

$f(-x) = f(x)$... 우함수 > 모든 항의 차수는 짝수이다.

⑥ $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 에서 $f'(2) = 4$ 라면 $f'(x) = (x-1)(x-a)$ 처럼 계산!

* 미분계수와 부등식 in ⑤ Level 3 5번

4. 도함수

(1) 도함수

$y=f(x)$ 가 정의역에 속하는 모든 x 에서 미분가능할 때, 정의역의 각 원소 x 에

미분계수 $f'(x)$ 를 대응시킬 때 얻는 새로운 함수 = 도함수

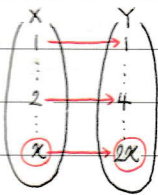
$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

도함수의 정의 가장 중요!!

(2) $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분한다 = 도함수 $f'(x)$ 를 구한다

(3) $f(x) = x^2$ 의 $x=a$ 미분계수

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$$



$f(x) = x^2$
 $f'(x) = 2x \Rightarrow$ 도함수

f, g 미가 $\Rightarrow cf(x), f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$ 미가

5. 미분법의 공식

① $y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot h + \dots + h^n}{h} = n \cdot x^{n-1} \quad (\text{단, } n \text{은 자연수})$$

② $y = c$ (c는 상수) $\rightarrow y' = 0$

③ $y = cf(x) \rightarrow y' = c \cdot f'(x)$

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때

④ $y = f(x) \pm g(x) \rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$

⑤ $y = f(x) \cdot g(x) \rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + f(x) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

⑥ $y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \rightarrow y' = f'g'h + fg'h' + fgh'' \dots f(x) \cdot I(x)$ 로 치환

⑦ $y = f(x)^n \rightarrow y' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

$[f(x)g(x)h(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

* 도함수의 항상값이 미분계

각 항을, 도함수는 수명의

특성 값으로 나온다.

* 분수함수, 유리함수의 미

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = \text{but. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

반례) $f(x) = |x-a|$ 예

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{(h^2)} = p \text{ 라면 } x=a \text{ 에서 미분가능하다. } (o)$$

첫번째 식은 $\left[\begin{matrix} h \rightarrow 0^+ \\ h \rightarrow 0^- \end{matrix} \right] \Rightarrow h^2 \rightarrow 0^+ \text{ 이므로 우변미분계수를 나타내기 때문.}$

두번째 식은 $\left[\begin{matrix} h \rightarrow 0^+ \Rightarrow h^2 \rightarrow 0^+ \\ h \rightarrow 0^- \Rightarrow h^2 \rightarrow 0^- \end{matrix} \right] \text{ 이므로 우변미분계수를 모두 나타내기 때문.}$

* $f(x) = \frac{1}{x+1}$ 의 도함수를 구하여라. ... 정의대로 미분한다

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(x+1)(x+h+1)h} = \frac{-1}{(x+1)^2} \therefore f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

* $g(x) = \sqrt{x}$ 의 도함수를 구하여라. * 분수식은 통분. 유리식은 유리한다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \therefore f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2항개념정의

• (1) 도함수 $f'(x)$ 는 연속함수이다. ... $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$ 가능!

(2) 모든 실수 x 에 대하여 $x f'(x) = 2f(x) + x^2 + 3x$ 가 성립한다. $f'(0)$ 은?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2f(x)}{x} + x + 3 \right] \quad f'(0) = 2f'(0) + 0 \therefore f'(0) = -3$$

• 최고차항의 계수가 1인 상차함수 $f(x)$ 가 $f'(x)$ 로 나누었을 때, 몫을 $g(x)$ 라 하고

$h(x) = f(x)g(x)$ 라 할 때, $h'(-1)$ 의 값은?

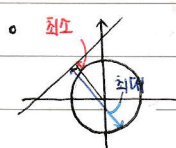
(1) $f(x)$ 는 $f'(x)$ 로 나누어떨어진다. $\rightarrow f(x) = \frac{f'(x)}{2} (x^2 + 1) \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + k$

(2) $y = f(x)$ 의 그래프는 $(-1, 9)$ 를 지난다. $\rightarrow f(-1) = 9$

$$h'(-1) = f'(-1) \cdot g(-1) + f(-1) \cdot g'(-1) = \frac{1}{2} f'(-1) \cdot 9 + 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2} f'(-1) + \frac{9}{2} \therefore 12$$

• 두 상차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, g(x) = cx^3 + bx^2 + ax + 1$ 의 관계

계수가 반대로 있음 $\Rightarrow$ 해는 역수관계 (단, $f(\frac{1}{x}) \neq g(x)$. 해판성립)



원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점과 직선 $y = r(x + 3)$ 사이의

거리의 최댓값과 최솟값 구하기

$$: \textcircled{1} (\text{중심} - \text{직선 거리}) - r = \text{최소} \quad \textcircled{2} " + r = \text{최대}$$

• $f(-x) = -f(x) \dots$ 기함수 $\Rightarrow$ 모든 항의 차수는 홀수이다.

$f(-x) = f(x) \dots$ 우함수 $\Rightarrow$ 모든 항의 차수는 짝수이다.

• $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 에서 $f'(2) = 4$ 라면 $f'(x) = (x-1)(x-a)$ 처럼 계산

* 미분계수와 부등식 m (E) Level 3 5번

II. 다항함수의 미분법 - 도함수의 활용(1)

1. 접선의 방정식

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식의 기울기는 미분계수 $f'(a)$ 와 같으므로

→ 접선의 방정식: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

* 접선: 항선의 극한 = 평원변화율의 극한

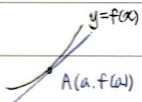
* 상차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ 의 한 근이 $x=-1$ 이다. $x=-1, 3$ (중근) $\Rightarrow g(x) = (x-3)^2(x+1) \rightarrow g'(x)=0, g(3)=0$.

* 곡선-직선/곡선, 원-직선/곡선 ... 접할때를 경계로 설정하기!

* $f'(a) = \pm 1, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$ 특수각과 직각 Δ 와 관련

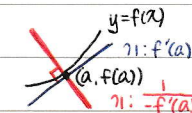
2. 접선의 방정식을 구하는 방법

(1) 접점의 좌표가 주어진 경우 → 접선의 기울기를 구한다.



i) 접점의 기울기: $f'(a)$

ii) $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

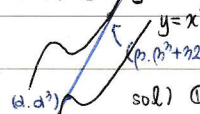


$y = mx + m$

$y = m'x + m'$

수직일때 $mm' = -1$

* (4) - ② $y = x^3 + 32$ 두 직선의 공통접선을 구하시오. ($a \neq b$)



$\Rightarrow (a, a^3) \text{ 점선과 } (b, b^3+32) \text{ 점선 일치함}$

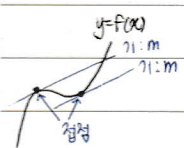
sol) ① $y = 3a^2(x-a) + 32$ ② $y = 3b^2(x-b) + b^3 + 32$

i) 기울기 비교: $a^2 = b^2$ 즉, $a = -b$

ii) y절편 비교: $-2a^3 = -2b^3 + 32 \rightarrow 4b^3 = 32, b=2, a=-2$

$\therefore y = 12(x+2) - 8$ (점선은 ①, ②에 넣어서 일치하는지 확인)

(2) 접선의 기울기가 주어진 경우 → 접점의 좌표를 구한다.

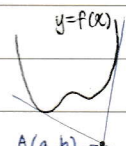


i) 접점의 좌표: $P(t, f(t))$

ii) $f'(t) = m \rightarrow t$ 를 구한다.

iii) $y - f(t) = f'(t)(x - t)$

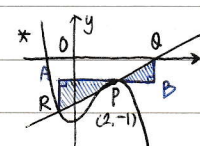
(3) 접점이 아닌 점의 좌표가 주어진 경우 → 접점의 좌표를 구한다.



i) 접점의 좌표: $P(t, f(t))$

ii) $b - f(t) = f'(t)(a - t) \rightarrow t$ 를 구한다.

iii) $y - f(t) = f'(t)(x - t)$



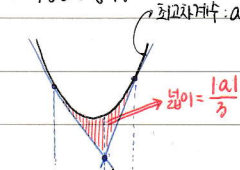
$\overline{PA} : \overline{PR}$ 의 비율을 구할때 값을 이용해 구할 수 0
cf.) 점 P에서 직선과 곡선의 근이 접하는 부분이므로
 $(x-2)^2(x+a)$ 로 표현할 수 있다.

⇒ (2), (3)에서 "접선의 개수 ≤ t의 개수"



접선: 2개, t의 개수: 3개 * 접선 개수 ≤ t의 개수 *

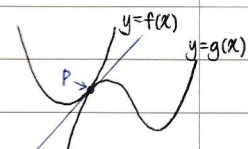
* 박형찬 T 공식!



넓이 = $\frac{|a|}{2} [(r-a)^2 + (p-a)^2]$ (증명은 직접 적용하면 됨)

(4) 공통인 접선

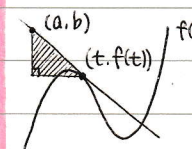
① 접점이 일치하는 경우



i) 접점의 x좌표: t

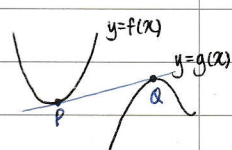
ii) $f(t) = g(t), f'(t) = g'(t)$

* 2-(3)에서 곡선 밖의 점에서 그은 접선을 다른 방법: 평면=미계



$\frac{f(t) - b}{t - a} = f'(t) \sim$ 방정식 풀면 t 나옴
<평면> <미계>

② 접점이 다른 경우



i) 두 접점의 좌표: $P(t, f(t)), Q(s, g(s))$

ii) $y = f'(t)x + f(t) - tf'(t)$

$y = g'(s)x + g(s) - sg'(s)$

* 정 □에 대각선 ⇒ 직각 Δ

↳ 기울기 $\pm 1 \Leftrightarrow$ 직각 이등변 Δ / 기울기 $-1 \Leftrightarrow$ 좌표합 일정

* 좌표가 주어진 점 접선 수선의 발을 내려서 미계!

* 원의 넓이가 $f(x)$ 에 의해 이등분된다 $\Leftrightarrow$ 원의 중심이 $f(x)$ 위에 있다.

→ 접선 문제에서 접선의 방정식 구하는 법 동일!

1st. 주어진 조건 (기울기, 지나는 점) ⇒ 접선의 방정식 써보기

2nd. 접점 x좌표 = t / 3rd. $x=t$ 에서 함숫값, 미분계수 연립 (or 평면=미계)

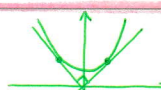
* 원 C가 $f(x), f^{-1}(x)$ 그래프와 각각 한 점에서 만난다

$\Leftrightarrow$ 접한다. $\Leftrightarrow$ 원의 중심은 $y=x$ 위에 존재한다.

* 직접 구할 수 없는 형태의 역함수 $\Rightarrow y=x$ 그리고 시작!

* 두 접선이 y축에 대하여 서로 대칭 + 서로 수직

$\Leftrightarrow$ 두 접선의 기울기가 각각 1과 -1 > ⑤



II. 다항함수의 미분법 - 도함수의 활용(I)

1. 접선의 방정식

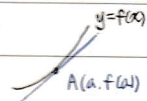
함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$

에서의 접선의 방정식의 기울기는 미분계수 $f'(a)$ 와 같으므로

→ 접선의 방정식: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

2. 접선의 방정식을 구하는 방법

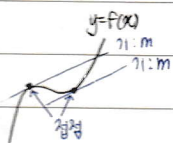
(1) 접점의 좌표가 주어진 경우 → 접선의 기울기를 구한다.



i) 접점의 기울기: $f'(a)$

ii) $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

(2) 접선의 기울기가 주어진 경우 → 접점의 좌표를 구한다.

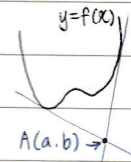


i) 접점의 좌표: $P(t, f(t))$

ii) $f'(t) = m \rightarrow t$ 를 구한다

iii) $y - f(t) = f'(t)(x - t)$

(3) 접점이 아닌 점의 좌표가 주어진 경우 → 접점의 좌표를 구한다.



i) 접점의 좌표: $P(t, f(t))$

ii) $b - f(t) = f'(t)(a - t) \rightarrow t$ 를 구한다.

iii) $y - f(t) = f'(t)(x - t)$

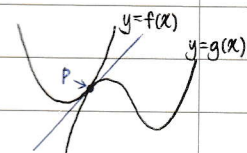
⇒ (2), (3)에서 "접선의 개수 ≤ t의 개수"



접선: 2개
t의 개수: 2개

(4) 공통인 접선

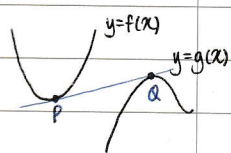
① 접점이 일치하는 경우



i) 접점의 x좌표: t

ii) $f(t) = g(t), f'(t) = g'(t)$

② 접점이 다른 경우



i) 두 접점의 좌표: $P(t, f(t)), Q(s, g(s))$

ii) $y = f'(t)x + f(t) - t f'(t)$

$y = g'(s)x + g(s) - s g'(s)$

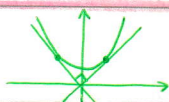
→ 접선 문제에서 접선의 방정식 구하는 법 동일!

1st. 주어진 조건 (기울기, 지나는 점) ⇒ 접선의 방정식 써보기

2nd. 접점 x좌표 = t / 3rd. $x=t$ 에서 함수값, 미분계수 연립 (or 평면=이계)

* 두 접선이 y축에 대하여 서로 대칭 + 서로 수직

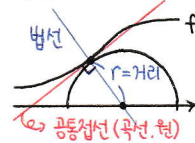
⇒ 두 접선의 기울기가 각각 1과 -1 > ㉔



* 공통접선 + 4차함수 ⇔ 서로 다른 접점수 ≠ 서로 다른 접선수

* 법선의 방정식: '점'과 곡선 위의 점 사이의 거리의 최소 (뉴턴 문제 5번)

* 활용 ① 점 ~ 곡선 거리 최소 ⇔ 곡선과 원의 관계로 생각



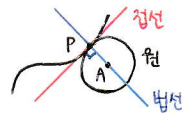
(a, 0), (t, f(t)) 거리 ⇔ 원 생각하기

1st. 점 $P(t, f(t)) \Rightarrow$ 법선의 방정식 구하기

2nd. 법선의 방정식에 $A(a, 0)$ 대입 ⇒ t 구하기

3rd. $\overline{PA}$ 의 길이 구하기

* 활용 ② 곡선 ~ 원 반지름 길이



(접선 기울기) × (법선 기울기) = -1 이용

→ 활용 ① 풀이와 동일

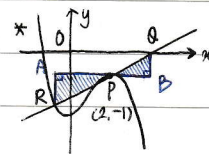
4th. $\overline{PA}$ = (반지름)



... 대입

ii) y절편 비교: $-2a^2 = -2b^2 + 32 \rightarrow 4b^2 = 32, b=2, a=-2$

∴ $y = 12(x+2) - 8$ (정삼은 ① ②에 넣어서 일치하는지 확인)

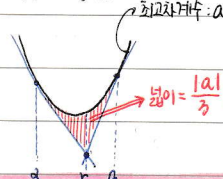


$\overline{PA} : \overline{PR}$ 의 비를 구할때 맞음을 이용해 구할 수 0

cf.) 점 P에서 직선과 곡선의 근이 접하는 부분이므로

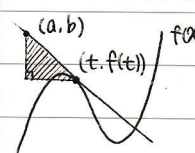
$(x-2)^2(x+a)$ 로 표현할 수 있다.

* 박형한 T 공식!



넓이 = $\frac{1}{2} |(t-a)^2 + (f(t)-b)^2|$ (증명은 직접 선택하면 됨)

* 2-(3)에서 곡선 밖의 점에서 그은 접선을 다른 방법: 평면=이계



$\frac{f(t)-b}{t-a} = f'(t) \sim$ 방정식 풀면 t 나옴

<평면> <이계>

* 정 □에 대각선 ⇒ 직각 △

↳ 기울기 ±1 ⇔ 직각 이등변 △ / 기울기 -1 ⇔ 좌표합 일정

* 좌표가 주어지면 접할 수선의 방을 내려서 풀!

* 원의 넓이가 f(x)에 의해 이등분된다 ⇔ 원의 중심이 f(x) 위에 있다.

* 원 C가 f(x), f'(x) 그래프와 각각 한 점에서 만난다.

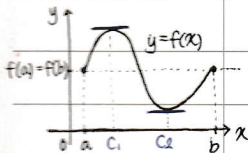
⇔ 접한다. ⇔ 원의 중심은 y=x 위에 존재한다.

* 직접 구할 수 없는 형태의 역함수 ⇒ y=x 그리고 시작!

3. 롤의 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속. 열린구간 (a, b) 에서 미분가능

$f(a) = f(b)$ 이면 $f'(c) = 0$ 인 c 가 a, b 사이에 적어도 하나 존재한다.

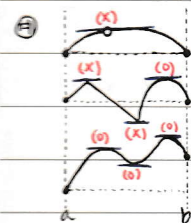


$\Rightarrow$ x축과 평행한 접선을 갖는 점이

(a, b) 에서 적어도 하나 존재함.

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 = f'(c)$$

$\Rightarrow$ f $[a, b]$ 불연속 / (a, b) 미분불가능 / $f(a) \neq f(b)$ 이면 적절 확인할 것!



$[a, b]$ 불연속

(a, b) 미분불가능

$f(a) \neq f(b)$

$\Rightarrow$ 롤의 정리 사용 불가능!

$$f(a) = f(b)$$

* 롤의 정리를 이용하여 평균값 정리를 증명합니다.

step 1 $g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$ 라 하자.

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

step 2 $h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) = 0$

$$h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(b) = 0 \Rightarrow h(a) = h(b)$$

step 3 $h'(c) = 0$ 이 되는 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다. (롤의 정리)

$$h'(c) = f'(c) - g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

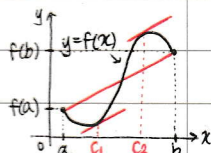
$$\left(f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \text{ 평균값 정리}$$

4. 평균값 정리 > 롤의 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능할 때, 열린구간 $(0, a)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (0).

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ 인 } c \text{가 } a, b \text{ 사이에 적어도 하나 존재한다.}$$

$\Rightarrow$ 평균값 정리 + $f(a) = f(b)$ 인 경우 = 롤의 정리



$\Rightarrow$ 두 점을 이은 직선과 평행한 접선을 갖는 점이

(a, b) 에서 적어도 하나 존재함.

* $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ 에서 양수 a 에 대하여 $g(a) = 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 은

$$g(0) = 0, g(a) = 0 \rightarrow g'(c) = c \cdot f(c) = 0 \quad (0 < c < a)$$

$f(c) = 0$ 인 c 존재 (롤의 정리 이용).

* 평균값 정리: 롤의 정리의 일반화

$\Rightarrow (a, b)$ 열린구간 + f 미분가능 $\rightarrow$ 평균변화율과 값이 같은 미분계수 존재

5. 평균값 정리의 활용

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서

미분가능할 때, 열린구간 (a, b) 에 속하는 모든 x 에 대하여

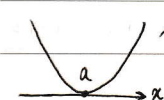
① $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 상수함수

② $f'(x) = g'(x) \Rightarrow [a, b]$ 에서 $f(x) = g(x) + k$ (k 는 상수)

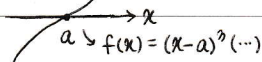
* 곡선과 곡선이 접하는 경우 $\Leftrightarrow$ ① 각각 관찰 (공통접선을 가정)

$$\rightarrow f(a) = g(a) = b, g'(a) = f'(a)$$

② 빼서 차의 함수로 관찰 (x축과의 관계)



$$f(x) = (x-a)^2 (\dots)$$



$$f(x) = (x-a)^3 (\dots)$$

* 평균값 정리의 변형 $\Rightarrow f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 구한 뒤 주어진 식에 대입

정의를 이용하는 경우 $\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ 를 이용해 방정식을 풀기

* 평균값 정리의 활용 (가의) 미분계수

when? 방정식 $f'(x) = k$ 의 실근이 구간 (a, b) 에 존재하는가?

① 구간의 양 끝 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = k \dots k$ 가 아니면 0.K.

② k 가 ①에서 $x \Rightarrow$ ② 구간의 내부 $\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = k$

$(c, d) \subset (a, b)$ 주로 교점이나 문제에서 주어진 특수점 집중!

$\hookrightarrow$ c.f. 정리가 1개 밖에 안주어진다면 $(a, a), (a, b)$ 둘다 해보!! (06.09)

* 그래프 제시 + 평균변화율 묻음 $\Leftrightarrow$ 평균값 정리 생각

• $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 속하는 a, b 에 대해 평균값 정리 만족하는 c 가 (a, b) 사이에 적어도 하나 존재. $f'(c)$ 의 범위는?
 * $0 \leq c \leq 3$ (x)
 ∴ 평균값 정리: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ 이므로 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = f'(c)$ ($0 < c < 3$)
 $f'(c) = 3c^2 - 6c = 3(c-1)^2 - 3$ 이고 c 의 범위는 $0 < c < 3$
 $\Rightarrow -3 \leq f'(c) < 9$

• $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 3$, 평균값 정리 이용하며 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+3) - f(x-3)]$ 값은?
 $x-3 < x < x+3$ 이므로 평균값 정리에 의해 $f'(x) = \frac{f(x+3) - f(x-3)}{(x+3) - (x-3)}$
 양변에 $\lim$ 을 붙이면 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+3) - f(x-3)}{6} = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 3$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+3) - f(x-3)] = 6 \cdot 3 = 18$

• 최고차항의 계수가 1인 두 상차함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. $g(1)$ 의 값은?

(1) $g(2) = 0$
 (2) $\lim_{x \rightarrow n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-2)(n-3)$ ($n=2, 3, 4, 5$)

① $n=2$: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \dots f(2)=0, f(x) = (x-2)^2 Q_2(x)$

$g(x) = (x-2)(x^2+ax+b) \leftarrow g(x) = (x-2)Q_1(x)$

② $n=3$: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \dots f(x) = (x-2)^2(x-3)$
 ($\because f(3)=0$)

③ $n=4$: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)^2(x-3)}{(x-2)(x^2+ax+b)} = \frac{4}{22+8a+2b} = 2$

$\rightarrow 64+16a+4b = 4 \cdot -60, 4a+b = -15 \dots (1)$

④ $n=5$: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-2)^2(x-3)}{(x-2)(x^2+ax+b)} = \frac{6}{25+5a+b} = 6$

$\rightarrow 25+5a+b = 1, 5a+b = -24 \dots (2)$

(1), (2)를 연립하면 $a = -9, b = 21$

$g(1) = (-1) \cdot (1-9+21) = -13$ ($\therefore -13$)

* 도함수의 정보 * 도함수의 ④가 점진적인 원래함수에 영향 X

$f'(x)$	$f(x)$
도함숫값	미분계수, 접선의 기울기
부호	증가와 감소, 극대/극소
넓이 (정적분): $\int_a^b f'(x) dx$	함숫값의 차: $f(b) - f(a)$
극성	변곡점

* 도함수의 불연속 $\rightarrow$ 원래 함수 미분 불가능. (정적)

* $f(x) > g(x)$ 처럼 함수 2개 $\rightarrow$ ① 각각 ② 차의 함수 이용

$f'(x) > g'(x)$ 처럼 도함수 2개 $\rightarrow$ 차의 함수만!!

④ $f' > g' \rightarrow f' - g' > 0, f - g$ 는 증가한다.

* 상차함수의 대칭과 비율 관계에 대한 특징

주제 1) 대칭성 $\rightarrow$ 변곡점에 대해 점대칭.

✓ 도함수의 극값인 지점 $\Leftrightarrow$ 원래함수 변곡점 = 도함수 값의 M/m

✓ 식작성: ① f' 작성 $\rightarrow f$ 식 ② f -접선 = $p(x-a)$ (삼중근)

✓ 표현: f ① $\frac{f(p-x)+f(p+x)}{2} = g$ ($\because$ 점대칭 특성)

미분계수가 최댓값 ② $f'(p-x) = f'(p+x)$
 ($\because$ 이차 f' 는 $x=p$ 선대칭)

주제 2) 비율관계 $\rightarrow$ 5개 점 & 변곡점 1:√3

✓ 점 5개 찾기 $\dots 1:1:1:1$ 이용. 교점 ~ 접점은 2:1

c.f.) 평행사변형 대각선 교점 = 변곡점

✓ 변곡점 지나는 직선 $\dots 1:\sqrt{3}$ 이용

c.f.) 2차: $1:\sqrt{4} (=2)$, 4차: $1:\sqrt{2}$

✓ 상차 G 와 접선 $\rightarrow$ 잡아당겨 내리면 항상 5개점 성립

✓ 상차 = 직선 / 상수 $\rightarrow$ 합이 3x(변곡점)으로 일정 (단, 중근은 2번 ④)

✓ 극대, 극소 (차) $\Leftrightarrow$ 도함수의 정적분 = 2차 넓이공식 이용

주제 3) 식 작성 ($\approx$ 주제 1 v2)

① 변곡점 이용: $a(x-p)^3 + b(x-p) + g$ } 3차 = 곡선 / 직선 / 접선

② 도함수 적분 ③ 변곡점선 이용 $\rightarrow$ 차의 함수 이용. ④ 판정

④ 전개식 (기본) ⑤ 인수정리 (테일러 급수) $\rightarrow$ ④ 판정

주제 4) 최대·최소

✓ 제한 적극 이용 + ④ 특징 자유자재로!

✓ 일차 √일차 = $\sqrt{(일차)^2 \times (일차)} \Rightarrow$ 3차식, 증가 ($\because \sqrt{\quad}$ 안은 ④)

c.f.) 일차 √이차 = $\sqrt{(일차)^2 \times (이차)} \Rightarrow$ 4차식, 증가

* 숨겨져 있는 조건 잡기! 상수항이 0인 다항함수 $\Leftrightarrow$ 원형 2번다.

* 3차 $\rightarrow$ 2차이므로 변곡점 제외 모든 점들은 미분계수가 같은 점들이 2개씩 존재한다. 즉, $f'(k) = 2$ ($2 \neq$ 변곡점) 인 k 는 2개 존재한다. ($\because$ 점대칭)

II. 다항함수의 미분법 - 도함수의 활용 (2)

1. 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

(1) $x_1 < x_2$ 일때, $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 이 구간에서 $f(x)$ 는 **증가**

(2) $x_1 < x_2$ 일때, $f(x_1) > f(x_2)$ 이면 이 구간에서 $f(x)$ 는 **감소**

↔ ③ $x \in I$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(t)$. (실수전체집합에서 증가)

2. 함수의 증가와 감소의 판정

함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x 에 대하여

(1) $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 **증가**

(2) $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 **감소**

(3) 역은 성립 X (반례) $y=x^3$ 은 실수전체에서 증가하지만 $x=0$ 에서 $f'(x)=0$

(4) $f(x)$ 가 증가하면 $f'(x) \geq 0 \rightarrow f(x)$ 가 실수전체에서 증가 $\rightarrow f'(x) \geq 0$

(5) $f(x)$ 가 감소하면 $f'(x) \leq 0$ ★ 등호주의

3. 함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$ 에서 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여

(1) $f(x) \leq f(a)$ 일때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **극대**라 하고, $f(a)$ 를 **극댓값**이라고 한다.

(2) $f(x) \geq f(a)$ 일때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **극소**라 하고, $f(a)$ 를 **극솟값**이라고 한다.

주변값보다 큰 값, 주변값보다 작은 값

극대, 극소, 극댓값, 극솟값

예) 극대, 극소, 극댓값, 극솟값

극대, 극소, 극댓값, 극솟값

극대, 극소, 극댓값, 극솟값

극대, 극소, 극댓값, 극솟값

극대, 극소, 극댓값, 극솟값

극대, 극소, 극댓값, 극솟값

극대, 극소, 극댓값, 극솟값

극대, 극소, 극댓값, 극솟값

극대, 극소, 극댓값, 극솟값

극대, 극소, 극댓값, 극솟값

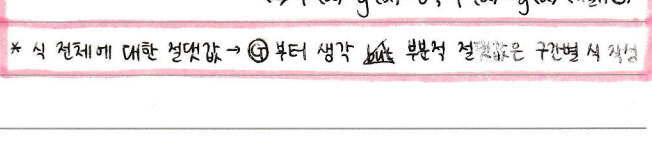
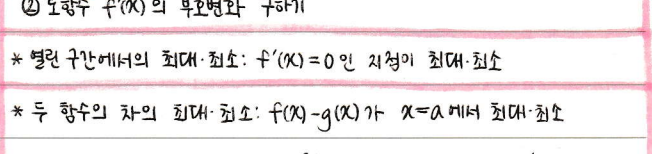
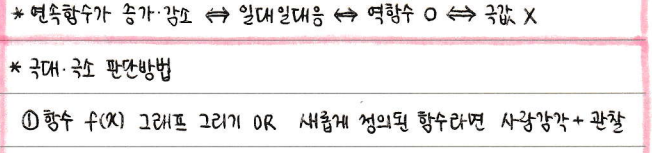
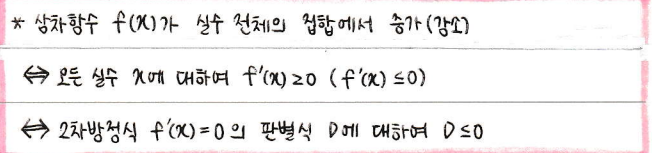
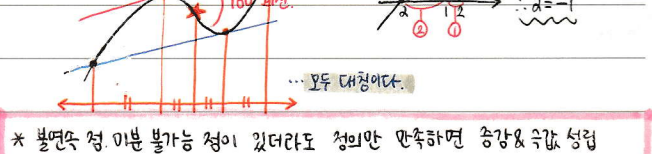
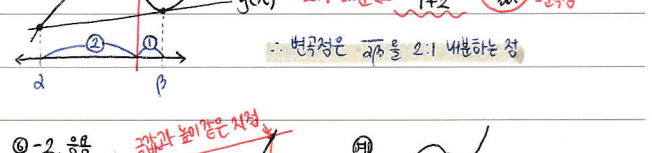
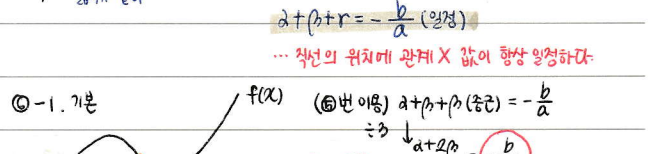
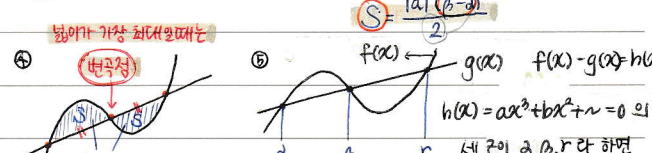
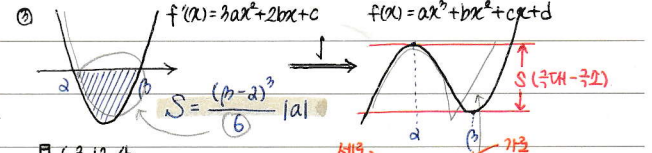
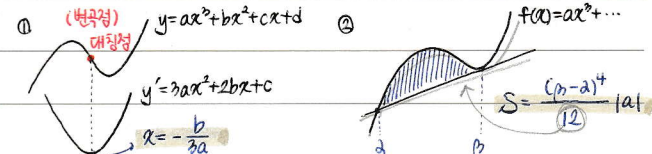
극대, 극소, 극댓값, 극솟값

극대, 극소, 극댓값, 극솟값

극대, 극소, 극댓값, 극솟값

극대, 극소, 극댓값, 극솟값

* 문중호 T 공식 응용!



DO NOT COPY

함수의 극대 극소를 이용한 삼차함수의 계수의 부호 결정

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 의 그래프에서

① $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow \infty$ 이면 $a > 0$, $f(x) \rightarrow -\infty$ 이면 $a < 0$

② y축과 양의 부분에서 만나면 $d > 0$, 음의 부분에서 만나면 $d < 0$

③ $x = \alpha, x = \beta$ 에서 극값을 가지면 $f'(x) = 0$ 의 두 실근이 α, β

• $y = f(f(x))^2$ 이 강조하는 구간 구하기 $\rightarrow$ 미분한 값이 음수인 부분

① $y' = 2f(x)f'(x)$ ② $f(x)$ 와 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 음수인 부분을 찾기

• $y = f(x)$ 가 x축에 접하도록 함 $\Leftrightarrow$ 극값의 x좌표가 a 일때, $f(a) = 0$

• $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} \rightarrow a, b, c$ 의 부호를 조사해서 1 또는 -1로 표현해 계산

• $h(x) = f(x) - g(x)$ 의 극대 극소 구하기 $\Rightarrow h'(x) = f'(x) - g'(x)$ 이므로

$f'(x) = g'(x)$ 를 만족하는 x값은 극값을 가진다.

i) 증가 ($h'(x) > 0$) $\Rightarrow f'(x) > g'(x)$ 인 구간

ii) 감소 ($h'(x) < 0$) $\Rightarrow f'(x) < g'(x)$ 인 구간

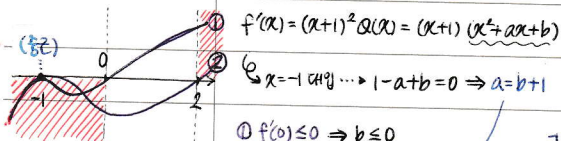
• 적선 $x=t$ 에 대하여 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 A, B라 할때,

점 A와 B 사이의 거리를 $k(x)$ 라 하면 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(t+h) - k(t)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(t+h) - k(t)}{h}$

≤ 0 를 만족시키는 t는? $\left[\dots < 0 \right]$ 이면 미분불가능점, $= 0$ 은 미분가능점

$\rightarrow$ 좌극한 $\times$ 우극한 ≤ 0 은 < 0 일때와 $= 0$ 일때로 나뉘어서 각각의 t값을 구한다.

• 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$, $y = f(x)$ 가 구간 $(-\infty, 0)$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 에서 강조하고 구간 $(2, \infty)$ 에서 증가하도록 하는 실수 a, b, a^2+b^2 의 $M+m$ 은?



$$f'(x) = (x+1)^2(x^2+ax+b)$$

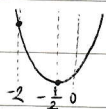
$$x = -1 \text{ 대입 } \rightarrow 1 - a + b = 0 \Rightarrow a = b + 1$$

$$① f'(0) \leq 0 \Rightarrow b \leq 0$$

$$② f'(2) \geq 0 \Rightarrow 2a + b + 4 \geq 0 \Rightarrow b \geq -2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2b^2 + 2b + 1 = 2(b + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \quad (-2 \leq b \leq 0)$$

$$M = 8 - 4 + 1 = 5, m = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{11}{2}$$



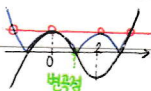
• $g(x) = f(|x| - a)$ 라 할때, $x=0$ 에서 미분가능한 조건

step 1) $g(x) = \begin{cases} x \geq 0 : f(x-a) \\ x < 0 : f(-x-a) \end{cases}$ step 2) $\rightarrow f'(x-a)$ $x=0$ 에서의 미분계수가 같아야 0.

• $y = f(x)$ $\square$ $f(0) + f(2) = 0$ 이면 방정식 $|f(x)| = f(0)$ 의 서로 다른

실근의 개수는 4개이다.

= 변곡점이 x축을 지나면



• $f'(x)$ 의 그래프를 보고 $f(x)$ 를 구할 때 극값을 적극 활용한다.

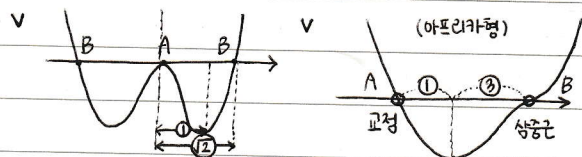
$$④ \begin{cases} y = f'(x) \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = a(x-12)^2(x+12)^2 + c = a(x^2-2)^2 + c$$

* 사차함수의 대칭과 비틀관계에 대한 특징

주제 1) 대칭성 $\Rightarrow$ (특수) 선대칭 $\approx$ 2차함수

$\forall$ 3차 $f'(x)$ 가 $(m, 0)$ 에 대칭 $\rightarrow$ 4차 $f(x)$ 가 $x=m$ 에 대칭

주제 2) 비틀관계 $\Rightarrow 1:\sqrt{2}$ & $3:1$ (아프리카형)



$\forall$ 4차함수 + 접선 $\rightarrow$

C의 x좌표 = A, B의 중점의 x좌표

주제 3) 시각성

(특수) 미분체 1

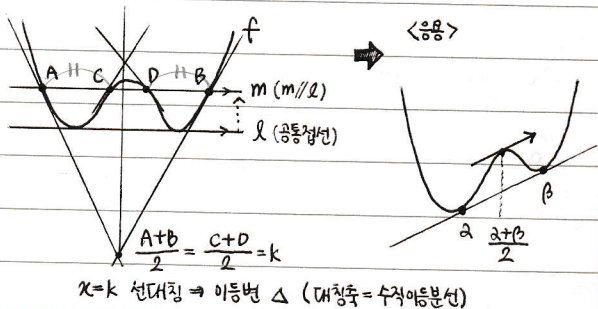
① f' 3차 $\rightarrow f$ 4차

② f -접선 = 차의 함수 이용 $\oplus$ 적선 $x=m$ 에 대하여 대칭인 사차함수 $f(x)$:

③ 평행이름 이용 $\dots f = a(x-m)^4 + b(x-m)^2 + c$ ($\therefore$ 우함수)

주제 4) 공통접선 미분체 2 (with 주제 4) V_3)

$\forall$ 공통접선에 평행하게 선을 그으면 대칭성 이용가능



* $f(a+x) = f(a-x) \Leftrightarrow x=a$ 선대칭

* 우함수에서 교점은 항상 짝수 개인데 홀수 개가 주어진다면

교점 하나가 대칭축 위에 있다는 뜻이다.

* $\square \leq 0 \Leftrightarrow \square = 0$ 일때와 $\square < 0$ 일때 나뉘어서 생각!

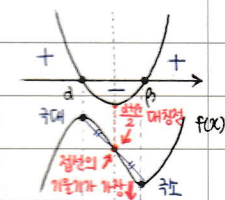
6. 삼차함수가 극값을 가질 조건과 갖지 않을 조건

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a > 0) \implies f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

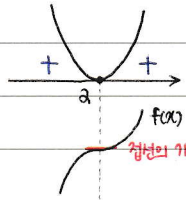
① $f'(x)$ - 서로 다른 두 실근

② $f'(x)$ - 중근

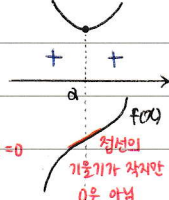
③ $f'(x)$ - 허근



$\Rightarrow$ 극값 존재 O

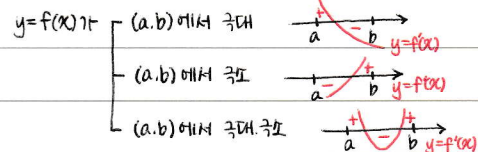


$\Rightarrow$ 극값 존재 X



$\Rightarrow$ 극값 존재 X

* 제한 범위에서 극값 존재조건은 그래프를 통해 확인한다.



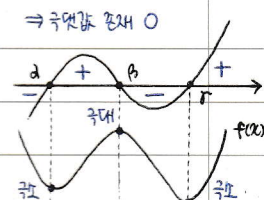
④ 실수 전체 구간에서 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가질 조건: $f'(x)$ 의 $D > 0$

7. 사차함수가 극값을 가질 조건과 갖지 않을 조건

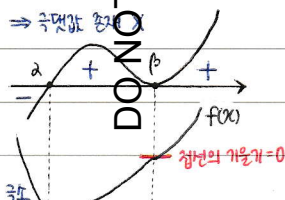
$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (a > 0) \implies f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

① $f'(x)$ - 서로 다른 세 실근

② $f'(x)$ - 한 실근과 이중근



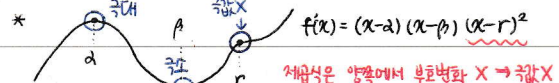
$\Rightarrow$ 극값 존재 O



$\Rightarrow$ 극값 존재 X

* 실수 전체 구간에서 사차함수 $f(x)$ 가 극값을 가질 조건: $(a < 0 \Rightarrow$ 극값은 항상 O)

$f'(x) = 0$ 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖는다. (극값 갖는 조건과 동일)

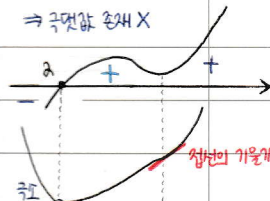


* 4차 $f(x)$ 가 오직 하나의 극값을 갖는다.

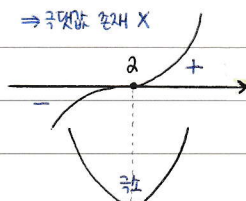
$\Leftrightarrow f'(x)$ 의 분류변화는 단 한 번만 일어난다. (# 근이 1개, 접할수도 있어서)

③ $f'(x)$ - 한 실근과 두 허근

④ $f'(x)$ - 삼중근



$\Rightarrow$ 극값 존재 X



$\Rightarrow$ 극값 존재 X

⑤ 실수 전체 구간에서 사차함수 $f(x)$ 가 극값을 가질 조건: $(a > 0 \Rightarrow$ 극값은 항상 O)

$$f'(x) = 0 \text{ 방정식에서 } (x-a) \text{ (이차식)} = 0 \rightarrow \textcircled{1} D > 0 \textcircled{2} x \neq a$$

8. 함수의 최대·최소 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일때, $f(x)$ 는 구간 내에서 최대·최소를 가진다.

(1) 극대값, 극소값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최대값이고,

가장 작은 값이 최솟값이다. $\rightarrow$ 극대값과 극소값이 반드시 최대·최소는 X

(2) 최대·최소의 활용: 도형의 길이, 넓이, 부피를 한 문자에 대한 함수로 나타낸 뒤

① 두 점 사이의 거리 ② 평면도형의 넓이 구하는 공식 ③ 입체도형의 부피 구하는 공식

④ 피타고라스 정리) 를 이용하여 최대·최소를 구한다.

* 합성함수의 방정식문제 / M.m 문제 $\Leftrightarrow$ 안쪽함수 치환한다. (지역 범위 꼭!!!)

단 주의!! 치환했으면 꼭 원래 기호 나옴 때까지 끝까지 물것 - 3월 학평 21번

II. 다항함수의 미분법 - 도함수의 활용 (3)

1. 방정식에서의 활용 [극대·극소]

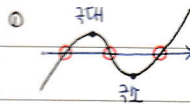
(1) 방정식의 실근의 개수

방정식 $f(x) - k = 0$ 의 실근의 개수는 $h(x) = f(x) - k$ 와 x 축의 교점의 개수

② $y = f(x)$ 와 $y = k$ 의 교점의 개수와 같다.

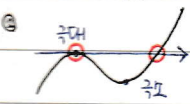
(2) 상차방정식의 근의 판별

상차함수 $f(x)$ 가 극값을 가질 때, 상차함수 $f(x) = 0$ 의 근은 극값을 이용한다.



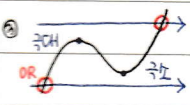
서로 다른 세 실근

$$\Leftrightarrow (\text{극대값}) \times (\text{극소값}) < 0$$



서로 다른 두 실근 = 한 실근과 중근

$$\Leftrightarrow (\text{극대값}) \times (\text{극소값}) = 0$$



한 실근과 두 허근

$$\Leftrightarrow (\text{극대값}) \times (\text{극소값}) > 0$$

④ $f(x)$ 의 극값이 존재하지 않으면 상중근을 갖거나 한 실근과 두 허근을 갖는다.

2. 부등식에서의 활용 [최대·최소]

(1) 증가·감소의 활용

① 구간 (a, b) 에서 감소함수 $f(x)$ 에 대해 $f(x) > k$ 가 항상 성립 $\Rightarrow f(b) \geq k$

② 구간 (a, b) 에서 증가함수 $f(x)$ 에 대해 $f(x) < k$ 가 항상 성립 $\Rightarrow f(b) \leq k$

(2) 최대·최소의 활용

① 어떤 구간에서 $f(x) \leq a$ 가 항상 성립 $\Rightarrow (f(x) \text{의 최대값}) \leq a$

② 어떤 구간에서 $f(x) \geq a$ 가 항상 성립 $\Rightarrow (f(x) \text{의 최솟값}) \geq a$

③ 모든 실수 x 에 대해 $f(x) \geq 0$ 가 성립 $\Rightarrow (f(x) \text{의 최솟값}) \geq 0$

④ 어떤 구간에서 $f(x) > g(x)$ 가 성립 $\Rightarrow h(x) = f(x) - g(x)$ ($h(x)$ 의 최솟값) > 0

* 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

① $f(-x) = f(x)$ 만족 $\Rightarrow f(x)$ 는 짝차수 항 + 상수항 으로부터 이루어져 있음

② $f(-x) = -f(x)$ 만족 $\Rightarrow f(x)$ 는 홀차수 항 으로부터 이루어져 있음

* 두 곡선의 교점의 개수를 구할 때는 $f(x) = g(x) \rightarrow f(x) - g(x) = 0$ 의 근의 개수.

* 서로 다른 두 실근을 갖는 상차방정식

상차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\Leftrightarrow$ 상차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만난다.

① 접점의 x 좌표 = t 라 하면 $f(t) = 0, f'(t) = 0$

② 인수정리 $\Rightarrow f(x) = a(x-\alpha)^2(x-\beta)$

$\sim$ 교점 ~ 접선 평면변화율 = 접점의 미분계수

* 서로 다른 세 실근을 갖는 사차방정식

사차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$\Leftrightarrow$ 사차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 접하고 다른 두 점에서 만난다.

① 접점의 x 좌표 = t 라 하면 $f(t) = 0, f'(t) = 0$

② 인수정리 $\Rightarrow f(x) = a(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$

* 3차함수 + 한 점에서 그은 접선의 개수 묻는 문제

sol 1) 점의 존재범위 나누는 풀이 (변곡점 주의!)

sol 2) 방정식 (평면=미계) 풀기 $\rightarrow$ 접점을 임의의 $(t, f(t))$ 로 놓고

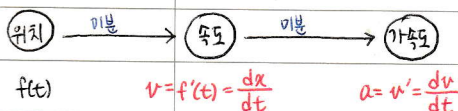
한 점 $\sim (t, f(t))$ 의 평면=미계. 단, 이때 근의 개수는 점선개수.

(* 4차함수는 공통접선 생길가능성이 있어서 항상 근개수가 점선개수는 X)

3. 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 위치 x 가 $x = f(t)$ 일 때,

시간 t 에서의 점 P의 속도 v 와 가속도 a 는 ($t > 0$)



이때 속도는 방향성이 있으므로 부호가 +, - 사용될 수 있지만 속력은 방향성이 없는

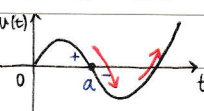
물리량으로 속력은 $|v|$ 이다.

c.p.) 시각에 대한 변화율은 길이 없이, 부피를 t 에 대해 미분해서 구한다.

* 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도 = 물체가 정지할 때의 속도 = 최고 지점에 도달했을 때 $v = 0$

* P가 서로 반대방향으로 움직이면 (두 점의 속도의 곱) < 0

* 속도 그래프 해석하기



① t 초와 $t=a$ 에서 만나고 부호 바뀌면

점 P는 $t=a$ 에서 운동방향을 바꾼다.

② $v(t)$ 증가 $\Rightarrow$ 점 P의 가속도 > 0

③ $v(t)$ 감소 $\Rightarrow$ 점 P의 가속도 < 0

* 위치 그래프 해석하기 $\Rightarrow x(t)$ 그래프를 통해 $x'(t)$ 를 이용해 판별한다.

① $x'(t) > 0 \Rightarrow P$ 가 양의 방향으로 움직임 ② $x'(t) = 0 \Rightarrow P$ 정지 / 운동방향 바뀜

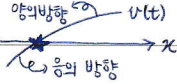
③ $x'(t) < 0 \Rightarrow P$ 가 음의 방향으로 움직임

○ 평균속도 $\rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t}$, 순간속도 $\rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$

가속도는 평균가속도를 묻지 않는다. 순간가속도 $\rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a(t)$

○ $v > 0 \Rightarrow$ 양의 방향으로 움직인다. v 의 그래프가 x 축을 지나갈 때.

$v = 0 \Rightarrow$ 운동방향이 바뀌거나 정지한다.



$v < 0 \Rightarrow$ 음의 방향으로 움직인다.

○ 구의 겹넓이 $= 4\pi r^2$, 부피 $= \frac{4}{3}\pi r^3$ 구의 부피 미분 $\rightarrow$ 구의 겹넓이

○ 시각에 대한 변화를 묻지는 반드시 미분을 통해 t 에 대한 변화를 식을 구한다음

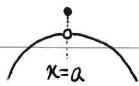
문제에서 원하는 시각을 집어넣어야 한다.

* 미분가능의 확인: ① ② ③ 연속확인 $\rightarrow$ 미계 계산 (정의 / 미분해서)

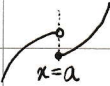
$\Leftrightarrow$ 접선이 항상 존재한다.

* 미분불가능 $\rightarrow$ 인수 곱해서 미분가능 만들기

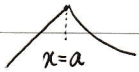
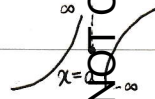
① 덜 흉악 ::



② 흉악 ::



③ 개흉악



$\Rightarrow$ 인수 2개 추가

$\Rightarrow$ 인수 1개 추가로 판단

④ 인수 X

⑤ 인수 X

$\Rightarrow$ 인수 1개 추가

⑥ 인수 1개 존재

* 구간별로 정의된 함수의 미분가능 확인

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & (x \leq a) \\ g_2(x) & (x > a) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &g_1, g_2 \text{가 } x=a \text{에서 접한다.} \\ &g_1(x) - g_2(x) = (x-a) \text{ 인수 2개 } \uparrow \end{aligned}$$

$\therefore$ 연속: $g_1(a) = g_2(a)$ / 미가: 연속조건 & $g_1'(a) = g_2'(a)$

* 절댓값을 포함한 함수의 미분가능 확인

$$|f(x)| \quad f(a) = 0 \text{ \& } f'(a) = 0 \text{ (인접=0이 되는 곳에 주목)}$$

⑦ 13차: 3중근. $|f(x) - k|$: $f(x)$ 와 k 가 접할 때

$$|f(x) - g(x)|: f(x) \text{와 } g(x) \text{가 접할 때}$$

예) 합의 함수도 차의 함수로 바꿔서 관찰

$$: f(x) + g(x) \Rightarrow f(x) - \{-g(x)\}$$

* $f(x) = f(2a-x) \Leftrightarrow x=a$ 선대칭

$$f(x) = 2a - f(x) \Leftrightarrow y=a \text{ 선대칭}$$

* 주기함수의 미분가능성: 시작과 끝, 구간 안 모두 고려. (뉴런 문제 36번)

예) x 축평행인 직선과 $f(x) \dots$ 극점에서 접할 때 기준!

y 축평행인 직선과 $f(x) \dots$ 극점을 지날 때 기준!

III. 다항함수의 적분법 - 부정적분

1. 부정적분

함수 $F(x)$ 의 도함수가 $f(x)$ 일 때, 즉 $F'(x) = f(x)$ 일 때 $F(x)$ 를 $f(x)$ 의

부정적분이라 하고, 기호로 $\int f(x) dx$ 와 같이 나타낸다.

$\Rightarrow$ 함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나를 $F(x)$ 라 하면

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C: \text{적분상수})$$

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[\text{미분}]{\text{적분}} \int f(x) dx} \quad \dots \rightarrow \text{cf. } f(x) = \text{피적분함수}$$

① 원시함수 = 미분의 역과정: just 계산

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad F'(x) = f(x)$$

② 부정적분 = 함수로 취급 = 정적분의 일반화

$$\int_a^x f(t) dt = x \text{에 대한 함수} = F(x) - F(a)$$

③ 정적분 = 넓이: 부정적분에 $x=b$ 대입

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

2. 부정적분과 미분의 관계

(1) 적분 후 미분: $\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$

(2) 미분 후 적분: $\int \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) dx = f(x) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$

* 적분으로 마지막 연산이 끝나면 상수가 남고, 미분으로 마지막 연산이 끝나면

상수가 남지 않는다. + 미분·적분의 개수 확인하기!

3. 함수 $y = x^n$ 의 부정적분

n 이 음이 아닌 정수일 때,

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})}$$

DO NOT COPY

4. 함수의 선배, 합, 차의 부정적분

두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

(1) $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (\text{단, } k \text{는 0이 아닌 실수})$

(2) $\int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

(3) $\int dx = \int 1 dx = x + C$

(4) $\int f(x) dx \neq \int f(y) dy$

* $f(x)$ 나 $g(x)$ 가 따로 계산이 불가능할 경우 역으로 묶어서 계산할 수 있다.

$$\textcircled{4} \int \frac{x^2}{x+1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx = \int \frac{x^2-1}{x+1} dx = \int (x-1) dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

• $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy(x+y) + \dots$ 에서 $f(x)$ 의 차수는 3이다.

$f'(x)$ 를 구할 수 있다. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 2xh(x+h) + \dots - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0) + 2x^2h}{h} = 2x^2 + f'(0) = f'(x) \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \dots$$

• $f'(x)$ 의 그래프가 주어지고 $f(x)$ 를 구하는 경우, 증감판을 이용해서 해결한다.

* $\int_a^x f(t) dt$ 를 포함한 항등식

① (항등식)' = (항등식) $\rightarrow x$ 에 대해 미분해서 새로운 항등식 얻기

② $x=a$ 대입 $\rightarrow \int_a^a = 0$ 이용 / $x=b$ 대입 $\rightarrow$ (문제에 주어진) $\int_a^b$ 이용

+ 정적분 정의 활용도 가능: $\int_a^x f(t) dt = f(x) - f(a)$ * (인용) 미분제 *

* 부정적분은 미분하고 대입하고 관찰한다.

TYPE 1) $\int_a^x f(t) dt =$ 함수. 적분하지마 !!

$\cdot g(x) = \int_a^x f(t) dt$

① 대입 $x=a \rightarrow g(a) = 0 \Rightarrow x$ 축 결정

② 미분 $g'(x) = f(x) \Rightarrow$ 적분 속은 전체함수의 도함수 ... 그래프 개형

$\cdot \int_a^x |f(t)| dt : \textcircled{5} |f(t)| \Rightarrow$ 전체함수는 증가만!

vs. $|\int_a^x f(t) dt| : \text{전체함수의 절댓값}$

* 변수의 분리

$\vee \int_a^{2x+1} f(t) dt = (2x+1) \cdot \int_a^x f(t) dt$

$\vee \int_a^{2x+1} f(t) dt = \int_a^{2x} f(t) dt + \int_{2x}^{2x+1} f(t) dt$

$\rightarrow$ 이럴 땐 전체함수의 도함수로 풀면 안됨! 전개 first 그 다음 미분

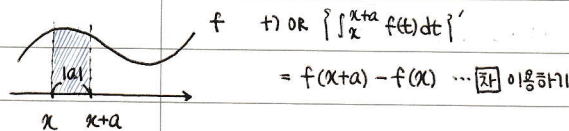
$\rightarrow \int_a^x f(t) dt + x f(x) - x f(x)$

$\vee \int_a^{3-x} f(t) dt \rightarrow$ 상수인가 전체함수의 도함수로 생각 o

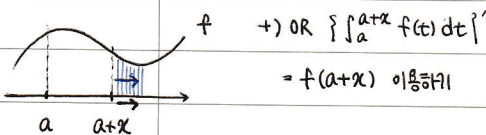
TYPE 2) $\int_x^{x+a} f(t) dt, \int_a^{a+x} f(t) dt$

$\cdot \int_x^{x+a} f(t) dt \Rightarrow$ 허리가 $|a|$ 로 밀정한 $t=x, t=x+a$ 넓이 변화

자식, 최고자 계수는 +1, 7번 빼는 a.



$\cdot \int_a^{a+x} f(t) dt \Rightarrow t=a+x$ 를 움직여 보면서 넓이 변화



TYPE 3) $\int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$ only 관찰 $\rightarrow$ 대입

$\cdot h(x) = g(x)$ 인 x 가 경계 $\Rightarrow$ 아래쪽, 위쪽 대소관계 따른 $\textcircled{5}$ 관찰

* 부정적분의 극한 문제: 복잡한 분자는 무조건 치환 하고 시작. * ~~미분~~ ~~미분~~ *

* 부정적분 함수에서 "다항함수 $f(x)$ "의 해석

① $f(x)$ 는 연속함수가 임을 이용 ② $f(x)$ 식 작성 가능: $ax^n + \dots$

III. 다항함수의 적분법 - 정적분

1. 정적분의 정의

(1) 함수 $f(x)$ 가 두 실수 a, b 를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$ 의 한 부절
적분을 $F(x)$ 라 하면 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 $F(x)$ 의 변화량
 $F(b) - F(a)$ 를 함수 $f(x)$ 의 a 에서 b 까지의 정적분이라 한다.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = F(b) - F(a)$$

↳ a : 아래끝, b : 위끝, a 부터 b 까지: 적분구간

(2) $\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \dots F(a) - F(a) = 0$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \dots F(b) - F(a) = - [F(a) - F(b)]$$

2. 적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, (단, $a < b$)

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} [F(x) - F(a)] = F'(x) = f(x)$$

3. 정적분의 성질

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 세 실수 a, b, c 를 포함하는 구간에서 연속일 때

(1) $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

(2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

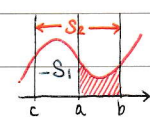
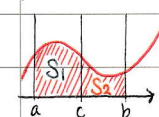
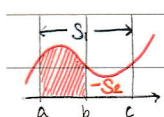
적분구간 같으면 합할 수 있다

(3) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ (대외관계 상관 X)

i) $a < b < c$

ii) $a < c < b$

iii) $c < a < b$



(4) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$

(5) $\int_a^b f(x) dx = f(x) \int_a^b 1 dt = f(x) \cdot [t]_a^b = f(x) \cdot (b-a)$

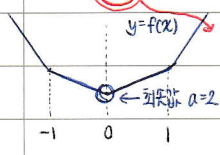
함수 $f(x) = |x+1| + |x-1| + |x|$ 의 최솟값 a 에 대하여 정적분 $\int_a^2 f(x) dx$ 는?

i) $x < -1 : -3x$

ii) $-1 \leq x < 0 : -x+2$

iii) $0 \leq x < 1 : x+2$

iv) $x \geq 1 : 3x$



cf.) 일차식인 $g(x)$ 의 경우



일차식에 대한 적분은 그림을 그려서 풀 수도 있다.

방정식 $f(x)=0$ 의 두 실근 $\alpha, \beta \iff f(\alpha)=0, f(\beta)=0$ 옳도 표현할 수 있다.

* 부정적분은 계산 결과가 식으로 나오지만 정적분은 실수가 나온다.

즉, $\int f(x) dx =$ 함수, $\int_a^b f(x) dx =$ 상수 (실수), $\int_a^x f(t) dt =$ 정적분으로 표현된 함수

* 정적분 계산 전에 미적분의 기본정리 써서 바르고 시작!

* 정적분 계산 시 적분구간 주의!! $\int_a^b = - \int_b^a$

* 정적분 해석 ① 상수: $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx \dots$ 적분상수와 관계 X

② 부호를 가지는 넓이: $\int_a^b |f(x)| dx \dots$ 방향성 주의

↳ 적분방향과 함수값의 부호에 따라 달라짐.

* 도함수의 정적분: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

① $f'(x)$ 의 정적분 값 = $f(x)$ 의 함수값 차

② (역과정) $f(x)$ 의 함수값 차 = $f'(x)$ 의 정적분 값

$\int_a^b f'(t) dt = (변위), \int_a^b |f'(t)| dt = (움직인 총 거리)$

* 정적분 $\int_a^b f(x) dx$ 계산순서: 1st. $f(x)$ 특정 $\rightarrow$ 평행·대칭·우기·정·선 ...

2nd. 적분구간 쪼개기 3rd. $F(b) - F(a) +$ just 계산

* 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 경우 나눠서 풀어야 한다.

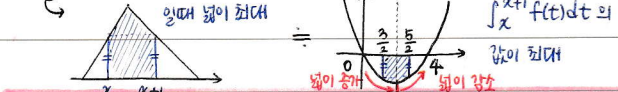
$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \geq c) \\ h(x) & (x < c) \end{cases}$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $a < c < b$ 일 때

$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c h(x) dx + \int_c^b g(x) dx$

cf.) 절댓값 함수도 마찬가지로 범위를 나눠서 해결한다.

* 좌표의 개념을 이용하여 넓이는 부호가 같을 때 최대임을 알 수 있다.

↳



* 그래프와 적분구간의 이동

① x축 방향으로 m만큼 평행이동: $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+m}^{b+m} f(x-m) dx$

② y축에 대하여 대칭이동: just 그려서 판단

$\int_a^b f(-x) dx = \int_{-b}^{-a} f(x) dx$

* 적분문제 + 증감을 묻는 선지 $\Rightarrow$ 바로 도함수를 통해 접근한다.

* 문제에 대한 단서가 없을 때, $f(x)$ 의 차분터 구해볼 수 있다. (단, 다항함수라는 것만 이)

① $f(x) = \int_a^x f(t) dt - 2x^2 + 19x + 5$ 에서 $f(x)$ 가 n차라 하면

n^2 차 $\rightarrow$ i) $n=1$ 일때 1차/상수, ii) $n \geq 2$ 일때 n차

② 최고차항 계수가 a인 이차함수 $f(x)$ 가 $\dots f(x) = ax^2 + \dots$

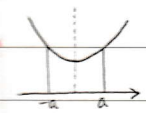
$f(b) = b^2, f(b+1) = (b+1)^2 \rightarrow f(x) - x^2 = 0$ 의 두 근은 $b, b+1$ 이다

$y = x^2 - 2x + 2$
점한다. $\leftrightarrow$ 완전제곱식 풀이. $\leftrightarrow D=0$
 $D = (2+m)^2 - 4 = 0$
 $2+m=2, m=1 (\because m>0)$

4. 정적분 $\int_{-a}^a x^n dx$ 의 계산

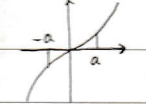
n 이 자연수일 때, 정적분 $\int_{-a}^a x^n dx$ 에 대하여 다음이 성립한다.

① n 이 짝수일 때 (=우함수) y 축에 대하여 대칭 $= f(-x) = f(x)$



$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2F(a)$$

② n 이 홀수일 때 (=기함수) y 원점에 대하여 대칭 $= f(-x) = -f(x)$



$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

5. 정적분으로 정의된 함수

(1) 정적분으로 정의된 함수의 미분

$$\textcircled{1} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a, x \text{는 상수})$$

$$\textcircled{2} \frac{d}{dx} \int_x^{x+a} f(t) dt = f(x+a) - f(x) \quad (a, x \text{는 상수})$$

(2) 정적분으로 정의된 함수의 극한

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_x^{x+a} f(t) dt = f(a)$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt = f(a)$$

$$\hookrightarrow \text{증명} \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = F'(a) = f(a)$$

◦ 항정 주의! $\int_a^{2x} f(t) dt = F(2x) - F(a) \xrightarrow{\quad} 2 \cdot f(2x)$

$$\int_a^{2x} f(t) dt = \left[\frac{1}{2} F(2t) \right]_a^{2x} = \frac{1}{2} F(4x) - \frac{1}{2} F(2a) \xrightarrow{\quad} 2f(4x)$$

◦ $f(x) = x|x|$ 는 원점에 대한 대칭이므로 $\int_{-2}^2 x|x| dx = 0$

$$g(x) = |x| \text{는 } y\text{-축에 대한 대칭이므로 } \int_{-2}^2 |x| dx = 2 \cdot \int_0^2 |x| dx$$

◦ 함수 $f(x)$ 가 모든 상수 x 에 대하여 $f(2a-x) = f(x)$ (a 는 상수) 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $x=a$ 에 대하여 대칭이다.

◦ $\int_a^{2a} f(t) dt$ 를 미분하면 $[F(2x) - F(a)]' = 2x \cdot f(x^2)$ ($\therefore$ 우미분)

◦ 로피탈 + 우미분을 사용해서 간단하게 풀 수 있다.

$$\therefore \text{로피탈: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$\text{우미분: } \{f(x)^n\}' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$$

④ $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt = ?$ (단, $F(x) = f(x)$)

$$F(x^3)' = F'(x^3) \times 3x^2 = f(x^3) \times 3x^2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^3) - F(1)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) \times 3x^2}{3x^2} = f(1) = -6 \quad (\because -6)$$

* 기함수와 정적분의 응용: ① 기함수와 기함수의 곱은 기함수, 기함수와 우함수의 곱은 우함수

② 적분구간 변형 $\int_{-1}^3 = \int_{-1}^1 + \int_1^3 = \int_1^3 \dots$ 수직선 그려보기!

◦ 우함수 $\pm$ 우함수 = 우함수, 기함수 $\pm$ 기함수 = 기함수 ($+$ = 짝, $-$ = 홀)

우함수 $\times$ 우함수 = 우함수, 우함수 $\times$ 기함수 = 기함수, 기함수 $\times$ 기함수 = 우함수

◦ 한식 안에 함수 곱셈이 모두 있을 경우 분리할 수 있다.

◦ 합성함수와 우함수·기함수: 우함수가 하나라도 있으면 우함수이다

우(기) = 우함수, 기(우) = 우함수, 우(우) = 우함수, 기(기) = 기함수

◦ $\begin{cases} a^x + a^{-x} = f(x) \\ a^{-x} + a^x = f(-x) \end{cases}$ 좌수함수 + 우수함수 + 우수함수 + 좌수함수

* 적분구간이 대칭일때 ($\int_{-a}^a$), 혹은 한쪽 끝이 0일때 ($\int_0^a$) 우/기함수 의심!

$\hookrightarrow$ 이때 x 대신 $-x$ 를 넣어서 같으면 ①, 다르면 ②

◦ 정적분을 포함한 등식 유형 정리

1. 아래쪽과 위쪽이 상수인 경우

$f(x) = g(x) + \int_a^b f(t) dt$ (a, b 는 상수) 꼴의 등식이 주어질 때

$\int_a^b f(t) dt = k$ (k 는 상수) 라 하면 $f(x) = g(x) + k$ 이므로 이것을

$\int_a^b f(t) dt = k$ 에 대입하여 k 의 값을 구한다.

2. 아래쪽 또는 위쪽에 변수가 있는 경우

$\int_a^x f(t) dt = g(x)$ (a 는 상수) 꼴의 등식이 주어질 때

① 양변에 $x=a$ 를 대입한다. $\Rightarrow \int_a^a f(t) dt = g(a) = 0$

② 양변을 x 에 대하여 미분한다. $\Rightarrow f(x) = g'(x) \rightarrow 0$ 필요한 값에 따라

다른 수를 대입해도 OK

3. 아래쪽/위쪽/피적분함수에 변수가 있는 경우

$\int_a^x (x \pm t) f(t) dt$ (a 는 상수) 꼴을 포함한 등식이 주어질 때

① $x \int_a^x f(t) dt \pm \int_a^x t f(t) dt$ 로 변형한다.

② ①에서 얻은 등식의 양변을 x 에 대하여 미분한다.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left[x \int_a^x f(t) dt \pm \int_a^x t f(t) dt \right] = \int_a^x f(t) dt + x f(x) \pm x f(x)$$

4. 정적분으로 정의된 함수의 극대 극소

$f(x) = \int_a^x g(t) dt$ (a 는 상수)와 같이 정의된 대함함수 $f(x)$ 의 극값을 찾을 때

① 양변을 x 에 대하여 미분한다. $\Rightarrow f'(x) = g(x)$

② $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값 b 를 구한다.

③ $x=b$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.

$\Rightarrow f'(x)$ 의 부호가 양 $\rightarrow$ 음 $\Rightarrow f(x)$ 는 $x=b$ 에서 극대

음 $\rightarrow$ 양 $\Rightarrow f(x)$ 는 $x=b$ 에서 극소

* 우함수와 기함수의 다른 표현

① 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1/x)$ 는 우함수이다.

② 기함수 $f(x)$ 에 대하여 $|f(x)|$ 는 우함수이다.

③ 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) + f(-x)$ 는 우함수이다. ㉠ $2^x + 2^{-x}$

④ 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) - f(-x)$ 는 기함수이다. ㉡ $2^x - 2^{-x}$

⑤ 함수 $\int_x^a f(t)dt$ 는 기함수이다.

* (우함수)' = (기함수), (기함수)' = (우함수)

$\int$ (기함수) = (우함수) $\int$ (우함수) = (기함수) just 정대칭함수

* 선대칭 $\Rightarrow f(a-x) = f(a+x)$, $f(2a-x) = f(x) \dots x=a$ 대칭

점대칭 $\Rightarrow f(a-x) = -f(a+x)$, $f(2a-x) = -f(x) \dots (a,0)$ 대칭

$f(a-x) + f(a+x) = 2b$, $f(2a-x) + f(x) = 2b \dots (a,b)$

* 도함수의 대칭

$f'(x) \Rightarrow f(x)$ $f'(x) \Rightarrow f(x)$

(0,0) 대칭 $x=0$ 대칭 $\rightarrow$ (k,0) 대칭 $x=k$ 대칭

$x=0$ 대칭 (0,c) 대칭 $x=k$ 대칭 (k,c) 대칭

* 도함수의 주기

$f'(x+p) = f'(x) \rightarrow f(x+p) = f(x) + g$

한쪽기의 G를 x 축 p , y 축 g 만큼 평행이 반복

* 도함수의 넓이정보로 원래함수 그리기 (뉴턴 문제 6번)

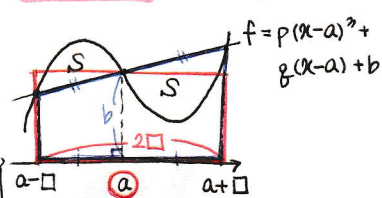
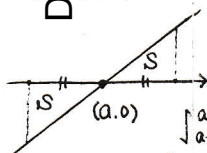
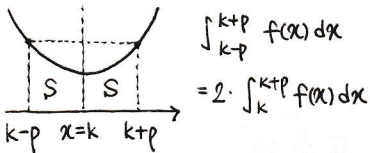
부호와 넓이에 집중. 넓이 $\Rightarrow$ 원래함수의 차 이용!

* 대칭성과 정적분 (뉴턴 문제 13번)

① $x=k$ 선대칭: $f(k+x) = f(k-x)$

② (a,0) 점대칭: $f(a+x) + f(a-x) = 0$

③ (a,b) 점대칭: ②번 + b



$\Rightarrow$ 대칭성은 그림을 통해 확인한 뒤 계산한다. (①, ②)

③번은 정적분의 범위를 관찰시 가운데에 대칭성의 x 좌표가 있을 때 사용한다. (=변곡점)

* 선대칭과 점대칭의 연산 결과 (뉴턴 문제 11~13번)

: 점 (k,c)에 대하여 대칭인 함수 $\Rightarrow$ (점 (k,0)에 대하여 대칭인 함수) + c

$f: x=a$ 선대칭 $\rightarrow (x-a)^2$ 라 생각

$\sim f \times f: x=a$ 선대칭

$f(x) \times h(x) = f(x) \times \{ (a,0) \text{ 점대칭} + b \}$

$g: (a,0)$ 점대칭 $\rightarrow (x-a)$ 라 생각

$f \times g: (a,0)$ 점대칭

$x=a$ 선대칭 (a,b) 점대칭 $= (a,0) \text{ 점대칭} + b - f(x)$

$h: (a,b)$ 점대칭 $\rightarrow (a,0)$ 점대칭 + b

$g \times g: x=a$ 선대칭

$(\because (x-a)^2)$

$\Rightarrow h = g + b$ 라 생각
($\because$ 상수함수)

적분하면 0됨.

* 주기함수의 정적분 (뉴턴 문제 15, 16번)

* 적분구간이 주기의 몇 배인지 파악하는게 중요하다. 여차피 주기의 시작점은 상대적이기 때문!

: $f(x+p) - f(x) = 0 \xrightarrow{\int} \int_x^{x+p} f(t)dt = C$ (C 는 상수) ($\because$ 항등식은 적분해도 항등식)

최소단위 양수

$\} \Rightarrow$ 주기수열에도 적용가능

* 주기 + 평행이동 (-3월 학평 30번) (뉴턴 문제 15, 16번)

$\Rightarrow$ 등차수열. (1차식), 적분구간 어떻게 끊든 상관X 공차는 $(pq)^{-1}$ (첫째항 따로 구하기)

$f(x+p) = f(x) + g \rightarrow f(x+p) - f(x) = g \rightarrow \int_x^{x+p} f(t)dt = g \cdot x + C$

$\rightarrow$ 수열문제와 연결

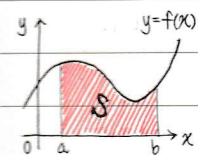
$\int_x^{x+a} f(t)dt \xrightarrow{\int} f(x+a) - f(x)$

㉠ $a_{n+3} = a_{n+2} \Leftrightarrow f(n+3) = f(n) + 2$ 공차는 6

III. 다항함수의 적분법 - 정적분의 활용

1. 곡선과 x축 사이의 넓이

(1) 정적분의 기하적 의미



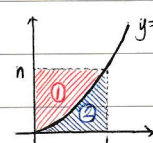
함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(x) \geq 0$ 일때, 정적분 $\int_a^b f(x) dx$ 는 도형 S의 넓이와 같다.

* 포물선 $y = a(x-a)(x-b)$ ($a \neq 0, a < b$)와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S = \int_a^b |a(x-a)(x-b)| dx = \frac{|a|(b-a)^3}{6}$$

정적분인 경우는 a의 부호를 고려한다. |a|이냐고 -a도 바꾸기!

* $y = ax^n$ 과 $y = n, x=1$ 로 둘러싸인 넓이의 관계



① 변 넓이 : ② 변 넓이 = n : 1

(2) 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S = \int_a^b |f(x)| dx \quad |f(x)| = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq 0) \\ -f(x) & (f(x) \leq 0) \end{cases}$$

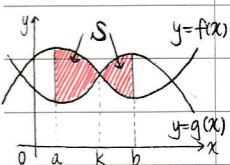
* 넓이 다룰 때 ① x절편 구하기 ② 크기 순으로 나열 ③ Σ (구간별 넓이)

* 곡선과 y축 사이의 넓이 : ① $y=f(x) \Rightarrow x=f(y)$ 로 바꾸기

$$S = \int_c^d |g(y)| dy$$

2. 두 곡선 사이의 넓이

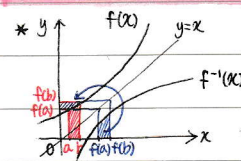
두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이



$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

위쪽그래프식 - 아래쪽 그래프식

$$= \int_a^k [f(x) - g(x)] dx + \int_k^b [g(x) - f(x)] dx$$



함수와 그 역함수의 정적분 * (인접제) 미들제 *

$$\int_a^{f(b)} f(x) dx + \int_{f(a)}^b f^{-1}(x) dx = bf(b) - af(a)$$

$$\square - \square = bf(b) - af(a)$$

$$\textcircled{1} \int_0^2 f(x) dx + \int_{10}^{29} f^{-1}(x) dx \text{의 값은? } (f(x) = x^3 + 2 \ (x \geq 0))$$

$$\left[\int_2^{29} f(x) dx + \int_{10}^{29} f^{-1}(x) dx \right] - \int_2^2 f(x) dx$$

* 두 곡선 f, g 사이 넓이는 $f-g$ 와 x축 사이 넓이로 생각하자.

* 정적분에서 넓이 여러개 $\Rightarrow$ 식으로 표현 first, 넓이 간 관계 찾기!

* 속도 그래프 = 위치 그래프의 도함수 ... ① 초기 위치 확인 ② 운동기울 (수직선 위에)

* 미지함수는 무조건 넓이공식 쓸 수 있는 방법이 있다! 여러처리 관찰해보기

(도형 나눠보기 OR 주변도형 사용하기)

3. 직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리

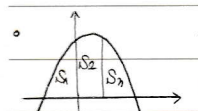
수직선 위를 움직이는 점 P의 시작 t에서의 속도가 $v(t)$ 이고 시작 $t=a$ 에서의 위치가 x_0 일 때

$$\textcircled{1} \text{ 시작 } t \text{에서의 점 P의 위치 } x \text{는 } x = x_0 + \int_a^t v(t) dt$$

$$\textcircled{2} \text{ 시작 } t=a \text{에서 } t=b \text{까지 점 P의 위치의 변화량은 } \int_a^b v(t) dt$$

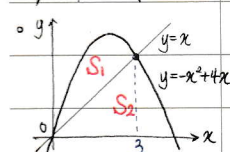
$$\textcircled{3} \text{ 시작 } t=a \text{에서 } t=b \text{까지 점 P가 움직인 거리 S는 } S = \int_a^b |v(t)| dt$$

$\therefore$ 위치 $\xleftrightarrow[\text{적분}]{\text{미분}}$ 속도



S_1, S_2, S_3 이 순서대로 등차수열을 이룰때 S_2 의 값은?

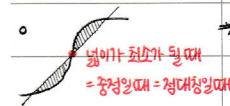
$$S_1 + S_3 = 2S_2 \quad (\because \text{등차중항}) \text{ 이므로 전체 넓이의 } \frac{1}{3} \text{을 구할 것!}$$



S_1 구하는 방법 > 두 함수의 교점을 찾은뒤 ($x=0, x=3$)

$$\int_0^3 x - (x^2 + 4x) dx = S_1$$

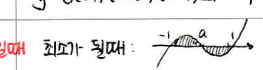
S_2 는 보통 전체 넓이 - S_1 으로 구한다.



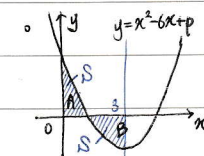
$\Rightarrow y = (x+1)(x-a)(x-1)$ 와 x축 사이의 도형의 넓이가

넓이가 최소가 될때

= 중점일때 = 정대칭일때



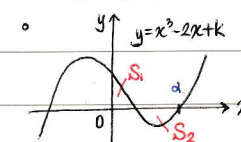
최소가 될때 : $\therefore a=0$ 일때 최소



A:B=1:2일때, p의 값은?

S는 서로 부호만 다르고 넓이가 같으므로

$$\int_0^3 (x^2 - 6x + p) dx = 0$$



$S_1 = S_2$ 일때, 상수 k의 값은? ($k > 0$)

$$\textcircled{1} \int_0^3 (x^2 - 2x + k) dx = 0$$

$$\textcircled{2} 3a^3 - 2a + k = 0 \quad \textcircled{3} \textcircled{4} \text{를 연결하여 k를 구한다}$$

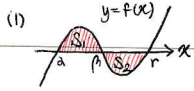
* 곡선과 곡선 사이의 넓이 구하는 순서

(i) 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.

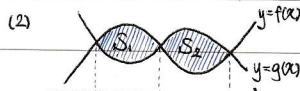
(ii) 두 곡선을 그려 위치관계를 파악한다.

(iii) (i)의 적분구간에서 {위쪽 그래프식} - {아래쪽 그래프식}의 정적분값을 구한다.

* 두 도형의 넓이가 같을 조건 ($S_1 = S_2$ 이면)

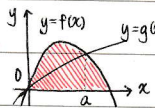


$$\Rightarrow \int_a^r f(x) dx = 0$$



$$\Rightarrow \int_a^r \{f(x) - g(x)\} dx = 0$$

* 두 곡선 사이의 넓이의 활용: 이등분



넓이 S가 g(x)에 의해 이등분 되면

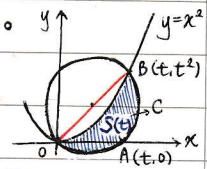
$$\Rightarrow \int_0^a \{f(x) - g(x)\} dx = \frac{1}{2} S \quad (S \text{는 공식이름})$$

* 넓이의 최솟값 ① 산술평균과 기하평균의 관계 ② 중값도 이용

* 트랙을 돌고있는 p와 q가 만나는 횟수 구하기 (p: p의 이동거리, q: q의 이동거리)

트랙을 도는 방향이 같을 때 $|p - q| = nl$ (l: 트랙길이) ... n번 만난다.

트랙을 도는 방향이 다를 때 $p + q = nl$... n번 만난다.



$$S'(1) = \frac{p\pi + q}{4} \text{ 일 때, } p^2 + q^2 = 2$$

$$OB \text{를 } 2 \text{배면 중점 } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$\int_0^t x^2 dx = \frac{1}{3} t^3$$

$$\frac{\pi}{8} (t^4 + t^2) - \frac{1}{6} t^3 = S(t)$$

$$S'(t) = \frac{\pi}{8} (4t^3 + 2t) - \frac{1}{2} t^2 \quad S'(1) = \frac{3\pi - 2}{4} \Rightarrow p^2 + q^2 = 2$$

* 넓이가 같다.

= ① 정적분 값이 0이다.

= ② 새로운 넓이 도입 (구변도형 이용)

= ③ 부정적분의 항등값의 차이가 0이다.

$$\int_a^b f(x) dx = 0 = F(b) - F(a)$$

(cf.) 적정계산은 최후의 수단...

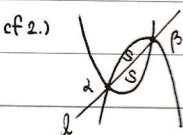
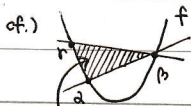
* 이차함수와 넓이

C1) 이차함수-축

C2) 이차함수-직선

둘 다 넓이공식으로 구함

C3) 이차함수-이차함수 $\Rightarrow$ 넓이공식 쓸 때 최고차 계수의 차 쓰는거 잊지마!!



최고차 계수 절대값

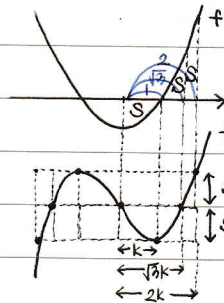
and 부호 반대라면

직선 쪽 넓이 이등분!

$$\frac{a}{6} \{ (p-r)^2 - (p-a)^2 \}$$

* 넓이와 비율관계

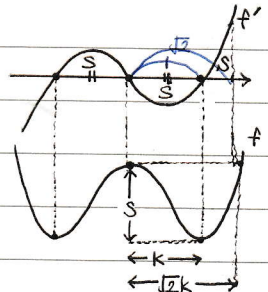
① 2차의 넓이와 3차 그래프



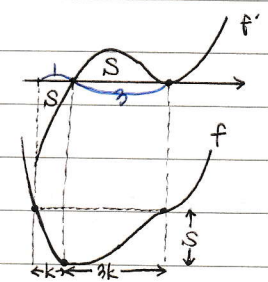
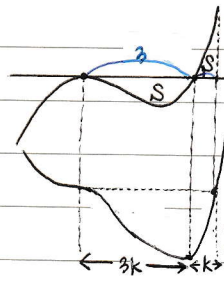
1:√3 and 1:2

② 3차의 넓이와 4차 그래프 * 이등분 *

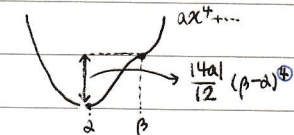
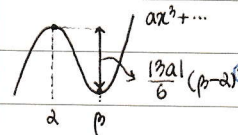
i) 대칭형 3차함수: 1:√2



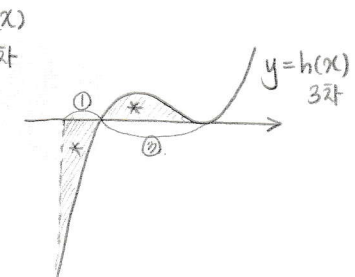
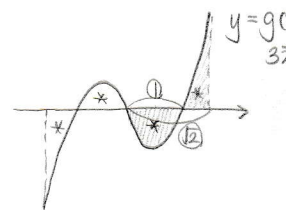
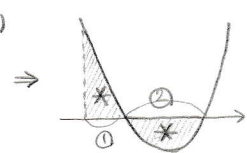
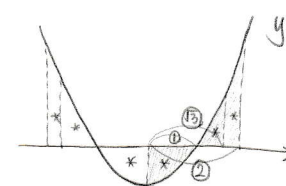
ii) 한 점이 축에 접하는 3차함수: 1:3



* 넓이와 항등값의 차



* 넓이와 비율관계 (*은 모두 S값)

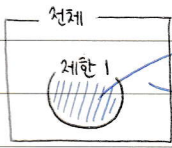




1. 경우의 수 ~ 2. 이항정리

* 경우의 수는 복잡해지면 집합으로 나타내서 case 분류.

1st. 전체 (표본공간) + 제한 1개.

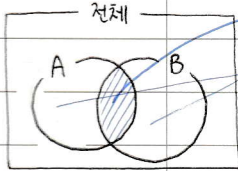


Sol 1) 직접 구한다.

Sol 2) 여사건을 이용한다.

2nd. 전체 + 제한 1 + 제한 2

(가) (나) 교집합 구하기 (조건 3개 나와도 2개도 됨)



Sol 1) 직접 case 분류 $A \cap B$

Sol 2) 여사건 이용 $A - B, B - A$

Sol 3) 드모르간 이용 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

전체 - $(A^c + B^c - A^c \cap B^c)$

* 음성법칙에서 다른 집합끼리의 곱셈은 순서 부여 X

* 객관식 문제에서 여사건의 판단

• 경우의 수: 전체 경우의 수를 먼저 구한 뒤 1/2 한 값보다 작으면 여사건 X

• 확률: 1/2 보다 훨씬 작으면 여사건 X

* 부정인 조건이 하나에 대한 것 $\Rightarrow$ just 계산

둘에 대한 것 $\Rightarrow$ 여사건 이용

셋 이상에 대한 것 $\Rightarrow$ 수형도

* 서로 다른 r개가 이웃한다 $\Leftrightarrow$ r개를 묶어서 한 덩어리로, 마지막에 (x r!)

이웃하지 않는다 $\Leftrightarrow$ 사이에 끼여넣는다.

① 이웃해도 되는 것들 사이에: 조합

② 이웃하면 X 것들 사이에: 중복조합 $\rightarrow$ 수직선

(단, 일렬 나열일 때만 성립. 일렬 X $\rightarrow$ 자리배치 직접 따져야함)

* 서로 같은 r개가 이웃한다 $\Leftrightarrow$ r개를 1개로 보고 배열의 수 계산.

이웃하지 않는다 $\Leftrightarrow$ r개 제외한 배열 수 계산

$\rightarrow$ 사이사이, 양 끝 빈자리 중 r개 선택

* 분할: 그룹간 순서 X. ... 그룹 내의 순서 무시 = 조합 이용. nCr

그룹 간의 순서 무시 = (구성원 조합이 k개일때) $\times \frac{1}{k!}$

분배: 그룹간 순서 O

$\therefore$ 이때 순서의 이중부여를 막기 위해 구분하고, 나열한다.

* 여사건을 사용할때 전체 경우의 수 구하기: 문제의 기본조건을 모두 충족해야 함.

* 2개가 이웃하지 않는다 $\rightarrow$ 여사건 이용 (2개가 이웃)

3개가 이웃하지 않는다 $\rightarrow$ 나중에 양 끝 사이사이에 배열 (가급적 여사건 X)

* 중복순열에서 n은 서로 다른 것. 중복가능한 것들의 개수. 혹은 선택대상의 개수.

* 어떤 범위 내의 자연수 개수 셀때: 중복순열 * 여사건, 곱셈 이용

특히 '~'을 포함하는 자연수의 개수'를 셀 때 많이 이용된다.

* "서로 다른 것 $\rightarrow$ 서로 같은 것" + 올바름 (뵈것 존재 가능): 중복순열

* 중복순열은 계산시 헷갈림 방지를 위해 항수의 개수처럼 표현 계산한다.

* "서로 다른 것 $\rightarrow$ 서로 같은 것": 조합을 활용한 분할

다) 다른 $\rightarrow$ 다른 인데 뵈것이 없는 경우도 분할

* 경우의 수 문제에서, 선택하는 주체와 객체가 생각하기 어렵다면 반대로 생각.

* 같은 것이 있는 순열에서의 마디 끊기

예) ② ① ③ ⑤ ⑥ ④ $\rightarrow \frac{6!}{2!3!}$

* $A > B$ 인 경우를 묻는 문제는 대칭성 이용: $\frac{(\text{전체}) - (A=B인 경우)}{2}$

* 최단경로로 가는 경우의 수

• 경로가 단순할 때: 조합 / 같은 것이 있는 순열

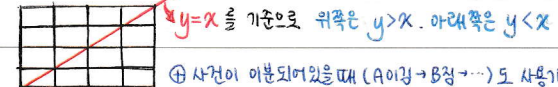
• 경로가 복잡할 때: ① just 세기 ② case 분류

기울기 -1인 직선 이용 $\Rightarrow$ 이동횟수의 합이 일정한 점 기준 $\rightarrow$ 배반사건 O

이때, 제한공간과 최대한 많이 만나게끔 그림다.

+ 건너지 말아야 하는 도로는 미리 /// 표시 해놓자.

* $A > B$ 인 경우를 묻는 문제를 좌표화해서 풀 수 있다.



④ 사건이 이분되어있을 때 (A이성 $\rightarrow$ B정 $\rightarrow$...)도 사용가능

* 원순열에서, 회전하여 일치하는 경우의 수

• 정 k각형 / 정 2k각형과 정 k각형 $\Rightarrow \times \frac{1}{k}$

• 직사각형 / 180° 회전 $\Rightarrow \times \frac{1}{2}$

특정 조건이 있을 경우, (특정 조건 우선 배치) $\times$ (순열) 로 계산.

* 중복 조합 nHr은 서로다른 n개의 종류에서 중복허락하여 r개의 개체 선택

* "서로 다른 n개 종류 중 r개 선택"

* 부정방정식의 정수해 + 모든 항 계수가 같은 1차 방정식

+ $\square \geq 0$ 으로 모두 치환

* 개수와 합이 정해져 있는 자연수의 배열

* 순서가 정해진 배열 + 등호 존재가능: 중복조합 (부등식) $\rightarrow$ ω 추가하기

다) 순서가 정해진 배열 + 등호 X: 조합

* "서로 같은 것 (구별 X) $\rightarrow$ 서로 다른 것 (구별 O)": 중복조합

DO NOT COPY

중복조합
(방정식)

* 인원이 n 으로 같은 집단 간 일대일대응의 개수 = $n!$ 가지

* $(f, f)(x) = x$ 인 함수 f 의 개수 : case 나누기 → 구조복사*

① 크로스: $y = x$ 대칭 (1,2), (2,1) ...

② 자기자신: $y = x$ 의 점 (1,1), (2,2) ...

} 쌍의 개수별 구분

* 함수의 개수는 기본적으로 중복순열 Base 급형이고, 지역의 제한조건에 주의하자.

* 이항계수와 계수 문제는 단순한 1차(혹은 2차)가 있으면 풀이해진다.

(사상적으로 case 분류 가능)

* 이항정리의 적용에서 1차식의 거듭제곱꼴이 아닌 경우 연·방을 사용한다.

① 횡수에 관한 것 ② 지수에 관한 것

* 이항계수의 성질 ⇒ ① 포함 2^n ② 대칭성 이용

기본] $(1+x)^n = nC_0 + nC_1x + nC_2x^2 + \dots + nC_nx^n$

① $x=1$ 대입 ⇒ 모든 계수의 총합 $\dots nC_0 + nC_1 + \dots + nC_n = 2^n$

② $x=-1$ 대입 ⇒ 짝수번째 항 = 홀수번째 항 (대칭성)

$$\dots nC_0 - nC_1 + nC_2 - nC_3 + \dots + (-1)^n nC_n = 0$$

$$\dots nC_0 + nC_2 + nC_4 + \dots = nC_1 + nC_3 + nC_5 + \dots = 2^{n-1}$$

* 이항계수 계산할 때 주의!! ① 0부터 n 까지 ② $\pm$ 번갈아 나옴 ⇒ $(-1)^n$

* 파스칼의 삼각형의 성질 ⇒ ① 역삼각형 ② 하키스틱 / 대칭성 : 변 출발.

$$\textcircled{1} rC_0 + r+1C_1 + r+2C_2 + \dots + nC_{n-r} = n+1C_{n-r}$$

$$\textcircled{2} rC_r + r+1C_r + r+2C_r + \dots + nC_r = n+1C_{r+1}$$

변에서 출발한다!

DO NOT COPY

3. 확률 ~ 4. 확률변수와 확률분포의 이해

* 확률의 약속 → ① 모든 근원사건의 확률은 같다.

→ ② 같아도 모두 다른 것으로 인정!! → $A_1, A_2, \dots$ 순서부여

* 확률의 표본공간의 설정: 조합(C), 순열(P), 중복순열(TT)을 이용

가급적 중복조합(H) 같·있·순은 X

* 나머지는 나머지끼리 계산할 수 있다.

* ... (중에서) 임의로 한 개를 선택할 때, ~ ↔ 표본공간 강제 재설정하기

* 종속사건, 비복원 사건은 순열 Base // 독립사건, 복원 사건은 중복순열 Base.

* 경우의 수 vs. 확률의 덧셈·곱셈 정리

1) 경우의 수 ... $p \times$ (경우의 수) → 모든 대상을 같은 p 가지는 서로 다른 것으로 봄.

2) 확률의 덧셈·곱셈 정리 ... ① 생각한 순서대로 p 곱한다. (교환법칙)

② 주어진 조건 이외의 p 는 계산 X ($\because p=1$)

③ if 서로 다른 종류의 선택 대상의 순서 고려 X → 생각한 순서에서 바뀌는 경우의 수 곱.

* 확률의 곱셈정리 적용의 대표적인 상황

- 조건 이외의 p 는 계산 X → ① 특정 자리의 조건 (상관·동치)

- 사건 발생 순서 자유조절 → ② 조 나누기

* 독립시행임을 파악할 수 있는 조건

① 같은 시험 n 회 반복 n 명에 대한 조사, n 개에 대한 조사

② 관심을 가지는 사건의 확률 p 가 고정

* 선지가 $\frac{3}{64}, \frac{4}{64}, \frac{9}{64} \dots$ 와 같이 분모가 일정하다면 just 경우의 수 문제.

* 조건부확률을 다룰 때 점경합 점

① 조건부확률의 상황임을 파악 (전체 → 부분 중 → 그 중 비율 구해야 식의 문제)

② 조건부확률을 $P(A|B)$ 로 나타낸 뒤, 경우의 수 / 확률 이용할 건지 결정

③ 분모 구할 때 1st. 전체 한개번에 구할 수 있는지?

2nd. case 분류를 이용하느니? (꼭 문제에 주어진대로 나올 필요 X)

3rd. 여사건을 사용할 것인지? 판단

④ 조건이 되는 사건의 발생 순서 구분 ($\because$ 확률은 과거를 상황변형 O but 계산 X)

$A(\text{편지}) \rightarrow B(\text{내용}) \rightarrow P(B|A)$: 상황에만 반영, 계산 X.

$\Rightarrow P(A|B)$: 계산에도 반영 필요

⑤ 경우의 수나 p 가 주어질 때 이중분할표 적극 활용

* 확률 계산에서 다음 문제로 넘어가기 전, 모든 case를 고려했는지 검사하기 위해

$\sum(\text{확률}) = 1$ 인지 확인해볼 수 있다.

* 이중분할표: 전체를 분할하는 두 가지 기준이 있을 때 사용한다.

		A	A ^c	
B	②	③	④	경우의 수 / 확률
B ^c	①	⑤	⑥	둘다 상관 X

만약 확률의 분자 / 분모가 커서 계산하기 힘들다면 전체 = 100 이렇게 가정해도 OK.

* 사건의 독립: 사건 A와 B가 서로 영향 X.

즉, $P(A|B) = P(A|B^c) = P(A)$ 일때 A와 B는 독립

* 사건의 독립이 갖는 특징

① 이중분할표에서 비율이 같다. (노동일정의 법칙: 가로비율, 세로비율 일정)

② 조건부확률이 없다. → 곱사건은 곱으로 계산한다.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

→ 독립에서 확률의 연산은 $P(A) = a, P(B) = b$ 로 놓고 연립방정식으로 더한다.

* 배반사건 vs. 독립 vs. 종속

배반사건	독립	종속
$A \cap B = \emptyset$	$P(B A) = P(B A^c) = P(B)$	$P(B A) \neq P(B A^c) \neq P(B)$
A와 B는 동시에 발생 X	서로에게 노상관	서로에게 영향
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$

* 사건의 독립 확인 방법

① (교집합) 곱사건이 주어진 경우: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

② 조건부확률 $P(A|B), P(B|A)$ 둘다 써놓고 유리한 걸로 $P(A|B) = P(A)$

③ 이중분할표에서 비의 일치 확인

* 확률변수의 구분

이산확률변수 → 확률질량함수 → 확률분포 → 이항분포(독립시행의 확률분포)

(항값값 = 확률)

연속확률변수 → 확률밀도함수 → 확률밀도함수 그래프 → 정규분포

(항값값 ≠ 확률) (정적분 = 확률)

* 확률변수가 지나치게 많으면 $E(X)$ 계산 X. 관찰 first!

$$\begin{aligned} & x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \text{ 간격 일정 (등차)} \\ & + \\ & p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \text{ 대칭} \end{aligned} \Rightarrow E(X) = \frac{x_1 + x_n}{2}$$

(평균은 정중앙에 있다.)

* 변수간격비 = 표준편차비 ↔ $X - m = 0 \times Z$ (표준편차의 Z배)

* 주어진 확률변수를 쉬운 확률변수로 변환하여 다룰 수 있다.

$X = 94, 97, 100, 103, 106 \Rightarrow Y = X - 100$ 평균량을 0으로 만들기

$$\Rightarrow Y' = \frac{1}{3}(X - 100) \text{ 간격(차)를 1로 바꾸기}$$

* 분산의 대소관계는 계산문제 X

변수의 간격이 작을수록 → 분산이 작다.
 확률이 중앙에 집중될수록 ↗

* 이항분포를 표로 나타낼 때 X 가 0일때 잊지말것! 총 원소개수 = $(n+1)$ 개

* 높은 범위가 지나치게 큰 이항분포는 문제 언급이 있을 때만 (정규분포를 이용하거~)

정규분포 근사시킬 수 있다.

독립시행 - 확률 $\Rightarrow nCr \times p^r \times (1-p)^{n-r} \rightarrow$ 범위의 확률은 정규분포로 '근사'
 전체 시행횟수 - 경우의 수. $X \sim N(np, np(1-p))$
 평균 분산 $\Rightarrow X \sim B(n, p) \Leftrightarrow$ 이항분포

$$E(X) = np, V(X) = np(1-p)$$

* $p(1-p) = \square$ 계산은 이차방정식 X. 쪼개어 본다.

예) $p(1-p) = \frac{4}{25} \rightarrow \textcircled{1} \text{ 분모 쪼개기 } \rightarrow 5^2$
 $\textcircled{2} \square + \Delta = 5, \square \times \Delta = 4 \Rightarrow \square = 1, \Delta = 4$

* 확률밀도함수의 그래프가 주어지면 ① 값음 이용 ② $E(X), V(X), \sigma(X)$ 관성 L

③ (전체 넓이) = 1 이용 ④ ≥ 0 이용.

다.) 정규분포 그래프가 주어지면 ① 대칭성 이용 ② m 과 σ 판별.

* 평균과 분산이 모두 결정된 정규분포: 표준화 X. 평균으로부터 거리 비 = 표준 편 비

예) 평균/분산이 미지수일 때는 표준화가 더 유리.

* 확률밀도함수 $P(X=x)$ 의 x 에서의 함수값은 확률

예) 확률밀도함수 $f(x)$ 의 x 에서의 함수값은 확률 나타내는 게 X

DO NOT COPY