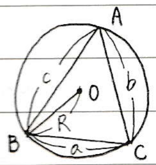
Ⅱ. 삼각함수 _ 사인법칙과 코사인법칙

수1

1. 사인법칙



(1) △ABC에서 외접원의 반지름의 길이 = R 라 하면

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

변형) ① $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

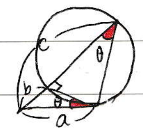
② $a = 2R \cdot \sin A$, $b = 2R \cdot \sin B$, $c = 2R \cdot \sin C$

③ $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

tip 사인법칙을 이용하는 경우
- 한 변 길이 + 두 각 크기
- 두 변 길이 + 한 대각의 크기
- 외접원 반지름 + 한 변/각

* 삼각형의 종류를 판단할 때는 대부분 변형-③을 이용한다. (직접 대입)

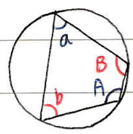
*



$b : a = a : c$

$a^2 = bc$

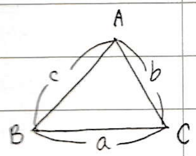
*



내접하는 사각형은 마주보는 두 각의 합이 항상 180°

$a + A = b + B = 180°$

2. 코사인법칙



(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

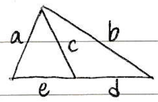
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

변형) $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

tip 코사인법칙을 이용하는 경우
- 두 변 길이 + 끼인각
- 세 변의 길이 → 세 각 크기

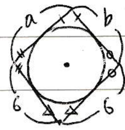
* 스튜어트 정리



$\frac{d \cdot a^2 + e \cdot b^2}{d+e} = c^2 + ed$

$d = e$ 일때, $\frac{a^2+b^2}{2} = c^2 + d^2$

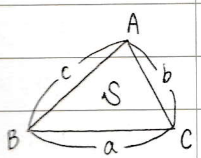
*



외접하는 사각형 → $a = b$

원 밖으로 나온 변의 길이는 동일함

3. 삼각형의 넓이



삼각형 ABC 넓이 = S 라 하면

(1) 두 변 길이 + 끼인각

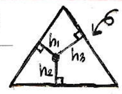
$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ca \cdot \sin B$

(2) 세 변 길이 … 헤론의 공식

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (단, $s = \frac{a+b+c}{2}$)

* $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc$

* 넓이조건 = 수선조건! 예

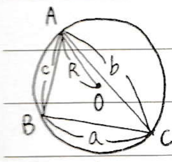


정△

⇒ 높이 = $h_1 + h_2 + h_3$

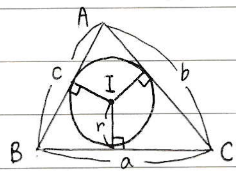
* 넓이비 조건 나오면 first 공통각/변 찾기!!! → 실제로 어떤 비를 알려주는 조건인지 파악할 것!! - 3월 학평 29번

(3) 외접원의 반지름 R



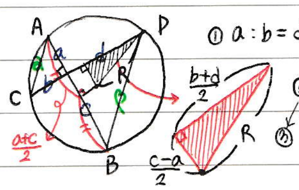
$S = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

(4) 내접원의 반지름 r



$S = \frac{1}{2} r (a+b+c)$

* 닮음을 이용한 원의 성질



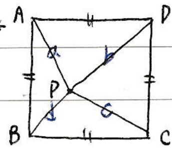
① $a : b = d : c \Rightarrow ac = bd$

② $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} = R^2$

변형

③ $\frac{d^2+b^2}{4} = R^2$ (∵ 피타고라스 정리)

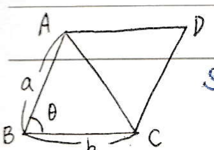
*



$\Rightarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ (단, □ABCD 직사각형·정사각형)

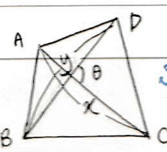
4. 사각형의 넓이

(1) 평행사변형 ABCD 넓이 = S라 하면



$S = ab \cdot \sin\theta$

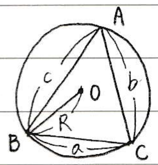
(2) 두 대각선 사이의 끼인각 이용



$S = \frac{1}{2}xy \cdot \sin\theta$

Ⅱ. 삼각함수 _ 사인법칙과 코사인법칙

1. 사인 법칙



(1) △ABC에서 외접원의 반지름의 길이 = R 라 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

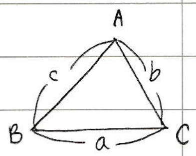
변형) ① $a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C$

② $a = 2R\cdot\sin A$, $b = 2R\cdot\sin B$, $c = 2R\cdot\sin C$

③ $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

tip 사인법칙을 이용하는 경우
- 한 변 길이 + 두 각 크기
- 두 변 길이 + 한 대각의 크기
- 외접원 반지름 + 한 변/각

2. 코사인법칙



(1) $a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$

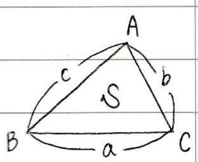
$b^2 = a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$

$c^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$

변형) $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

tip 코사인법칙을 이용하는 경우
- 두 변 길이 + 끼인각
- 세 변의 길이 → 세 각 크기

3. 삼각형의 넓이



삼각형 ABC 넓이 = S 라 하면

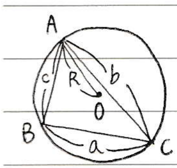
(1) 두 변 길이 + 끼인각

$S = \frac{1}{2}ab\cdot\sin C = \frac{1}{2}bc\cdot\sin A = \frac{1}{2}ca\cdot\sin B$

(2) 세 변 길이 … 헤론의 공식

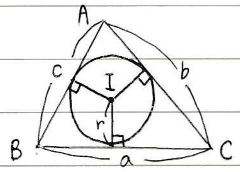
$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (단, $s = \frac{a+b+c}{2}$)

(3) 외접원의 반지름 R



$S = \frac{abc}{4R} = 2R^2\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$

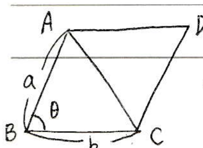
(4) 내접원의 반지름 r



$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$

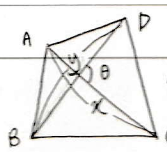
4. 사각형의 넓이

(1) 평행사변형 ABCD 넓이 = S라 하면



$S = ab\cdot\sin\theta$

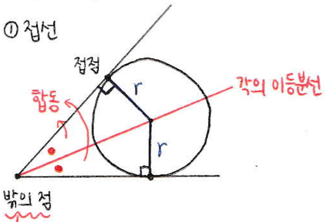
(2) 두 대각선 사이의 끼인각 이용



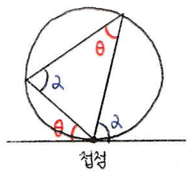
$S = \frac{1}{2}xy\cdot\sin\theta$

• 원과 직선

① 접선

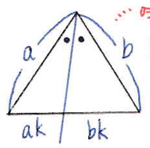


└ 수직표시 & 반지름 표현



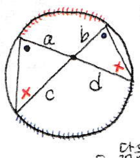
✻ 각표시 ✻

✻✻ 각의 이등분선 = 비율관계



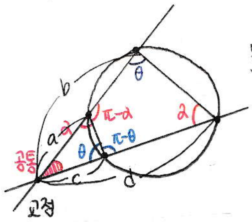
… 역도 생각할수 있어야 함!!

② 원과 직선 (할선정리)



닮음 $a:b = c:d$

$ad = bc$



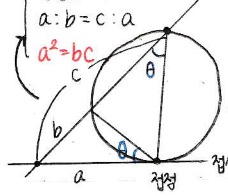
닮음 $a:d = c:b$

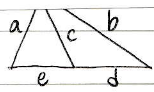
$ab = cd$

닮음 (살짝 등비수열!)

$a:b = c:a$

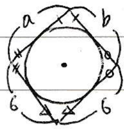
$a^2 = bc$





$\frac{\ \ }{d+e} = c^2+ed$

$d=e$ 일때, $\frac{a^2+b^2}{2} = c^2+d^2$

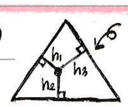
✻ 

외접하는 사각형 → $a=b$

원 밖으로 나온 변의 길이는 동일함

✻ $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

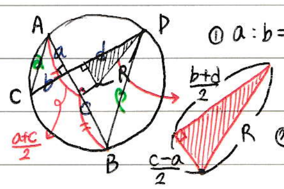
✻ 넓이조건 = 수선조건! 예)



정△ ⇒ 높이 = $h_1+h_2+h_3$

✻ 넓이비 조건 나오면 first 공통각/변 찾기!!! → 실제로 어떤 비를 알려주는 조건인지 파악할 것!! - 3월 학평 29번

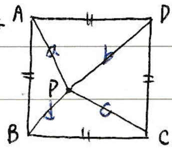
✻ 닮음을 이용한 원의 성질



① $a:b = d:c \Rightarrow ac = bd$

② $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} = R^2$

변형 ③ $\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} = R^2$ (∵ 피타고라스 정리)

✻ 

→ $a^2+c^2 = b^2+d^2$ (단, □ABCD 직사각형·정사각형)

Ⅲ. 수열 _ 등차수열과 등비수열

1. 수열 : 수의 나열

- 자연수 전체의 집합 N ⇒ 정의역, 실수 전체의 집합 R ⇒ 공역으로 하는 함수 Ⓔ

2. 등차수열 : 첫째항부터 일정한 수를 더하여 만들어지는 수열

(1) 첫째항 $=a$, 공차 $=d$ ⇒ 일반항 $a_n=a+(n-1)d$ $(n=1.2.3.\cdots)$

(2) 등차중항 : 세 수 $a.b.c$가 등차수열을 이룰 때

$2b=a+c$, $b=\frac{a+c}{2}$ ···▸ b는 a와 c의 등차중항 = 산술평균

(3) 등차수열 미지수 설정하기 ⇒ 평균을 a라고 한 것에 주목!

ⅰ) 3개 : $a-d$, a, $a+d$ ··· 5개 : $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$

ⅱ) 4개 : $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$

(4) 등차수열의 합

첫째항 $=a$, 공차 $=d$, 제 n항 $=l$ 일 때 등차수열의 $\boxed{합}$은 =평균×항의수

$S_n=\frac{\overset{항의수}{\boxed{n}}(a+l)}{2_{평균}}=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

3. 등비수열 : 첫째항부터 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열

(1) 첫째항 $=a$, 공비 $=r$ ⇒ 일반항 $a_n=ar^{n-1}$ $(n=1.2.3\cdots)$

(2) 등비중항 : 세 수 $a.b.c$가 등비수열을 이룰 때

$b^2=ac$, $b=\pm\sqrt{ac}$ ···▸ b는 a와 c의 등비중항 = 기하평균

(3) 등비수열 미지수 설정하기 : 항의 개수와 관계없이 $a.ar.ar^2.\cdots$

(4) 등비수열의 합

① $r\neq1$일 때, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

② $r=1$일 때, $S_n=n\cdot a$

4. 수열의 합과 일반항 사이의 관계

$$\begin{cases} a_1=S_1 \\ a_n=S_n-S_{n-1} \ (n=2.3.4\cdots) \end{cases}$$

* 등차수열의 합에 관한 조건 제시 → 대칭성 first - 3월 학평 17번

* 수열의 재구성의 핵심은 ① 일정한 개수 ② 일정한 간격

* 등차수열의 합 · 등차수열의 재구성의 원리에 의한 합의 구조 이용
  · 평균의 이용 · 합의 공식 이용

* 등비수열의 합 · 등비수열의 재구성의 원리에 의한 합의 구조 이용
  · 합의 공식 이용 (주로 just 계산)

* 등비수열 & 도형 못풀겠다면 직접 넣어보기! (주로 2로 치환)

* 자연수···공차가 1인 등차수열

* 홀수번째 항끼리만 규칙성을 지닐 수도 있다. 예) 2.3으로 나누어 떨어지지 × 수열

* 등차수열 : 정의 → 일반항 → 항 사이의 간격 → 등차중항 → 직선 → 합의 대칭성 → 등차수열의 재구성 → 합 → 삼각형, 사다리꼴

* $a_n=pn+q$ ($p.q$는 상수) ⟺ n의 계수. 즉 p는 공차 ⟺ 공차=기울기인 1차함

* $d=a_{n+1}-a_n=\frac{a_n-a_m}{n-m}$ (단, $m<n$) ◂ 기울기를 구하는 것임

* 조화수열 : 수열 $\{a_n\}$에서 각 항의 역수가 등차수열인 수열

↳ $a.b.c$가 조화수열일 때, $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$. $b=\frac{2ac}{a+c}$ 성립

* 등차수열의 합 $S_n=pn^2+qn$의 꼴일 경우 → 첫째항부터 등차수열이다.

등차수열의 합 $S_n=pn^2+qn+$상수 〃 → 둘째항부터 등차수열이다.

* $a_n=S_n-S_{n-1}$이 원칙이지만 편의상 $n=1.2.3$을 대입하여 구하기!

* 등차수열의 합 $\underset{=An^2+Bn}{S_n}$은 ① 이차식이다. = n에 관한 이차식 ② 공차는 $2A$ ↳ 살짝 미분느낌~ ③ $S_1=a_1$

* $\{a_{2n}\}$이 등차수열이면 $\{a_n\}$도 등차수열이다. (∵ 짝수번째 항) (×) ↳ 역은 성립(○)

* $\{\log_2 a_n\}$이 등차수열이면 $\{a_n\}$은 등비수열이다. (∵ $\log_2 a_n=pn+q$) (○)

Ⓔ ⟺ log (등비) = (등차수열), $\square^{(등차)}$ = (등비수열) ··· 지수함수와 로그함수 성질 이용

* $a_n=k\cdot c^{pn+q}$ ⟺ c^p는 공비

* $r=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{a_n}{a_m}\right)^{\frac{1}{n-m}}$ (단, $m<n$)

* 등비수열의 합 $S_n=Ar^n-B$ ($r\neq0$. $r\neq1$. A,B는 상수)

(ⅰ) $A=B$ → 첫째항부터 등비수열이다. (ⅱ) $A\neq B$ → 둘째항부터 등비수열이다.

* $\{\frac{n}{a_n}\}$은 등비수열이 아니다. 단, $\{a_{n+1}+a_n\}$은 등비수열이다. ($\{a_n\}$=등비수열)

* $x-[x]$, $[x]$, x가 등비수열 ⇒ ① 등비중항 이용 ② $x=n+\alpha$ $(0\leq\alpha<1)$ ⟺ $[x]$

* $\{a^n\}$, $\{a_nb_n\}$ 등 곱으로 이루어진 수열은 모두 등비수열이다.

$\{2a_{n+1}-3a_n\}$도 등비수열이다 (공비가 a_n과 같음)

* 단, $\{a_na_{n+1}\}$이 등비수열이면 $\{a_n\}$도 등비수열이다. (×) (∵ $a_{n+2}=a_n\times r$)

* S_n으로부터 $a_n=f(n)$을 구할 때 $S_0=0$이면 첫째항부터 성립하고,

$S_0\neq0$이면 2번째 항부터 $a_n=f(n)$이기 때문이다.

* 등비수열 : 정의 → 일반항 → 항 사이의 간격 → 등비중항 → 곱의 대칭성 → 등비수열의 재구성 → 합

* 지수 : 유리수. 실수 ··· 밑 >0, 지수 : 정수 ⊕/⊖ ··· 밑 $\neq0$. 막계산하지 말 것!

* 공비가 양수 ⟺ 부호가 일정함 // 공비가 음수 ⟺ 공비가 번갈아나옴

Ⓔ * 등비 ⇒ 곱의 대칭성 → 곱 = (평균)$^{(항의개수)}$ // 등차 ⇒ 합의 대칭성 → 합 = (평균)×(항

··· 등차의 합은 0일 때 특수, 등비의 곱은 1일 때 특수

* 기울기 ⇒ 직각 △ 활용할 수 있는지 파악해보기

Ⅲ. 수열 _ 등차수열과 등비수열

1. 수열 : 수의 나열

- 자연수 전체의 집합 N ⇒ 정의역, 실수 전체의 집합 R ⇒ 공역으로 하는 함수

Ⓔ

2. 등차수열 : 첫째항부터 일정한 수를 더하여 만들어지는 수열

(1) 첫째항 $=a$, 공차 $=d$ ⟹ 일반항 $a_n=a+(n-1)d$ $(n=1.2.3.\cdots)$

(2) 등차중항 : 세 수 a.b.c가 등차수열을 이룰 때

$2b=a+c$, $b=\frac{a+c}{2}$ ⋯▸ b는 a와 c의 등차중항 = 산술평균

(3) 등차수열 미지수 설정하기 ⇒ 평균을 a라고 한 것에 주목!

i) 3개 : $a-d,\ a,\ a+d$ ⋯ 5개 : $a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+$

ii) 4개 : $a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$

(4) 등차수열의 합

첫째항 $=a$, 공차 $=d$, 제 n항 $=l$ 일때 등차수열의 합은 = 평균×항의 수

$$S_n=\frac{\overset{\text{항의수}}{\boxed{n}}(a+l)}{\underset{\text{평균}}{2}}=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

3. 등비수열 : 첫째항부터 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열

(1) 첫째항 $=a$, 공비 $=r$ ⟹ 일반항 $a_n=ar^{n-1}$ $(n=1.2.3\cdots)$

(2) 등비중항 : 세 수 a.b.c가 등비수열을 이룰 때

$b^2=ac$, $b=\pm\sqrt{ac}$ ⋯▸ b는 a와 c의 등비중항 = 기하평균

(3) 등비수열 미지수 설정하기 : 항의 개수와 관계없이 $a.ar.ar^2.\cdots$

(4) 등비수열의 합

① $r\neq1$일때, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

② $r=1$일때, $S_n=n\cdot a$

4. 수열의 합과 일반항 사이의 관계

$$\begin{cases} a_1=S_1 \\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n=2.3.4\cdots) \end{cases}$$

* 등차수열의 합에 관한 조건 제시 → 대칭성 first - 3월 학평 17번

* 수열의 재구성의 핵심은 ① 일정한 개수 ② 일정한 간격

* 등차수열의 합 · 등차수열의 재구성의 원리에 의한 합의 구조 이용

  · 평균의 이용 · 합의 공식 이용

* 등비수열의 합 · 등비수열의 재구성의 원리에 의한 합의 구조 이용

  · 합의 공식 이용 (주로 just 계산)

* 등비수열 & 도형 못풀겠다면 직접 넣어보기! (주로 2,3 치환)

* 등차수열의 홀수번째 항들의 합, 짝수 번째 항들의 합 (뉴런 문제 9번)

case 1) 항의 개수가 짝수개. $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6$

홀수 th 합 $=3a_3$, 짝수 th 합 $=3a_4$. ⟺ 평균 비 = 합의 비

case 2) 항의 개수가 홀수개 $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7$

홀수th 합 $=4a_4$, 짝수 th 합 $=3a_4$ ① ⟺ 합의 비 = 항의개수 비

② 홀수th 합과 짝수 th 합의 차 = 평균

* 등차수열의 합 S_n과 이차함수의 관계

① $S_1=a_1\cdots(1.S_1)$.즉, $(1.a_1)$

② 대칭축 → 합의 최대.최소와 관련

③ 절편 → 합이 최초로 0이 되는 순간 ⇒ 등차수열의 평균과 관련

④ 최초로 양수항·음수항이 되는 지점 (평균변화율 이용 or 팩맨 생각하기)

↳ 역으로도 생각하기! 예 $a_5=0 \Leftrightarrow S_5=S_4$

* 수열과 그에 따른 idea 핵심정리

① 등차수열
② 등비수열 } ⇒ 일반항과 합의 공식 / 구조적 특징

③ 자연수의 제곱의 합 ⇒ 공식의 활용

④ 일반적인 수열 (수열의 귀납적 정의) ⇒ 규칙성

* 등차수열과 일차함수

- 등차수열의 공차 = 직선의 기울기

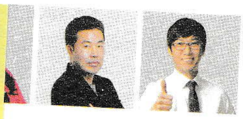
- $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ⋯ 등차중항

cf.) 일직선 위의 세 점 ⟺ 닮음과 관련 있는 문제

cf.) 부등식의 경계 = 방정식의 해

cf.) 절댓값 있으면 등호성립 언제되는지 확인하고 경계에 따라 case 분류부터 시작

cf.) 2차함수 ⟺ 대칭성 이용하기



이차식 공차는 2A $b_1=a_1$ ↳ 살짝 미분느낌~

다. (∵ 짝수번째 항) (X)

, 역은 성립(O)

열이다. (∵ $\log_2 a_n=pn+q$) (O)

등비수열) ⋯ 지수함수와 로그함수 성질 이용

)

1. A,B는 상수)

iii) $A\neq B$ ⟶ 둘째항부터 등비수열이다.

* $\{\overline{a_n}\}$은 등비수열이 아니다. ⋯ $a_n\}$은 등비수열이다. ($\{|a_n|\}$= 등비수열)

* $x-[x]$, $[x]$, x가 등비수열 ⇒ ① 등비중항 이용 ② $x=n+\alpha\ (0\le\alpha<1) \Leftrightarrow [x]=n$

* $\{a^n\}$, $\{a_nb_n\}$ 등 곱으로 이루어진 수열은 모두 등비수열이다.

$\{2a_{n+1}-3a_n\}$도 등비수열이다 (공비가 a_n과 같음)

* 단, $\{a_na_{n+1}\}$이 등비수열이면 $\{a_n\}$도 등비수열이다. (X) (∵ $a_{n+2}=a_n\times r$)

* S_n으로부터 $a_n=f(n)$을 구할 때 $S_0=0$이면 첫째항부터 성립하고,

$S_0\neq0$ 이면 2번째 항부터 $a_n=f(n)$이기 때문이다.

* 등비수열 : 정의 → 일반항 → 항 사이의 간격 → 등비중항 → 곱의 대칭성 →

등비수열의 재구성 → 합

* 지수 : 유리수.실수 ⋯ 밑 >0, 지수 : 정수 ⊕/⊖ ⋯ 밑 ≠0. 막계산하지 말 것!

* 공비가 양수 ⟺ 부호가 일정함 // 공비가 음수 ⟺ 공비가 번갈아나옴

Ⓔ * 등비 ⇒ 곱의 대칭성 ⟶ 곱 $=(\text{평균})^{(\text{항의개수})}$ // 등차 ⇒ 합의 대칭성 → 합 = (평균)×(항개수)

⋯ 등차의 합은 0일때 특수, 등비의 곱은 1일때 특수

* 기울기 ⇒ 직각 △ 활용할 수 있는지 파악해보기

Ⅲ. 수열 _ 수열의 합

1. Σ의 뜻과 기본성질

(1) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$

tip $2\le m\le n$ 일때, $a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k$

(2) Σ 의 기본 성질

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$ (복부호 동순)

② $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

③ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

tip 주의해야 할 Σ의 계산

O $\sum_{k=1}^{n}(pa_k\pm qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k\pm q\sum_{k=1}^{n}b_k$

$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_ib_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\{a_i\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)\right\}$

$\sum_{k=1}^{n}n=n^2$ ($\because$ n은 여기서 변수가 X)

X $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\ne\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k$

↳ 나눗셈도 성립 X

$\sum_{k=1}^{n}a_k^2\ne\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$

2. 자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

3. Σ와 수열의 합

cf.) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=pn^2+qn$ 꼴 → 등차수열 … 상수 유무로 판단

$S'_n=\sum_{k=1}^{n}a'_k=pr^n+q$ 꼴 → 등비수열 … $p+q=0$ 성립유무로 판단

- 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$ 이라 하면

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1$

(ii) $n\ge2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

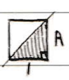
4. 차 또는 분수의 꼴인 수열의 합 + 그 외 특수한 수열

(1) 부분분수 이용 … $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

(2) 분모를 유리화함 … $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

(3) 군수열

* "1"과 관련된 idea _ 숨은 1 찾기

$A=A\times1$ … 곱의 형태는 넓이 cf.) $\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\times A\times1$  … 직각△ 넓이

$=\frac{A}{1}$ … 분수식(율)의 형태는 기울기

$=\frac{A-0}{1-0}$ … 마찬가지로 (0,0) (1,A)의 기울기

→ 자주 활용되는 유트) $\overset{5+}{\vee}7+9+11+13+15=8^2-3^2=(8+3)(8-3)=11\times5$ … 규칙찾기에 활용

* 홀수의 Σ : 연속된 홀수들의 합 = 거듭제곱

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. 몇번째 홀수인지 구하면 된다!

↳ $(2m-1)+(2m-3)+\cdots+(2n-1)=n^2-m^2$

⇝ 거꾸로도 쓸 수 있어야 한다. 예) $5^2=1+3+5+7+9$

⇝ 이웃한 제곱수의 차는 홀수 → $n^2-(n-1)^2=2n-1$

⇝ 정사각형의 합으로 이해할 수도 있다(뉴런 pg.58)

* 항의 개수가 같은데 Σ 시작≠끝인 두 식이 있다면 평행이동을 이용하자.

* 이차방정식 ⇒ 1st. 인수분해 (역방향도 포함) → 2nd. 근과 계수의 관계 …

* $\sum_{k=1}^{n}$(k에 대한 일차식) : 시그마 기본 성질, 자연수의 거듭제곱 합 공식 / 등차수열의 합 공식 (cf.) 등비수열 일반항이 나오면 등비수열의 합 공식)

* $\sum_{k=1}^{n}$ 에서 $k=1$인 경우 → k. k^2. k^3 모두 just 계산 (개수 적으면 대입도 O)

$\sum_{k=1}^{n}$ 에서 $k\ne1$인 경우 → ① 수열의 합과 일반항의 관계 : $\sum_{k=4}^{10}=\sum_{k=1}^{10}-\sum_{k=1}^{3}$ ③ 주의!

② 일반항 변형(평행이동) : $\sum_{k=4}^{10}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{7}\{(k+3)^2+(k+3)\}$

* $\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=2}^{n}k+\sum_{k=3}^{n}k+\cdots+\sum_{k=n}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}k^2$

* $f(x)=(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$

$x=1$ | $2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$x=2$ | $3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$x=3$ | $4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$

⋮

$x=n$ + | $(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

$(n+1)^3-1^3=3\cdot(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3\cdot(1+2+3+\cdots+n)+n$

$n^3+3n^2+3n=3\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$

$2n^3+6n^2+6n=6\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2+3n(n+1)+2n$ → $3n^2+5n$

$6\sum_{k=1}^{n}k^2=2n^3+3n^2+n=n(n+1)(2n+1)$

$\therefore\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

* □의 배수인 것의 개수를 구하시오. ⇔ 나머지를 관찰하여 구할 수 있다.

이때 나머지는 형태에 따라 변형해도 상관X

* 부분분수 : $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\times\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A<B$)

* 분수 꼴의 합 : $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{C}{AB}=\sum_{k=1}^{n}\boxed{(-1)^k}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)$

OR $\sum_{k=1}^{n}\frac{C}{AB}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ — Σ(앞-뒤)와 $\Sigma(-1)^k$(앞+뒤).

예) $\sum_{k=1}^{10}\frac{2k+1 \text{ (차)}}{k^2(k+1)^2 \text{ (곱)}}$ (같은수열) $=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$

1칸이동 1칸이동

* 교대급수의 기본적인 태도 : 1st 뺄셈식 2nd 같은 식으로 이루어져 있는지 확인

cf.) 분수꼴의 합은 갈 길이 딱 정해져 있다. 바로 교대급수!

Ⅲ. 수열 _ 수학적 귀납법

1. 수열의 귀납적 정의

: 수열 $\{a_n\}$을 ① 첫째항 a_1의 값 ② 이웃하는 두 항 a_n, a_{n+1} 사이의 관계식 → 점화식

로 정의하는 것을 의미함.

2. 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때

(1) 등차수열

① $a_{n+1}-a_n=d$ (일정)

② $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

③ $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

(2) 등비수열

① $a_{n+1}\div a_n=r$ (일정)

② $a_{n+1}^2=a_n \cdot a_{n+2}$

③ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$

cf.) $\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}}$ 또는 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_{n+2}}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$ ⇒ 조화수열

3. 여러가지 수열의 귀납적 정의

(1) $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴 → 상수 ⇒ 등차. ~~상수~~ ⇒ 계차

$$\begin{aligned}\cancel{a_2}&=a_1+f(1)\\ \cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+f(2)\\ \cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+f(3)\\ &\vdots\\ +)\ a_n&=\cancel{a_{n-1}}+f(n-1)\\ \hline a_n&=a_1+\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)\}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\end{aligned}$$

n 대신에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 대입한 후 변끼리 더한다.

(2) $a_{n+1}=a_n \cdot f(n)$ 꼴

$$\begin{aligned}\cancel{a_2}&=a_1\cdot f(1)\\ \cancel{a_3}&=\cancel{a_2}\cdot f(2)\\ \cancel{a_4}&=\cancel{a_3}\cdot f(3)\\ &\vdots\\ \times)\ a_n&=\cancel{a_{n-1}}\cdot f(n-1)\\ \hline a_n&=a_1\times f(1)\times f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(n-1)\end{aligned}$$

n 대신에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 대입한 후 변끼리 곱한다.

(3) $a_{n+1}=p\cdot a_n+q$ $(pq\neq0,\ p\neq1)$ 꼴의 점화식

→ $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$

⇒ 수열 $\{a_n-\alpha\}$가 첫째항: $a_1-\alpha$, 공비가 p인 등비수열이다.

4. 수학적 귀납법 (=도미노 이론). 간접증명법: ① 귀류법 ② 대우 이용 ③ 귀납법

결론부정 ↓ (귀류법)
역의부정. $p\to q$. $\sim q\to\sim p$ ↓ (대우 이용)

자연수 n에 대한 식 또는 명제 $p(n)$이 임의의 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하기 위해서는 (i), (ii)를 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 성립한다.

---

* 낯선 수열을 대하는 올바른 자세

① 해보시고 → 쓰세요. "규칙과 패턴에 집중"

② 계산구조 최대한 남기기 : a_2는 a_1을 이용해서. a_3는 a_2를 이용해서 표현

③ $\boxed{\text{특이항 주의 ★★}}$ Ⓔ : a_1. a_2. a_3 까지는 특이항 가능성 ⇑ (+따로 주어진 경우)

④ 반복 → 점화관계 작성 ⇒ 정방향 or 역추적 <앞뒤 자유롭게 생각해보기>

예) $a_{n+1}=pa_n+q \to a_n=\dfrac{a_{n+1}-q}{p}$로 역추적해도 성립

* 분수꼴인 수열의 점화식 → 모두 양수일 경우, 부등식 역수 취할수 o (순서바뀜)

* 점화식은 크게 두 가지 유형이 있다 → ① 완전 낯선 형태
→ ② 특정 우연가가 반복되는 형태

* 최소.최대 문제 ⇒ 문제 만족하는 값이 적어도 두개. 더 작은/큰 수 없는지 검토!!

→ 미출제

* 합에 대해 물어볼 땐 합에 규칙이 있는지 생각해야 한다. (뉴런 문제 22번)

즉, 문제에서 구해야 하는 것들끼리 규칙이 있을 수 있다는 가능성을 잊지 말자

* 여러 함수가 곱해진 수열의 주기는 최소공배수 의심 first! (뉴런 문제 23번)

* $(-1)^n$ ⇔ $\frac{n}{2}$처럼 짝·홀 나눠서 관찰 (주기 2)

* 기울기가 -1인 직선 ⇔ 좌표 합 일정 ($Y=-X+a$. $X+Y=a$)

* A^2-B^2 ⇔ ① 합차공식 ② 홀수들의 합

* 수열의 귀납적 정의 + 좌표평면 → ① 첫번째와 같은 점이 생김 = 주기 발생
→ ② 어떤 기하적 기준으로 묶음을 만들어 대응

* 유한개의 예를 사용하여 일반적인 성질을 증명할 수는 없지만 수학적 귀납법은 유한개의 예로부터 발전시켜 무한 개에 대하여 성립하는 일반적 성질을 증명할수 o

* 자연수와 관계없는 증명에서는 사용할 수 X

* if 명제 $p(n)$의 성립조건이 $n\geq m$ (자연수)라면, (i)조건은 $n=m$이다.

Ⅰ. 지수함수와 로그함수 _ 지수

유형 01 거듭제곱근 정의

a^2의 제곱근은 $x^2=a^2$의 근이므로 $\pm a$

(중학교 복습) ① 실수 a의 n제곱근 : 방정식 $x^n=a$의 근 ··· n개

② n제곱근 a : $\sqrt[n]{a}$ --- 1개 → n제곱하여 a가 되는 수

1. 거듭제곱근의 뜻

$x^n=a$ (a는 실수, n은 2 이상의 자연수)

x는 a의 n 제곱근 $\Leftrightarrow$ n 제곱하여 a가 되는 수

① 실수인 n 제곱근

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$ 2개	0 1개	없다. 0개
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$ 1개	0 1개	$\sqrt[n]{a}$ 1개

↳ 모든 실수 x에 대해 $\sqrt[3]{f(x)}$가 음의 실수가 되도록 함

$\Leftrightarrow$ $f(x)\le 0$ (최고차항의 계수로 case 나누기)

↳ 모든 실수 x에 대해 $\sqrt[4]{f(x)}$가 실수가 되도록 함

$\Leftrightarrow$ $f(x)\ge 0$ (음의 실수는 존재하지 X)

cf.) 자주 틀리는 함정들

$$\begin{cases} (\sqrt[n]{x})^n = x \\ \sqrt[n]{a^n} \begin{cases} n\text{이 짝수} : |a| \\ n\text{이 홀수} : a \end{cases} \end{cases}$$

※ 음의 실수가 존재하도록 하는 $\sqrt[n]{f(x)}$ $\Leftrightarrow$ n이 짝수일때 : $f(x)>0$ & n이 홀수일때 : $f(x)<0$ > Ⓔ

유형 02 거듭제곱근과 지수의 계산

1. 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$ 이고 m, n이 2이상의 자연수일 때

① $(\sqrt[n]{a})^n = a$

② $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

④ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

⑥ $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ (p는 자연수)

* 양수조건이 없는 경우 성립하지 않음. 예) $\sqrt[3]{(-4)^2} \neq \sqrt[3]{(-4)}^2$

* n이 홀수이고 $a<0$이면 $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$

* 복잡한 거듭제곱근의 계산 → 잘라서 계산!

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} = \sqrt[8]{a}$

$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$

☆ $\sqrt{a\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}$

예) 29번 계산식

2. 지수의 확장

① $a \neq 0$ 이고 n이 자연수일 때

$a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

② $a>0$이고 m은 정수, n은 2이상의 자연수

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

3. 지수법칙

$a>0$, $b>0$ 이고 m, n이 실수일 때

① $a^m a^n = a^{m+n}$

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

③ $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$ ⇒ 지수의 변형

④ $(ab)^n = a^n b^n$

⑤ $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$

* 지수가 정수일 때 → 밑이 음수여도 성립 ○ (단, 밑≠0)

지수가 유리수. 실수일 때 → 밑이 양수일때만 성립 ○

잘못된 예) $\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = (-3)^{2\times\frac{1}{2}} = -3$

올바른 예) $\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$

* 양수 a에 대하여

$$\frac{1}{a^{-10}+1} + \frac{1}{a^{-9}+1} + \frac{1}{a^{-8}+1} + \cdots + \frac{1}{a^{-1}+1} + \frac{1}{a^{0}+1}$$

$$+ \frac{1}{a^{1}+1} + \cdots + \frac{1}{a^{9}+1} + \frac{1}{a^{10}+1}$$

$○+○ = \dfrac{\cancel{a^{10}+1+a^{-10}+1}}{\cancel{1+a^{10}+a^{-10}+1}} = 1$

$\Delta+\Delta = 1$

⋮

$\dfrac{1}{a^0+1} = \dfrac{1}{2}$

$1\times 10 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{21}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^{x}+1} + \frac{1}{a^{-x}+1} = 1$$

* 밑이 같고 지수가 다른 수의 합은 가장 작은 수로 묶어서 계산!

* $f(n) = \dfrac{4^{\frac{n}{99}}}{4^{\frac{n}{99}}+2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{4^{\frac{n}{99}}}} = \dfrac{1}{1+2^{\frac{99-2n}{99}}}$

합이 1

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(98) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{97}{99}}} + \cdots + \dfrac{1}{1+2^{-\frac{97}{99}}}$

∘ 문제에 있는 조건을 최대한 문자화한다.

예) $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 $\underbrace{\text{어떤 자연수}}_{=x}$의 n제곱근이 되도록 하는 n 구하기

→ $\{(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}\}^n = x$, $x^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{5}{6}}$, $x = 3^{\frac{5n}{6}}$ ⇒ n은 6의 배수.

∘ $\sqrt{x}\sqrt[3]{y^4} > 1$ 의 참·거짓 판별 ($x^2y^3 = 1$. $0<y<1<x$)

양쪽에 제곱해도 양수라서 부등호 불변 ⇒ 12제곱.

$(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{4}{3}})^{12} = x^6 \cdot y^{16} = (x^2y^3)^3 \cdot y^7 < 1$ (거짓).

∘

A	B
C	D

→ $AD = BC$. $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$. $A:B = C:D$

∘ 거듭제곱근의 대소비교문제 = 한 가지 기준으로 통일하기!

① 밑/지수 하나로 통일 → ② 차/비의 부호 판단

(일반적으로 지수는 비를 이용하여 비교한다.)

∘ $2^{p-6}5^{q-2}$가 40의 배수가 되게 하는 $p.q$의 최솟값 구하기

: $40 = 2^3\times5$ 이므로 배수는 지수이상의 수를 가지면 된다.

즉, $p-6\geq3 \to p\geq9$, $q-2\geq1 \to q\geq3$

* 지수가 자연수 : 밑 상관없이 모든 지수법칙 적용가능

but 지수가 유리수·실수 : 밑>0 일때만 지수법칙 적용가능

* 지수법칙 이용 when? ① 밑통일 ② 지수통일

* 거듭제곱의 대소 비교

일반 $A-B \gtreqless 0$ … 차 이용

특수 (A.B 양수일때) $\dfrac{B}{A} \gtreqless 1$ … 곱 이용

cf.) 밑이 모두 1보다 큰 지수부등식은 식 조작해도 대소관계 변화X

* 지수끼리의 합 ⇝ 수끼리의 곱 ⟺ 로그 덧셈식 ⇝ 진수들의 곱

예) $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ ⇝ $k^{\frac{1}{c}} = k^{\frac{1}{a}} \cdot k^{\frac{1}{b}}$

유형 04 지수법칙과 곱셈공식

$a^x + a^{-x} = p$, $a^x - a^{-x} = q$ 라 하면

① $a^{2x}+a^{-2x} = p^2-2 = q^2+2$

② $a^{3x}+a^{-3x} = p^3-3p$

③ $a^{3x}-a^{3x} = q^3+3q$

부호가 반대!

④ $a^{2x}-a^{-2x} = pq$

예) $5^{2x}-5^{x+1} = -1$ 일때, $\dfrac{5^{3x}+5^{-3x}-5}{5^{2x}+5^{-2x}-2}$ 의 값은?

5^x로 양변을 나누면 $5^x - 5 = -5^{-x}$, 즉 $5^x+5^{-x}=5$

$5^{2x}+5^{-2x} = 25-2 = 23$

$5^{3x}+5^{-3x} = 125-15 = 110$

$\rightarrow \dfrac{105}{21} = 5$ $\therefore 5$

* 분수꼴 ($2^{\frac{2}{3}x}-2^{-\frac{2}{3}x}$ 등)은 x의 계수가 정수인 식을 기준으로 함!

예) 51번, 52번

* $x+\sqrt{x^2\pm1}$ 의 꼴의 경우, x의 값을 대입하여 ±1을 하면 완전제곱식으로 만들 수 있다. (단, 제곱근 안의 값의 부호를 판단할 것!)

예) 57번, 58번

유형 06 지수법칙의 활용

① 조건 $a^x=b^y=c^z$ 이 주어지면 주어진 식의 값을 k로 놓고 a, b, c를 k에 대한 식으로 나타낸다. ~ log를 이용해서 해결하는 것이 더 간단함!

$a^x=b^y=c^z=k \iff a=k^{\frac{1}{x}}, b=k^{\frac{1}{y}}, c=k^{\frac{1}{z}}$

※ 문제에 따라 식주가 더 간단할수도.

② 조건 $a^x=b^y$ 이 주어지면 지수법칙 $(a^m)^n=a^{mn}$을 이용하여 양변을 적절히 변형한다.

$a^x=b^y \Rightarrow a=b^{\frac{y}{x}}, b=a^{\frac{x}{y}}, a^{\frac{1}{y}}=b^{\frac{1}{x}}$

③ $a^x=p$, $a^y=q$에서 $x\pm y$의 값을 구하려면 주어진 두 식을 곱하거나 나눈다.

$a^{x+y}=a^x\times a^y=pq$, $a^{x-y}=a^x\div a^y=\dfrac{p}{q}$

○ 식이 대칭일때는 그 대칭인 부분들을 치환하여 접근해보자!

$\dfrac{2^x}{1+2^{x-y}}+\dfrac{2^y}{1+2^{-x+y}}=\dfrac{1}{2}$ 에서 $2^{-x}+2^{-y}$의 값 구하기

$\Rightarrow 2^x=A, 2^y=B$ 치환 $\rightarrow \dfrac{A}{1+\frac{A}{B}}+\dfrac{B}{1+\frac{B}{A}}=\dfrac{1}{2}$

I. 지수함수와 로그함수 _ 로그

유형 01 로그의 정의

1. 로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$ 일 때, 임의의 양수 N에 대해

$a^{x}=b$ (밑 a, 지수 x) $\Longleftrightarrow$ $x=\log_{a}b$ (밑 a, 진수 b) → (우리수) a를 밑으로 하는 N의 로그

① 밑과 진수의 조건 : 밑>0. 밑$\neq1$. 진수>0

예) $\log_{|a-1|}(x^2+ax+a)$ 가 정의되도록 하는 a의 범위 → 실수범위의 수.

진수조건 → $x^2+ax+a>0$

밑조건 → $|a-1|\neq1$ → $a\neq0$ 또는 $a\neq2$

$|a-1|>0$ → $a\neq1$

* 부등식 풀이 (이차부등식)

i) 모든 x에 대해 $f(x)=ax^2+bx+c\geq0$ 성립 ↶ if $a=b=0$ 이면 $c\geq0$

① $a>0$ → $f(x)$

② $D\leq0$

* 최고차항은 상황에 따라 등호가 성립할 수도 있음! 예) 104번

ii) 모든 x에 대해 $f(x)=ax^2+bx+c\leq0$ 성립

① $a<0$ → $f(x)$

② $D\leq0$

∘ 밑과 진수의 조건 주의!! 완전제곱식은 정의 X, 절댓값도 확인 필요.

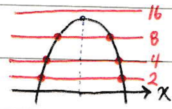
· $\log_{2|a|+1}(a^2+a+1)$ → $2|a|+1>0$. $a=0$ → $2|a|+1=1$ 이므로 X

· $\log_{a^2+2}(a^2-2a+1)$ → $(a-1)^2>0$. $a=1$ → $(a-1)^2=0$ 이므로 X

∘ 진수조건이 이차식일 경우, 이차함수를 이용한다.

예) $\log_2(-2x^2+ax+3)$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 x개 6개.

→ $-2x^2+ax+3=f(x)$ 라 하면 $\frac{a^2}{8}+3$ 이 꼭짓점의 y좌표이므로



$8<\frac{a^2}{8}+3<16$ 을 만족하는 a값을 가지면 위의 조건을 만족한다.

∘ $\log_x n$ 이 자연수 $\Longleftrightarrow$ n은 x의 거듭제곱

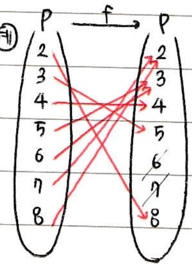
∘ 일대일함수와 일대일 대응

일대일함수 → $x_1\neq x_2$ → $f(x_1)\neq f(x_2)$

일대일대응 → 일대일함수 + "공역 = 치역"

∴ 일대일대응일 조건 : 원소개수 동일, 겹치지 않게!

예)



① $f(2)=8$, $f(8)=2$ 이므로 $(2,8)$ 포함

② $f(3)=5$, $f(5)=3$ 이므로 $(3,5)$ 포함

③ $f(4)=4$ 이므로 (4) 포함.

④ 세 묶음 $(2,8)$ $(3,5)$ (4) 을 원소로 가지는 집합 개수 $=2^3-1=7$개

* 로그의 밑의 변환 공식 : 로그의 밑을 자유롭게 변환할 수 있다. (역수 취한 뒤 적용해도 상관X)

- 로그 관점

① 새로운 밑으로 바꿀때 : $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

② 밑 ↔ 진수이면 역수관계 : $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

③ 지수 내보내기 : $\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$

- 지수관점

① 양 끝 수는 바꿀수 O : $\boxed{a}^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

② 밑이 같으면 지울 수 O : $a^{\log_a b}=b$

↳ 거듭제곱식에서 주로 유용하게 쓰임

https://orbi.kr/profile/1011525

유형 02 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, $c>0$, $M>0$, $N>0$ 일때,

① $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

② $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

④ $\log_a M^k = k\log_a M$ (k는 상수)

⑤ $\log_{a^m} M^n = \frac{n}{m}\log_a M$ (단, m. n은 실수, $m\neq0$)

* ⑥ $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$　⑦ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

⑧ $a^{\log_a M} = M$, $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

⑨ $\log_a b \times \log_b a = 1$　⑩ $\log_a b = \log_{a^n} b^n$

* 밑과 진수끼리는 위치 변경 가능!

예 $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$

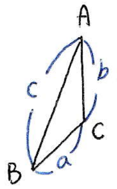
* 문제에서 $\log_a b = \log_b a \iff a=b$ or $a=b^{-1}$

* log의 곱과 합이 나오면 곱은 분모, 합은 분자에 쓰도록 한다. 예 145번

* 주의! $(\log_a x)^n \neq n(\log_a x)$

* 분수꼴의 로그식 중 밑이 같은 경우는 밑변환 의심할 것! 예 111-(2)번

* 삼각형의 활용



① $c < a+b$

② $c^2 > a^2+b^2$ 둔각△

$c^2 = a^2+b^2$ 직각△

$c^2 < a^2+b^2$ 예각△

③ $(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

$a=b$인 이등변삼각형 or 빗변이 c인 직각삼각형

$(a-b)(b-c)(c-a)=0$ 이등변 삼각형 ($a=b$ / $b=c$ / $c=a$)

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ 정삼각형

$(a-b)^2+(c^2-a^2-b^2)=0$ $a=b$인 직각이등변삼각형

- 삼각형 판정문제에서 어떻게 시작해야할지 모르겠다면 치환을 이용한다.

$\overset{A}{\log_{(a+b)} C} + \overset{B}{\log_{(a-b)} C} = \overset{=2AB}{2\log_{(a+b)} C \times \log_{(a-b)} C}$

- $\frac{A+B}{AB} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$ … 이때 로그에서는 밑변환을 쓸 수 있다.

- 지수를 통째로 치환하는 방법도 있다.

예 $a=9^k$, $b=15^k$, $a-b=25^k$ 일때 $3^k=A$, $5^k=B$ 라 하면

$a=A^2$, $b=AB$, $a-b=B^2$ 으로 치환할 수 있다.

- □의 최솟·최댓값을 구할 때 쓰는 방법 3가지

1> 이차함수의 꼴로 변형하여 풀어본다. → 꼭짓점의 y좌표 이용

2> 산술·기하 평균을 이용한다. $a+b\geq2\sqrt{ab}$ ($a=b$ 일때 등호성립)

3> 부정방정식을 이용한다. 예 $a+b+ab=(a+1)(b+1)=1$

→ a.b는 숫자를 대입하여 구하고 최대·최소 구하기

* $\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{3}$ 에서 밑 통일

$\log_a b = \frac{\log_a c}{2\log_a b} = \frac{1}{3\log_a c}$ ⓔ

유형 04 로그의 정수부분과 소수부분

$A>0, B>0$ 일때,

① $\log A$ 의 정수부분이 n이다.

$\Leftrightarrow \log A = \boxed{n} + \boxed{\alpha}$ (단, $0 \leq \alpha < 1$)

$\Leftrightarrow n \leq \log A < n+1$ — n = 정수부분 (자릿수), α = 소수부분 (숫자배열)

$\Leftrightarrow [\log A] = n$

$\Leftrightarrow A = a \times 10^n$ (단, $1 \leq a < 10$)

$\Leftrightarrow 10^n \leq A < 10^{n+1}$

② $\log A$ 와 $\log B$ 의 소수부분이 같다.

$\Leftrightarrow \log A - \log B =$ (정수) ---→ 0일수도 있음

$\Leftrightarrow \log A - [\log A] = \log B - [\log B]$

$\Leftrightarrow \dfrac{A}{B} = 10^m$ (단, m은 정수)

$\Leftrightarrow$ A와 B의 숫자배열이 같다.

③ $\log A$ 와 $\log B$ 의 소수부분의 합이 1이다.

$\Leftrightarrow \log A \neq$ (정수), $\log B \neq$ (정수) $\Leftrightarrow$ 소수부분 $\neq 0$

* $\log_5 2 = \dfrac{b_1}{2} + \dfrac{b_2}{2^2} + \dfrac{b_3}{2^3} + \cdots$ 의 경우, 양변에 2를 곱해서 정수부분을 각각 b_1, b_2 라고 해서 푼다.

* $\log x > 0$ 일때,

$\log x = n + \alpha$

$-\log x = -n - \alpha$

$= (-n-1) + (1-\alpha)$

* 이차방정식 / 삼차방정식 / … 의 근과 계수의 관계는 $- \to + \to -$ 순임!

예 138번

유형 06 상용로그

임의의 양수 N에 대해 10을 밑으로 하는 로그 = 상용로그

$\log_{10} N$ 에서 10 생략 → $\log N$

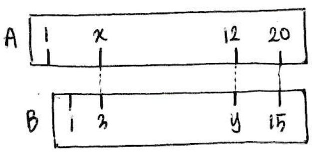
$\log N = n + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$, n은 정수)

- 정수부분이 n 자리 수의 상용로그의 정수부분은 $n-1$이다.
- 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 수의 상용로그의 정수부분은 $-n$이다.

예 $\log 30 = 1.4771$ 정수부분 : 1 → 두자리 수

$\log 0.03 = -1.5229$ 정수부분 : -2 → 두번째 자리부터 0이 아닌 숫자

* 로그자 푸는법 (예 144번)



$\log 20 - \log x = \log 15 - \log 3$

$\log \dfrac{20}{x} = \log 5$

$\dfrac{20}{x} = 5$, $5x = 20$, $x = 4$

* 가우스 기호 안에 있는 정수는 밖으로 내보낼 수 있다.

예 $[\log_3 \frac{x}{3}] = [\log_3 x - 1] = [\log_3 x] - 1$ (예 155번)

○ $20 < n < m < 300$ 인 두 자연수 m, n에 대하여

$\log m - \log n = [\log m] - [\log n]$ 을 만족시키는 (m, n)은?

↳ ① $\log m - [\log m] = \log n - [\log n]$ … 소수부분이 같아야 함.

② $\log m - \log n = N$(정수) $\Rightarrow \dfrac{m}{n} = 10^k$, $m = n \times 10^k$

③ 주어진 조건에서 m과 n은 두자리 or 세자리이므로 $k=1 \Rightarrow m = 10n$

→ (210, 21), (220, 22) … (290, 29) 총 9개.

OR $m \neq n$ 이므로 $[\log m] = 2$, $[\log n] = 1$ 이고

$\log m - \log n = [\log m] - [\log n] = 1$

$\log m = 1 + \log n$ 이므로 $m = 10 \times n$

○ $\log_a N = n + \alpha$ 일때, $n - \alpha$ 의 최솟값 $h(a)$는? (N은 자연수)

↳ $n-\alpha$가 최소려면 n은 최소, α는 최대 → $n=0$, $n - \alpha = -\log_a N$

$h(a) = -\log_a N$ 에서 N은 자연수이고 $h(a)$는 최솟값이므로 N은 최대.

$\therefore h(a) = -\log_a (a-1)$

○ 양수 x에 대하여 $f(x) = \log x - [\log x]$, $\log a = 2f(a) + f(2a)$

$\Rightarrow \log x = f(x) + [\log x]$ … $f(x)$는 소수부분 ($0 \leq f(a) < 1$)

즉, $\log a - f(a) = 2f(a) + f(2a) - f(a)$

$[\log a] = f(a) + f(2a)$ … $\log a$와 $\log 2a$의 소수부분의 합이 $\log a$의 정수부분과 같다.

* $\log A = n + \boxed{\alpha}$ ($0 \leq \alpha < 1$)

$n \geq 0$: A는 $(n+1)$자리 → 상용로그표.

$n < 0$: A는 소수 $|n|$번째 자리에서 최초로 0이 아닌 수 등장.

* 양수조건 적극 활용!! 분자. 분모 제곱해도 OK 곱하거나 나눠도 OK

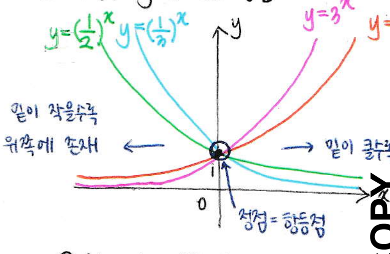
Ⅰ. 지수함수와 로그함수 _ 지수함수. 지수방·부등식

유형 01 지수함수와 그래프 성질

↳ 일대일 대응 … x_1, x_2에 대해
$x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ or
$f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

$y = a^x$ $(a>0, a\neq 1)$

1. 지수함수 $y=a^x$ 의 성질



① 정의역 : 모든 실수, 치역 : 모든 양의 실수 $f(x)=0$ 인 x 존재 X

② $a>1$ 일 때 $x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ … 증가함수 ($a^{x_1} > a^{x_2}$)

$0<a<1$ 일 때 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ … 감소함수

③ 그래프는 $(0, 1)$ 지남 (정점), 점근선은 x축 $(y=0)$

* 역함수는 $\log_a x$ → $y=x$ 대칭

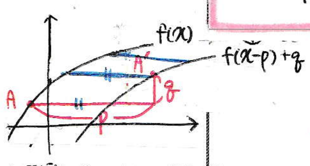
2. 지수함수 $y=a^x$의 평행이동 ---▸ 예) 169번 ㄷ

x축으로 p만큼, y축으로 q만큼 → $y = a^{x-p}+q$

① 정의역 불변, 치역: $y>q$ 인 실수

② 증가. 감소함수 기준 불변

③ 그래프는 $(p, q+1)$ 지남 (정점), 점근선은 $y=q$
지수가 0되는 값 ↘ 점근선+1



▲ 평행이동시 길이는 항상 같다.

3. 지수함수의 표현 ★★★

① $f(x+y) = f(x)f(y)$

② $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$

③ $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

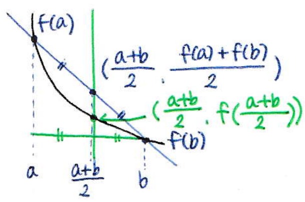
④ $f(nx) = \{f(x)\}^n$

⑤ $f(\frac{1}{n}\cdot x) = \sqrt[n]{f(x)}$ $g(a) = \sqrt{g(2a)}$

⑥ $f(\frac{x+y}{2}) < \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$

↳ cf.) 위로 볼록한 그래프 … $f(\frac{x+y}{2}) > \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$

* ⑥번 설명



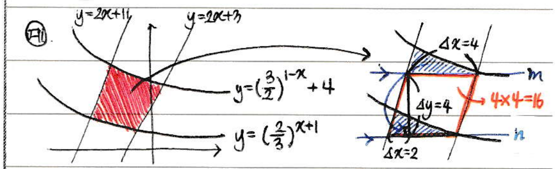
$f(\frac{a+b}{2}) < \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

⇔ 아래로 볼록한 그래프

∘ $(\frac{1}{3}) < (\frac{1}{3})^a < (\frac{1}{3})^b < 1 \Leftrightarrow 0<\frac{1}{3}<1$ 이므로 $1>a>b>0$

∘ 지수함수의 평행이동 문제 해결방법: 평행사변형을 만든다.

예)



∘ $f(x)=a^x (a>1)$ 에 대하여 $f(x)+f(-x)\geq 2$ (O)

∵ $f(x)+f(-x) = a^x + a^{-x} \geq 2\sqrt{a^x \cdot a^{-x}} = 2$ ($x=0$일 때 등호성립)

∘ 〃 $f(|x|) \geq \frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$ (O)

∵ $f(|x|) = a^{|x|} \geq \frac{1}{2}\times 2 = 1$. 즉, $|x|\geq 0$ … 항상 성립

∘ $t\geq 1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{PQ} \leq 10$ 이다. … $\overline{PQ}$의 최솟값 ≤ 10

* 지수함수와 로그함수의 그래프 위의 좌표가 정수인 점

지수함수 $y=a^x$: x좌표 기준으로 파악
로그함수 $y=\log_a x$: y좌표 기준으로 파악

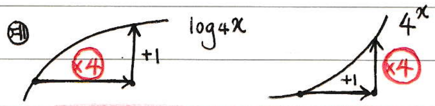
* $a^{(등차)} = (등비)$ // $\log_a(등비) = (등차)$

* 함수 ┌ ① 좌표관점: $(a, b) \Rightarrow f(a)=b$ & x, y축에 수선의 발
└ ② 그래프 특징 (주로 로그함수) 〈y축 평행이동〉

∴ 두점 → y좌표 $+1$, x좌표 $\times$(밑)
세점 → y좌표 등차, x좌표 등비

* 지수함수. 로그함수의 특징을 이용한 계산 (뉴런 02문제)

예)



* 거리. 길이는 절댓값 → 함숫값의 차 ~ 길이의 경우, 함수의 대소관계에 따라 부호가 바뀔 수 있음에 주의!!

유형 03 지수함수의 그래프의 활용

1. 지수함수를 이용한 대소관계

sol 1> 비를 이용한다 (=나눈다)

㉮ 두 수 A.B에 대하여 (A>0. B>0)

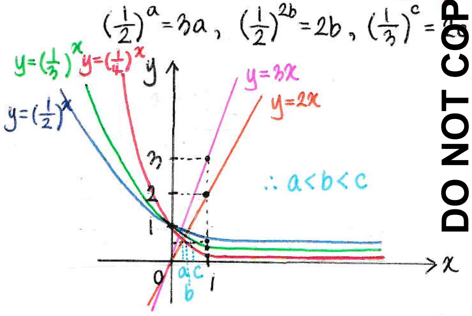
$\frac{A}{B}>1$ ··· $A>B$, $\frac{A}{B}=1$ ··· $A=B$, $\frac{A}{B}<1$ ··· $A<B$

sol 2> 그래프 이용한다 (밑이 다를 경우 사용)

㉮ 오답노트 영덕여고 13번

$\left(\frac{1}{2}\right)^a=3a$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2b}=2b$, $\left(\frac{1}{3}\right)^c=$ ...

등식으로 풀리지 않으면 두 함수의 교점이라고 생각하기!



$\therefore a<b<c$

유형 04 지수함수의 최대,최소

☆ 범위에 유의할 것! ☆ + 그래프 개형 반드시 그려서 확인!

① $a^x=t$로 치환하면 $a^{2x}=t^2$, $a^{-x}=\frac{1}{t}$ 이고 $t>0$ 이다.

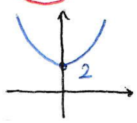
② $a^x+a^{-x}=t$로 치환하면 $a^x>0$, $a^{-x}>0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^x+a^{-x}\geq 2$ (단, 등호는 $x=0$ 일때 성립)

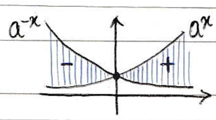
이므로 $t\geq 2$ 이다.

우함수

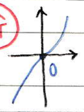


③ $a^x-a^{-x}=t$로 치환하면

t는 모든 실수 이다.



기함수

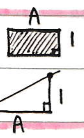


* 지수·로그함수의 해석 : 크고 정확하게 그리기. 특히 (0.1) 부분 크게!!

* 비교는 공통된 상황에서 하기 ☆☆

* 곱 ⇔ 몫 ⇔ 기울기 ⟺ $\frac{y\text{값}}{x\text{값}}$

* $|x\text{값}\times y\text{값}|$ = 넓이 ㉮ $|A|$ $\left[\begin{array}{l} A\times 1 \\ \frac{A}{1} \end{array}\right.$



○ x좌표의 비가 1:2이다 ⇒ 한점을 a라 놓고 다른 한점을 $2a$

○ 범위를 나눠서 푸는 문제가 나올때 구한 답이 범위를 만족하는지 꼭 확인하고, 천천히 풀자!

○ 지수함수의 최대. 최소 문제에서 밑의 조건이 없다면 무조건 (밑)>1 과 0<(밑)<1 으로 나눠서 풀것!

○ 이차방정식의 근의 분리 ☆☆☆

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$ 의 판별식을 $D=b^2-4ac$ 라 하고

$f(x)=ax^2+bx+c$ 라 하면

(1) 두 근이 모두 p보다 크다. ⇔ $D\geq 0$. $f(p)>0$. $-\frac{b}{2a}>p$

(2) 두 근이 모두 p보다 작다. ⇔ $D\geq 0$. $f(p)>0$. $-\frac{b}{2a}<p$

(3) 두 근 사이에 p가 있다. ⇔ $f(p)<0$

○ $3^x\geq\frac{9k-6}{3k-1}$ 이 $x<1$에 대하여 항상 성립하려면 $\frac{9k-6}{3k-1}\leq 0$

* 지수·로그 함수 익숙하지 X 형태 : ① 지수법칙 ② 로그계산 ③ 밑변환

⇒ 어떤 대칭이동인지 파악하기

* 지수함수의 그래프의 합동 : 밑 & x 계수의 절댓값 ㊂

㉮ $y=\boxed{2^2}^{x-1}+2$ 밑 4. $\frac{1}{4}$과 관련 O

* 지수·로그 함수의 이동

닮음이동은 좌표 비율관계 설정으로 start!

① 닮음이동 (드리블 P1) : x or y 대신 $2x$ or $2y$ ⇒ x축 $\frac{1}{2}$배 or y축 $\frac{1}{2}$배

② 평행이동 → x축. y축) $y=a^{x-m}+n$. $y=\log_a(x-m)+n$

$y=\boxed{k}\cdot a^x$ ⇔ $y=a^{x+\boxed{\log_a k}}$ / $y=\log_a(kx)$ ⇔ $y=\log_a x+\log_a k$

1) 기하적 의미는 직각 △

2) 기울기 일정 3) 거리 일정

③ 선대칭 1) 수직이등분선 2) 합 일정 ∽ 이등변 △

④ 점대칭 1) 180° 회전 2) 점대칭의 중점 ⇒ 선분의 중점

cf.) 원 위의 한 점 P → 원의 중심과 잇기

→ 지름을 한 변으로 하기 (∵ 직각 △ 만들기)

정점 2개에 대한 수직, 한개는 동점 ⇔ 동점의 자취 = 원

유형 01 지수방정식

1. 항이 2개인 경우

① 밑을 같게 할 수 있을 때 → 지수를 비교하거나 밑이 1로 만드는 값을 구한다.

즉, $a^{f(x)} = a^{g(x)} \rightarrow f(x) = g(x)$ 또는 $a=1$

② 밑을 같게 할 수 없을 때 → 양변에 로그를 취하여 푼다.

즉, $a^{f(x)} = b^{g(x)} \rightarrow f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$

③ 지수가 같을 때 → 밑을 비교하거나 지수를 0으로 만드는 값을 찾는다.

즉, $a^{f(x)} = b^{f(x)} \rightarrow a=b$ 또는 $f(x)=0$

2. 항이 3개인 경우

$a^x, a^{2x}, \cdots$ 의 항이 있을 때 → $a^x = t\ (t>0)$로 치환하여 푼다.

* 밑이 미지수를 포함한 식으로 같은 경우

예) $(x-1)^{2x+3} = (x-1)^{x^2}\ (x>1)$

① 밑이 1인 경우 → $x-1=1.\ x=2$

② 밑이 1이 아니고 지수가 같은 경우 → $x^2-2x-3=0.\ x=3$

③ 밑이 -1인 경우 (이 문제에서 성립하지 X. but, 짝수제곱일 경우 고려 O)

- $0<a<1$ 이고 n이 자연수일 때 대소비교

$A = \sqrt[n+4]{a^{n+3}},\ B = \sqrt[n+3]{a^{n+2}},\ C = \sqrt[n+2]{a^{n+1}}$

극한을 생각해보면 지수는 $\frac{n+3}{n+4} > \frac{n+2}{n+3} > \frac{n+1}{n+2}$ 이므로

$0<a<1 \Rightarrow A>B>C$가 아니라 $A<B<C$

(직관적으로 생각하려면 $n=1$을 대입해서 $A=\sqrt[5]{a^4}$로 바꾸어도 O)

- x에 대한 방정식 $4^x = \overset{=t}{2^{x+1}} + k$가 서로 다른 두 근을 갖도록 하는

$\Rightarrow t^2-2t-k=0\ (t>0)$

상수 k의 값의 범위가 $p<k<q$일 때, 상수 $p+q$의 값?

sol) 근의 분리 이용 : 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면

(i) $D>0$: $D/4 = 1+k>0.\ k>-1$

(ii) (두근의 합)>0 : $2>0$ (항상성립)

(iii) (두근의 곱)>0 : $-k>0.\ k<0$

$\underbrace{-1<k<0}_{-1}$

$\therefore -1$

- 부등식 $(2^x-32)(\frac{1}{3^x}-27)>0$ 와 같이 밑과 지수가 모두 다른 경우

case를 나눈다. 예) i) $2^x-32>0.\ \frac{1}{3^x}-27>0 \Rightarrow$ 양수×양수>0

ii) $2^x-32<0.\ \frac{1}{3^x}-27<0 \Rightarrow$ 음수×음수>0

유형 02 지수부등식

1. 항이 2개인 경우

① 밑을 같게 할 수 있을 때 → 지수를 비교한다.

- $a>1$인 경우: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \rightarrow f(x) > g(x)$
- $0<a<1$인 경우: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \rightarrow f(x) < g(x)$

② 밑을 같게 할 수 없을 때 → 양변에 로그를 취하여 푼다.

2. 항이 3개 이상인 경우

$a^x, a^{2x}, \cdots$ 의 항이 있을 때 → $a^x = t\ (t>0)$로 치환하여 풀기

* 이차방정식 : ① 인수분해 ② 완전제곱식.근의 공식 ③ 근과 계수의 관계
* 방·부등식 / M.m 문제 … 치환 가능 but 극값 문제 … 치환 불가능

- $A \cap B \neq \varnothing \Longleftrightarrow$ 집합 A와 B는 서로소가 아니다!
- 방정식 $9^x - 2(a+4)3^x - 3a^2 + 24a = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 양수

$\Rightarrow x>0,\ 3^x=t$라 하면 $t>1$

* 방정식 / 부등식 부등식의 해의 경계 = 방정식의 실근

① 지수·로그 : 직접 구한다. (일대일대응)

지수
- 방 $a^{f(x)} = a^{g(x)} \cdots f(x)=g(x)$
- 부 $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $\boxed{a>1}$ $f(x)>g(x)$

☆인수분해와 치환☆ $\boxed{0<a<1}$ $f(x)<g(x)$

로그
- 방 $\log_a f(x) = \log_a g(x) \cdots f(x)=g(x)>0$
- 부 $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $\boxed{a>1}$ $f(x)>g(x)$

☆☆ 진수>0 ☆☆ $\boxed{0<a<1}$ $f(x)<g(x)$

② 삼각 : 직접 구하는 게 X

주기성·대칭성 ⇒ 실근의 개수와 총합 구하기

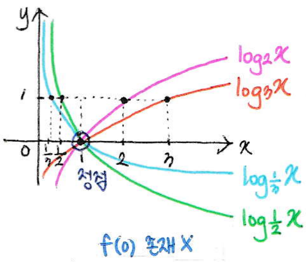
I. 지수함수와 로그함수 _ 로그함수. 로그 방·부등식

유형 04 로그함수 그래프의 성질

↳ 일대일 대응

$y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1,\ x>0)$

1. 로그함수 $y=\log_a x$ 의 성질



↑ 밑이 클수록 아래쪽에 존재 = x축과 가까움

↓ 밑이 작을수록 위쪽에 존재 = x축과 가까움

① 정의역 : 모든 양의 실수 , 치역 : 모든 실수

② $a>1$ 일 때 $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)<f(x_2)$ … 증가함수

$0<a<1$ 일 때 $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)>f(x_2)$ … 감소함수

③ 그래프는 (1,0) 지남 (정점) , 점근선은 y축 (x=0)

* 역함수는 $y=a^x$ (y=x 대칭)

2. 로그함수 $y=\log_a x$ 의 평행이동

x축으로 p만큼, y축으로 q만큼 → $y=\log_a\boxed{(x-p)}+q$ ↳ 진수 $x-p$ 에서

(진수) = 0 ···▸ 정의역, 점근선

(진수) = 1 ···▸ 정점

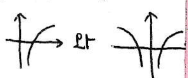
① 정의역 : $x>\boxed{p}$ 인 실수 , 치역 불변

② 증가함수, 감소함수 불변

③ 그래프는 $(\boxed{1+p}, q)$ 지남 (정점) , 점근선은 $x=\boxed{p}$

cf.) $y=2\log x$ 와 $y=\log x^2$ 은 다른함수이다!

그래프로 그리면



$y=2\log x$ 의 정의역 → x는 모든 양의 실수

$y=\log x^2$ → $y=2\log|x|$ 의 정의역 → $x\neq0$ 인 모든 실수 $(=x^2>0)$

3. 로그함수의 표현 ☆☆☆

① $f(xy)=f(x)+f(y)$ → 예) $f(xy)=f(x)+f(y)$, $f(3)=1$ 인 함수 ⟺ $f(x)=\log_3 x$

② $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

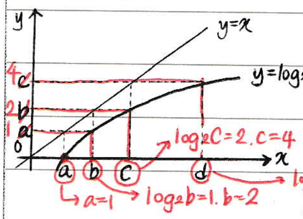
③ $f(x^n)=nf(x)$ (단, n은 실수)

④ $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ * ⑪ $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$

⑤ $f(ax)=1+f(x)$

⑥ $f(1)=0$

∘ 로그함수의 함숫값 구하기



역함수를 이용한 문제는 문자에 대응되는 값을 구한다.

$\Rightarrow \log_2\frac{bc}{d}=a+b-c$

$=1+2-4=-1$

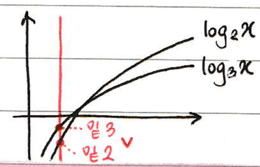
∘ 3-⑪ 증명) $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\log_a\frac{x+y}{2}$

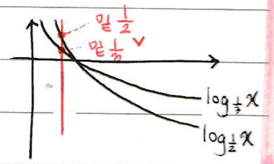
$\frac{f(x)+f(y)}{2}=\frac{\log_a x+\log_a y}{2}=\frac{1}{2}\log_a xy=\log_a\sqrt{xy}$

$x>0.\ y>0$ 일 때, 산술·기하평균에 의해 $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ 이고

$0<a<1$ 이므로 $\log_a\frac{x+y}{2}\ge\log_a\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$ 일때 성립)

* 밑의 크기에 따른 로그함수의 그래프 : $0<x<1$ 에 직선 긋기





* 로그함수의 일치 여부 : 정의역 일치 여부 확인 first . (진수)>0

↳ 계산의 편의를 위해 변형할 때 꼭 초기함수의 정의역 확인

예) $y=\log_2 x^2$ … 정의역 : $x\neq0$ $\neq$ $y=2\log x$ … 정의역 : $x>0$

$y=\log_2 x^3$ … 정의역 : $x>0$ $=$ $y=3\log_2 x$ … 정의역 : $x>0$

* 지수·로그 함수 동시에 나오면 ⟺ 역함수 관계 의심

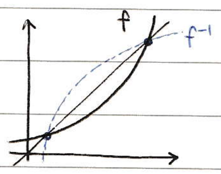
① $y=x$ 그리고 대칭성 이용 : ┌ 좌표) 교점 (a.a)
└ 기하) 기울기 ±1인 직선 → 직각이등변△ → 특수각

② (a.b) ⟷ (b.a) : 기울기 -1 인 직선 = 좌표 합 일정

* 일대일대응 = 역함수 존재 = 증가/감소만 = 극값 존재 X

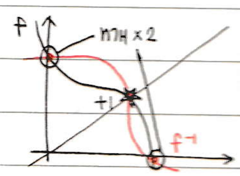
* 연속함수 관점

① 증가 ▶ 교점 수 ≥ 0



$f=f^{-1}$ 교점은 $y=x$ 위에만.

② 감소 ▶ 교점수 = (2n+1)개



항상 (2n+1)개.

예) $f\cdot f^{-1}$ 교점 수 4개 = 둘다 증가함수

$f\cdot f^{-1}$ 교점 수 5개 ┌ 증가인 경우 : $y=x$ 위에 5개
└ 감소인 경우 : x_3가 $y=x$ 위 존재

유형 05 로그함수의 활용

1. 지수함수와 로그함수의 관계

① $f(a)=b$, $f^{-1}(b)=a$

② $\{f^{-1}(x)\}^{-1}=f(x)$

③ $(f^{-1}\cdot f)(x)=I_X$ $(X\rightarrow Y)$

④ $(f\cdot f^{-1})(x)=I_Y$ $(Y\rightarrow X)$

⑤ $(f\circ g)^{-1}(x)=(g^{-1}\circ f^{-1})(x)$

* $g(f(x))=x \iff g(x)=f^{-1}(x)$

$f(f(x))=x \iff f(x)=f^{-1}(x)$ --- $y=x$ or $y=-x+k$ 꼴

* 기울기의 곱이 1이다. ⟺ 역함수이다.

기울기의 곱이 -1이다. ⟺ 서로 수직이다.

* 두 함수가 만나는 두 점을 (a_1, b_1) (a_2, b_2)라 할 때

$a_1^2+b_1^2>a_2^2+b_2^2$ ⇝ 제곱의 합 ⇒ 길이 구하는 문제, 직각△ 이용!

유형 06 로그함수의 최대,최소

☆밑과 진수조건 쓰고 시작☆

① 치환하기

② 역수 꼴일 때 산술평균과 기하평균의 관계 이용

예) $\frac{1}{4}<x<25$ 일 때, 함수 $y=\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}$의 최댓값은?

역수꼴

$$\log 4x+\log\frac{25}{x}\geq 2\sqrt{\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}}$$

$$\underbrace{\log 100}_{=2}\geq 2\sqrt{\log 4x\cdot\log\frac{25}{x}}$$

$$\Rightarrow \log 4x\cdot\log\frac{25}{x}\leq 1$$

∴ 최댓값: 1

③ 밑과 지수에 로그 존재할 때 양변에 밑이 같은 로그를 취하기

예) $y=x^{-4+\log_2 x}$ 의 최솟값은?

▶ 밑이 2인 로그를 양변에 취하면

$$\log_2 y=(-4+\log_2 x)(\log_2 x)$$

$$=(\log_2 x)^2-4(\log_2 x)$$ --- $t=\log_2 x$ 치환

$$=t^2-4t=(t-2)^2-4$$

☆ $t=2$ 일 때, $\log_2 y$의 최솟값 $=-4$

⇒ y의 최솟값 $=2^{-4}=\frac{1}{16}$

∴ 최솟값: $\frac{1}{16}$

유형 03 로그방정식

1. $\log_a f(x) = b \iff f(x) = a^b$ (단, $f(x) > 0$)
2. 밑이 같을 때 → 진수를 비교한다.

   $\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff f(x) = g(x)$ (단, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$)
3. 진수가 같을 때 → 밑을 비교하거나 진수를 1로 만드는 값을 찾는다.

   $\log_a f(x) = \log_b f(x) \iff a = b$ 또는 $f(x) = 1$
4. $\log_a f(x)$ 꼴이 반복될 때 → $\log_a f(x) = t$로 치환하여 방정식 풀기
5. 지수에 로그가 있을 때 → 양변에 로그를 취하여 푼다.

* $\log x$에 관한 방정식 ⇒ 로그 방정식 이용

x에 관한 방정식 ⇒ 이차 방정식 이용!

유형 04 로그부등식

1. 밑이 같을 때 → 진수를 비교한다.

   ① $a > 1$인 경우: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x) > 0$

   ② $0 < a < 1$인 경우: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow 0 < f(x) < g(x)$
2. 밑이 다를 때 → 밑의 변환 공식을 이용하여 밑을 같게 하여 푼다.
3. $\log_a f(x)$ 꼴이 반복될 때 → $\log_a f(x) = t$로 치환하여 부등식 풀기
4. 지수에 로그가 있을 때 → 양변에 로그를 취하여 푼다.

- 양쪽에 로그를 취하는 로그방정식에서 $(\log n)^2$ (n은 상수) 형태는 방정식으로 풀리지 않을 경우 곱셈공식을 이용해보기!

예) $x > 0$일 때, $(5x)^{\log 5} = 10x$의 근은?

tip 지수와 같은 밑을 가지는 로그 취하기!

$\log 5(\log 5 + \log x) = 1 + \log x = (\log 5)^2 + \log 5 \cdot \log x$

$(\cancel{\log 5 - 1}) \cdot \log x = -\{\cancel{(\log 5)^2 - 1}\}(\log 5 + 1)$ … 합차이용

- 밑과 진수끼리는 위치이동이 가능하다는 것을 기억하자.

예) $\log_3 x \times \log_2 y \rightarrow \log_2 x \times \log_3 y$

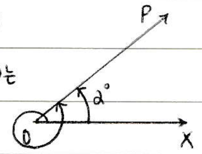
- $ax^2 + bx + c > 0$이 성립할 조건을 구할 땐 $a = 0$일때와 $a \neq 0$일때를 나누어서 구한 뒤, 공통범위가 아닌 전체 합집합을 구한다.
- 현재 시점 $\iff t = 0$인 시점

Ⅱ. 삼각함수 _ 삼각함수

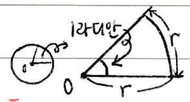
1. 일반각과 호도법

(1) 일반각: 시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 $\alpha°$라 할 때, 동경 OP가 나타내는 일반각 θ는

$$\theta = 360° \times n + \alpha° \quad (\text{단}, n\text{은 정수})$$

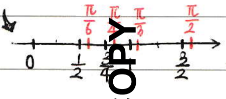


(2) 호도법: 반지름의 길이가 r인 원에서 길이가 r인 호의 중심각의 크기를 1라디안이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라 한다. 즉, 1라디안 $= \frac{180°}{\pi}$, $1° = \frac{\pi}{180}$라디안

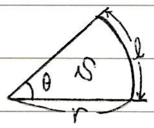


* (지엽적이긴 하지만;) $1 = \frac{180°}{\pi} < 60°$

($\pi \doteqdot 3.14 > 3$ 이용 → 증명 o)



2. 부채꼴의 호의 길이와 넓이

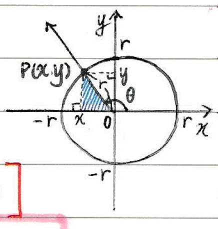


반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ (라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$$l = r\theta, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

3. 삼각함수의 정의

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP} = r$인 점 $P(x, y)$에 대하여 동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때



$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \ (x \neq 0)$$

* 이때 점 P의 좌표는 $(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta)$ // $\tan\theta$ = 기울기

4. 삼각함수 사이의 관계

(1) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(3) $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

5. 일반각에 대한 삼각함수의 성질

(1) $2n\pi + \theta$ (n은 정수)의 삼각함수

① $\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$

② $\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$

③ $\tan(2n\pi + \theta) = \tan\theta$

(2) $-\theta$의 삼각함수

① $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

② $\cos(-\theta) = \cos\theta$

③ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

(3) $\pi \pm \theta$의 삼각함수 (복부호동순)

① $\sin(\pi \pm \theta) = \mp\sin\theta$

② $\cos(\pi \pm \theta) = -\cos\theta$

③ $\tan(\pi \pm \theta) = \pm\tan\theta$

(4) $\frac{\pi}{2} \pm \theta$의 삼각함수 (복부호동순)

① $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \theta) = \cos\theta$

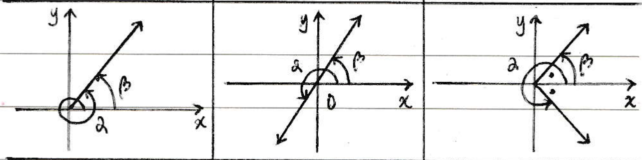
② $\cos(\frac{\pi}{2} \pm \theta) = \mp\sin\theta$

③ $\tan(\frac{\pi}{2} \pm \theta) = \mp\frac{1}{\tan\theta}$

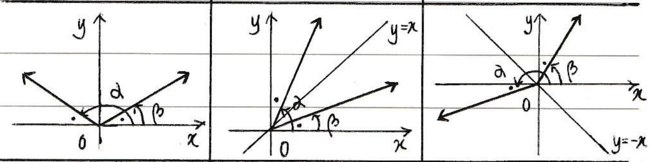
---

* 두 동경의 위치관계 (단, n은 정수)

일치	원점대칭	x축대칭
$\alpha - \beta = 2n\pi$	$\alpha - \beta = 2n\pi + \pi$	$\alpha + \beta = 2n\pi$



y축대칭	직선 y=x 대칭	직선 y=−x 대칭
$\alpha + \beta = 2n\pi + \pi$	$\alpha + \beta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$	$\alpha + \beta = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi$

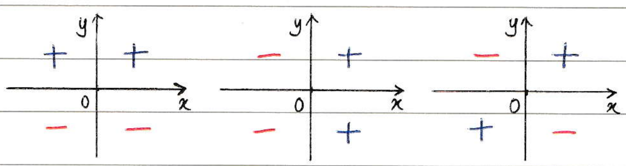


* 특수각의 삼각비의 값

삼각비 \ θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

* 삼각함수의 값의 부호

[$\sin\theta$의 부호] [$\cos\theta$의 부호] [$\tan\theta$의 부호]



* 삼각함수의 각의 변환

$\frac{n}{2}\pi \pm \theta$ (n은 정수)의 삼각함수에서

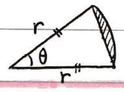
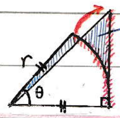
(i) θ를 예각으로 간주하고

(ii) n이 짝수이면 $\sin \to \sin$, $\cos \to \cos$, $\tan \to \tan$

n이 홀수이면 $\sin \to \cos$, $\cos \to \sin$, $\tan \to \frac{1}{\tan}$

로 삼각함수를 결정한 후

(iii) 부호는 동경이 $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$일 때의 처음 주어진 삼각함수의 부호로 결정한다.

*  $S=\frac{1}{2}r^2\theta > \frac{1}{2}r^2\sin\theta$ (△넓이) ⇒ 

* 원과 특수각

① 30°, 60°, 120°, 150° ⇒ 반지름의 중점 / ② 45°, 135° ⇒ $y=x$ or $y=-x$

* 좌표의 주기성과 대칭성 : 특히 $\frac{\pi}{2}-\theta$, $\pi-\theta$는 무작정 각변환X 의미파악!!

1. $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ … 예각과 둔각의 sin의 부호는 모두 양수 $x=\frac{\pi}{2}$ 대칭

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ … 예각의 cos의 부호는 양수

둔각의 cos의 부호는 음수

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ … 예각의 tan의 부호는 양수 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 점대칭

둔각의 tan의 부호는 음수

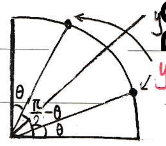
~> 응용 $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$ 이고 $\alpha+\beta=\pi$ 이면

• $\sin\beta=\sin\alpha$ • $\cos\beta=-\cos\alpha$ • $\tan\beta=-\tan\alpha$

2. $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$

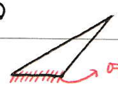
$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$

$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$



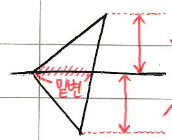
* △의 넓이 구하기

①  인 경우

②  인 경우

③  인 경우

cf.) ③번 경우에서



• $|\sin\theta|\le 1$, $|\cos\theta|\le 1$ 이므로 $|\sin\theta\cos\theta|\le 1$

• 교점구하기는 무조건 θ칸 ㄱㄱ

• sin은 예각 둔각 상관없이 ⊕ ~~but~~ cos은 예각 ⊕ 둔각 ⊖

Ⅱ. 삼각함수 _ 삼각함수의 그래프

1. 주기함수

일반적으로 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$ 를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, $f(x)$를 주기함수라 하고, 상수 p의 값 중에서 최소인 양수를 함수 $f(x)$의 주기라 한다.

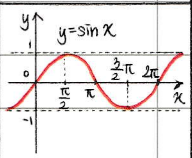
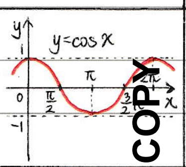
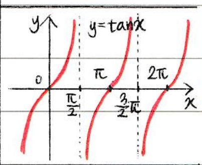
* 상수 p에 대하여 $f(x-p)=f(x+p) \Leftrightarrow f(x)=f(x+2p)$

$f(p-x)=f(p+x) \Leftrightarrow$ 그래프가 직선 $x=p$에 대하여 대칭인 함수

* $f(x+p)=f(x)$ (단, 상수 p는 가장 최소인 양수) → 주기가 p인 함수

* 두 주기함수 $f(x) \to$ 주기 p, $g(x) \to$ 주기 q 일때 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 모두 주기함수 (새로운 주기는 최소공배수 구하는 것과 비슷하게)

2. 삼각함수의 성질

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
그래프의 개형			
정의역	실수 전체의 집합	실수 전체의 집합	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 모든 실수의 집합
치역	$\{y\mid -1\le y\le 1\}$	$\{y\mid -1\le y\le 1\}$	실수 전체의 집합
그래프의 성질	$\sin(-x)=-\sin x$ 즉, 원점에 대하여 대칭 (기함수)	$\cos(-x)=\cos x$ 즉, y축에 대하여 대칭 (우함수)	$\tan(-x)=-\tan x$ 즉, 원점에 대하여 대칭 (기함수) 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)
주기	2π	2π	π

* $y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left\{x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

→ 즉, 함수 $y=\cos x$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

* $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

* 주기함수는 그래프의 이동. 식이 움직이는게 X

* 정수인 함숫값과 삼각함수의 함숫값을 비교할 때, $y=\pm x$를 이용할 수 있다. (뉴런 7번)

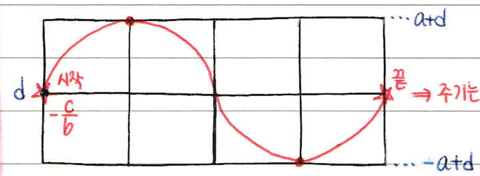
3. 삼각함수의 최댓값, 최솟값과 주기

삼각함수	최댓값	최솟값	주기
$y=a\sin(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\cos(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\tan(bx+c)+d$	없다.	없다.	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$

* $y=f(x)$를 x축 방향으로 a배, y축 방향으로 b배 한 그래프의 식은 $y=b\cdot f\left(\frac{x}{a}\right)$

* 삼각함수 그래프 그릴 땐 8칸 그리고 출발 (tan는 점근선만)

예) $y=a\sin(bx+c)+d$ $(a>0, b>0)$

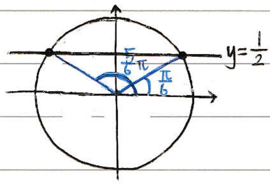


4. 삼각방정식과 삼각부등식의 풀이

	삼각방정식	삼각부등식
정의	각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식	각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식
풀이 방법	(i) 주어진 방정식을 $\sin x=a$ (또는 $\cos x=a$, $\tan x=a$) 꼴로 고친다. (ii) 함수 $y=\sin x$ (또는 ") 의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표를 구한다.	(i) 주어진 부등식을 $\sin x>a$ (또는 $\cos x>a$, $\tan x>a$) 꼴로 고친다. (ii) 함수 $y=\sin x$ (또는 ") 의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표를 이용하여 부등식을 만족시키는 x의 범위를 구한다.

* 단위원의 이용 : 삼각방정식을 단위원과 직선의 교점으로 구할 수도 있다. (뉴런 189쪽)

예) $\sin x=\frac{1}{2}$ $(0\le x\le 2\pi)$



예) $\cos x=-\frac{1}{2}$ $(0\le x\le 2\pi)$