나형

1. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a\times b\times c=4$일 확률은?
〔2021학년도 수능 08〕

① $\frac{1}{54}$ ② $\frac{1}{36}$ ③ $\frac{1}{27}$ ④ $\frac{5}{108}$ ⑤ $\frac{1}{18}$

1. 정답 ② 〔2021학년도 수능 08〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수가 차례로 a, b, c인데 $a\times b\times c=4$일 확률을 구하랍니다.

일단 분모는 6^3이에요. 이제 분자를 구해봅시다. $a\times b\times c=4$가 되는 경우를 기준 잡고 분류해볼까요? 114, 122가 있겠네요. 여기서 끝이 아니라 각각을 분배해줘야 합니다. 114와 122 모두 같은 것이 있으니까 $\frac{3!}{2!}=3$입니다.

따라서 경우의 수는 6이네요. 구하는 확률은 $\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$입니다. 답은 ②번이네요.

2. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-n^2+n$$

을 만족시킨다. a_{11}의 값은? 〔2021학년도 수능 12〕

① 88 ② 91 ③ 94 ④ 97 ⑤ 100

2. 정답 ② 〔2021학년도 수능 12〕

1) 시그마 펼치기

$a_1=1$인데 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-n^2+n$라고 합니다. 일단 좀 펼쳐볼까요?

$(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})=a_1-a_{n+1}=-n^2+n$인데 $a_1=1$이니까 $a_{n+1}=n^2-n+1$입니다.

$n=10$을 넣으면 $a_{11}=91$이네요. 답은 ②번입니다.

3. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=2t-6$$

이다. 점 P가 시각 $t=3$에서 $t=k(k>3)$까지 움직인 거리가 25일 때, 상수 k의 값은? [2021학년도 수능 14]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

3. 정답 ③ 〔2021학년도 9월 14〕

1) 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직인다

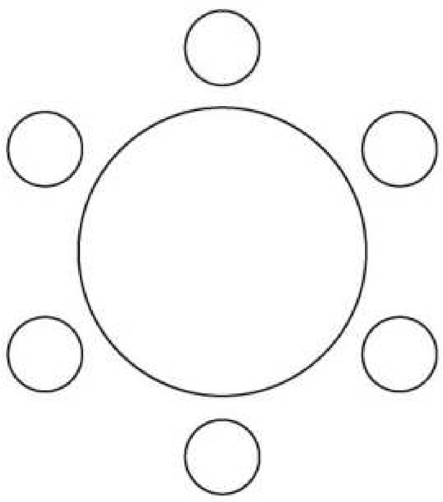
속도 $v(t)$가 $v(t)=2t-6$인데 $t=3$에서 $t=k(k>3)$까지 움직인 거리가 25랍니다. 점 P는 수직위를 움직이니까 함숫값의 차로 움직인 거리를 구할 수 있죠. 그런데 함숫값의 차라는 건 정적분을 의미하기도 하잖아요? 따라서 속도에 절댓값을 씌운 함수를 $t=3$부터 $t=k$까지 적분한 것이 됩니다. $2t-6$은 $t \geq 3$에서는 절댓값을 씌워도 같으니까 바로 적분해도 되겠네요. 따라서 $\int_3^k (2t-6)dt=\left[t^2-6t\right]_3^k=k^2-6k+9=25$이고

$k^2-6k-16=(k+2)(k-8)=0$인데 $k>3$이니까 $k=8$입니다. 답은 ③번이네요.

4. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)
〔2021학년도 수능 15〕

(가) A와 B는 이웃한다.
(나) B와 C는 이웃하지 않는다.

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40



4. 정답 ③ 〔2021학년도 수능 15〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

A, B, C를 포함하여 6명이 있는데 A와 B는 이웃하고 B와 C는 이웃하지 않는 경우의 수를 구하랍니다.

일단 기준을 잡고 분류해야 하는데 (가)조건과 (나)조건에 모두 B가 있네요. 그러면 B를 기준으로 잡아봅시다.

원순열을 보는 방법은 두 가지가 있습니다. n명이 있을 때 한 명을 미리 배치한 다음 나머지 $(n-1)$명을 배치하는 방법과 n명을 배치하고 360° 돌려서 겹치는 만큼 나눠주는 방법이 있죠. 지금은 B라는 기준이 있으니까 얘를 미리 배치해봅시다. 경우의 수는 1입니다. 어느 곳에 배치해도 구분할 방법이 없거든요.

미리 배치하면 B의 옆에는 A가 있어야 합니다. 자리는 2곳이네요. 경우의 수는 2입니다.

그러면 나머지 자리는 4자리인데 B 바로 옆자리는 C가 올 수 없습니다. 이웃하면 안 되니까요. 따라서 나머지 3자리에 배치해야겠네요. 경우의 수는 3이네요.

나머지 3명은 그냥 배열하면 되겠네요. $3!=6$입니다. 구하는 경우의 수는 $2\times3\times6=36$입니다. 답은 ③번이네요.

5. $0 \le x < 4\pi$일 때, 방정식

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 3 = 0$$

의 모든 해의 합은? 〔2021학년도 수능 16〕

① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

5. 정답 ② 〔2021학년도 수능 16〕

1) 문제해석, 각 변환

$0 \le x < 4\pi$에서 $4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 3 = 0$의 모든 해의 합을 구하랍니다. 일단 한 문자로 통일을 해야겠죠?

사인을 코사인으로 바꿔버리면 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$가 걸리적거리네요. 그럼 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$를 각변환해서 사인으로 바꿉시다.

일단 x를 예각으로 가정한 후, $\frac{\pi}{2}$가 있으니까 축은 $y>0$인 y축으로 설정합니다. 그리고 cos를 sin으로 바꾸구요.

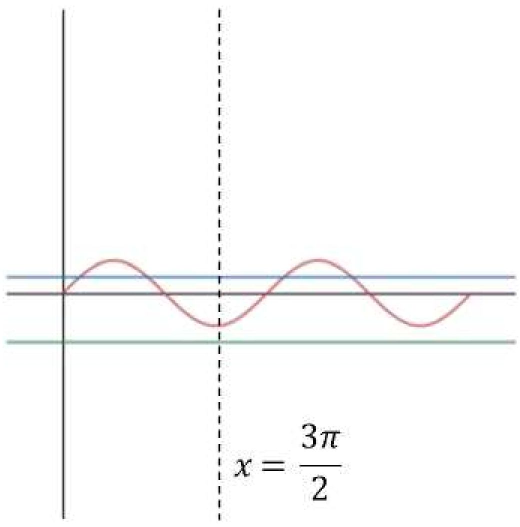
다음에는 $+x$이니까 예각이 반시계방향으로 추가되네요. cos값은 x값이니까 음수입니다. 따라서 각변환하면

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$입니다. 결국 $4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$의 해를 구하는 것이 되었네요.

$(2\sin x - 1)(2\sin x + 3) = 0$이니까 $\sin x = \frac{1}{2}$이거나 $\sin x = -\frac{3}{2}$입니다. 일단 $\sin x = -\frac{3}{2}$는 불가능하겠죠? 그냥

$\sin x = \frac{1}{2}$를 만족하는 x값을 구하면 되는 거에요. 이거는 그래프를 그려봐야겠죠?

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기



이렇게 되겠네요. $y = \sin x$는 $x = \frac{3\pi}{2}$에 대하여 대칭이니까 $y = \sin x$와

$y = \frac{1}{2}$가 만나는 점 중에서 x좌표가 가장 작은 점과 큰 점의 중점이 $x = \frac{3\pi}{2}$이고 두 번째와 세 번째의 중점도

$x = \frac{3\pi}{2}$이네요. 따라서 합을 구해보면 6π가 됩니다. 답은 ②번이네요.

6. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3,\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은?
〔2021학년도 수능 17〕

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

6. 정답 ① 〔2021학년도 수능 17〕

1) 함수 극한은 논리다

$f(x)$와 $g(x)$가 다항함수인데 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$랍니다. 일단 이것부터 해볼까요? 먼저 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$랍니다. 일단 분모가 0으로 가니까 분자도 0으로 가야죠. 그런데 $f(x)$와 $g(x)$는 다항함수이니까 $f(0)+g(0)=0$이고 $f(0)=-g(0)$입니다. 이러면 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)+g(x)-g(0)}{x}=f'(0)+g'(0)=3$가 되겠네요.

다음으로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$로 가볼게요. 이것도 분모가 0으로 가니까 분자도 0으로 가야 합니다. $f(x)$는 다항함수이니까 $f(0)=-3$입니다. 방금 $f(0)=-g(0)$이라고 했잖아요? $g(0)=3$입니다. $g(0)=3$이니까 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\times\frac{1}{g(x)}=\frac{f'(0)}{g(0)}=2$이 되겠네요. $g(0)=3$이므로 $f'(0)=6$이고 $f'(0)+g'(0)=3$이니까 $g'(0)=-3$입니다.

이제 $h(x)=f(x)g(x)$일 때 $h'(0)$를 구해볼까요? $f(x)$, $g(x)$ 모두 다항함수니까 $h(x)$ 역시 다항함수입니다. 그러면 미분해도 되겠죠? 곱의 미분법에 의하여 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고 $h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=18+9=27$입니다. 답은 ①번이네요.

7. $\frac{1}{4} < a < 1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔2021학년도 수능 18〕

<보 기>

ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $(0, 1)$이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}} < \overline{\mathrm{CD}}$이면 $\frac{1}{2} < a < 1$이다.

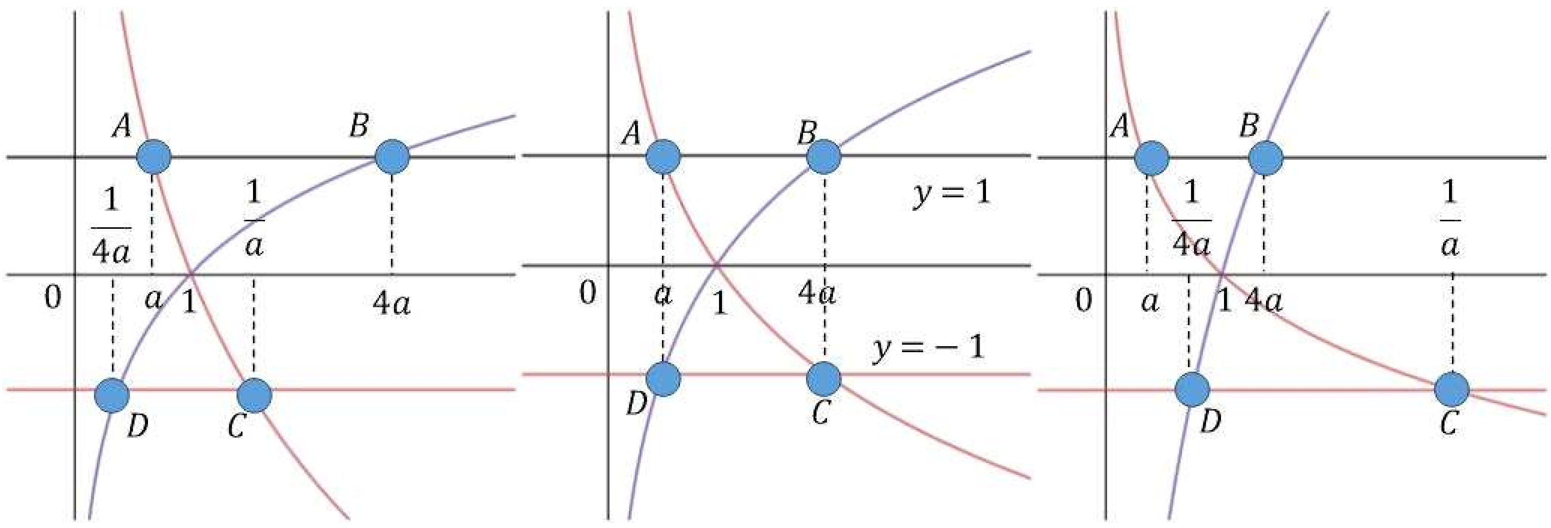
① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 정답 ③ 〔2021학년도 수능 18〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

a가 $\frac{1}{4} < a < 1$인데 $y = \log_a x$, $y = \log_{4a} x$가 $y = 1$과 만나는 점을 A, B, $y = -1$와 만나는 점을 C, D라 하자고 하네요. 대충 그래프 그려볼까요?

이거 대충 보니까 그래프가 나뉘는데요? $y = \log_a x$, $y = \log_{4a} x$가 $y = 1$과 만나는 점을 A, B라고 했으니까 A$(a,\ 1)$, B$(4a,\ 1)$이고 $y = \log_a x$, $y = \log_{4a} x$가 $y = -1$와 만나는 점을 C, D라고 했으니까 C$\left(\frac{1}{a},\ 1\right)$, D$\left(\frac{1}{4a},\ 1\right)$입니다. a는 양수니까 $a < 4a$는 확실하고 $\frac{1}{4a} < \frac{1}{a}$도 확실한데 a와 $\frac{1}{a}$ 중 어느 것이 더 크죠? 이거에 따라서 위치가 약간씩 변합니다.



이렇게 셋 중 하나가 되겠죠?

ㄱ에서 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표가 $(0,\ 1)$이냐고 물어봅니다. 일단 A$(a,\ 1)$, B$(4a,\ 1)$이니까 외분점은 $\left(\frac{4a-4a}{4-1},\ \frac{4-1}{4-1}\right) = (0,\ 1)$이네요. 맞죠?

ㄴ에서 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a = \frac{1}{2}$이냐고 물어보네요. 일단 가운데에 있는 그래프죠?

저 그래프는 A와 D의 x좌표가 같아야 합니다. 따라서 $a = \frac{1}{4a}$이고 $a^2 = \frac{1}{4}$인데 $a > 0$이니까 $a = \frac{1}{2}$이네요.

맞네요.

ㄷ에서 $\overline{\text{AB}} < \overline{\text{CD}}$이면 $\frac{1}{2} < a < 1$이냐고 물어봅니다. 저 세 그래프를 잘 보세요. A, B의 거리보다 C, D의 거리가 더 큰 건 가장 오른쪽에 있는 그래프잖아요. 저 그림이 가능하려면 $a < \frac{1}{4a} < 1 < 4a < \frac{1}{a}$가 되어야 하죠. 따라서 $a < \frac{1}{4a}$이고 $a^2 < \frac{1}{4}$이니까 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$입니다. 그런데 $\frac{1}{4} < a < 1$라 했으니 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$이겠네요. ㄷ은 아니네요!

따라서 옳은 건 ㄱ, ㄴ이고 답은 ③번입니다.

8. 확률변수 X는 평균이 8, 표준편차가 3인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y가

$$\mathrm{P}(4 \leq X \leq 8) + \mathrm{P}(Y \geq 8) = \frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}\left(Y \leq 8 + \frac{2\sigma}{3}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? 〔2021학년도 수능 19〕

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332 ④ 0.9772 ⑤ 0.9938

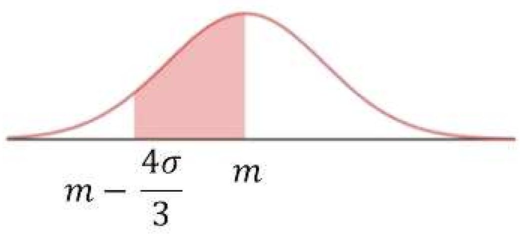
8. 정답 ④ [2021학년도 수능 19]

1) 수식화, 정규분포 보는 법

일단 $X \sim \mathrm{N}(8,\ 3^2)$이고 $Y \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$입니다.

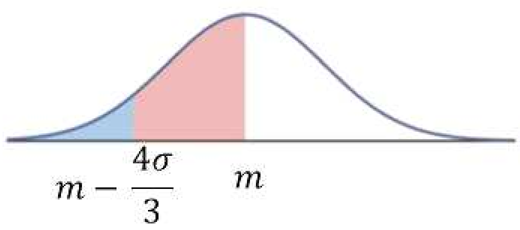
이때 $\mathrm{P}(4 \leq X \leq 8) + \mathrm{P}(Y \geq 8) = \frac{1}{2}$라네요. 일단 X부터 봅시다. 일단 4는 평균 8에서 $\frac{4\sigma}{3}(=4)$만큼 왼쪽으로 움직인 값이에요. 8은 평균이구요. 그러면 $\mathrm{P}\left(-\frac{4\sigma}{3} \leq Z \leq 0\right) + \mathrm{P}(Y \geq 8) = \frac{1}{2}$가 되는 거죠.

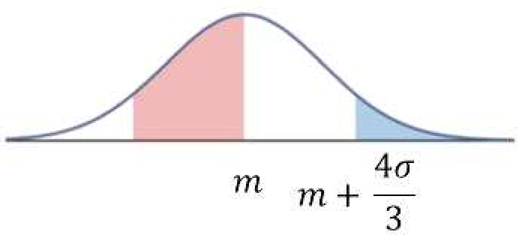
2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기



일단 $\mathrm{P}\left(-\frac{4\sigma}{3} \leq Z \leq 0\right)$는 이만큼이에요.

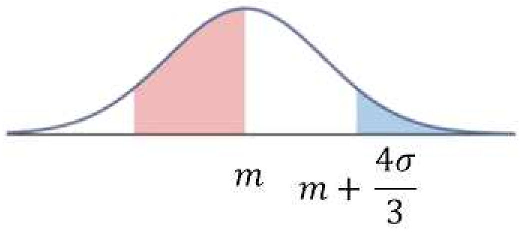
여기서 $\mathrm{P}(Y \geq 8)$가 어떤 값을 가져야 할까요? 일단 확률은 "이상"일 확률이에요. 그 상황에서 $\mathrm{P}\left(-\frac{4\sigma}{3} \leq Z \leq 0\right) + \mathrm{P}(Y \geq 8) = \frac{1}{2}$가 되려면





이렇게 둘 중 하나가 되어야 합니다. 그런데

이상일 확률이니까



이게 되겠네요. 따라서 $8=m+\frac{4\sigma}{3}$입니다.

따라서 $\mathrm{P}\left(Y \le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)$는 $\mathrm{P}(Y \le m+2\sigma)$입니다. $m+2\sigma$는 말 그대로 평균 m에서 2σ만큼 오른쪽으로 움직인 값이죠? 따라서 $\mathrm{P}(Z \le 2)$입니다. $\mathrm{P}(Z \le 2)=\mathrm{P}(Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.5+0.4772=0.9772$이네요. 답은 ④번입니다.

9. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

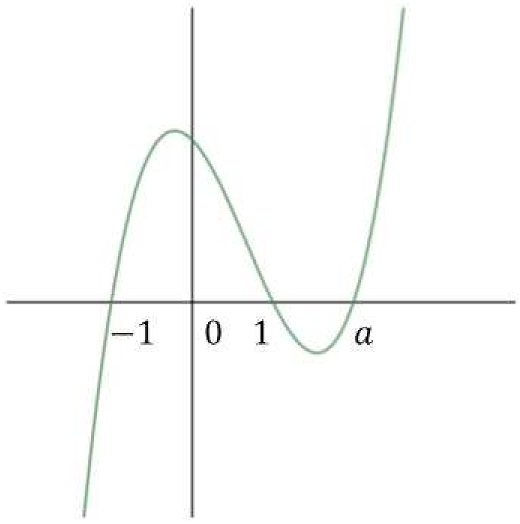
가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은?
〔2021학년도 수능 20〕

① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

9. 정답 ④ 〔2021학년도 수능 20〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 $a>1$인데 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$랍니다. 대충 그래프는 알겠네요. x축과 $x=-1,\ 1,\ a$에서 만나구요, 방향 그대로 지나가는 함수에요. 뭐 대충 그려보자면



이렇게 되겠네요.

2) 정적분의 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우

그리고 $g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2f(t)dt$가 오직 하나의 극값을 가지는 a의 최댓값을 구하랍니다. 일단 위 끝에 변수가 있으니 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=0$을 넣어볼까요? 그러면 $g(0)=0$이 됩니다.

그리고 미분해봅시다. 그러면 $g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt$가 되네요. $g'(0)=0$이구요.

그런데 오직 하나의 극값을 갖는다는 건 어떤 의미일까요? 일단 먼저 극값을 갖는다는 건 무슨 말인가요? 극값을 가지기 위해서는 접선의 기울기의 부호의 변화가 일어나야 해요. 다시 말하면 도함수의 부호의 변화가 있어야 한다는 거죠. 이걸 다시 해석하면 도함수가 x축과 만나지만 방향 그대로 지나가야 한다는 말이 됩니다. x축과 여러 번 만날 수는 있어요. 그런데 그 중에서 단 한 개만 홀수 개의 인수를 가지고 나머지는 짝수 개의 인수를 가져야 합니다. 홀수 개의 인수를 가질 경우 도함수가 x축과 만나지만 방향 그대로 지나가는 반면 짝수 개의 인수를 가지면 튕겨서 방향을 바꾸니까 부호의 변화가 일어나지 않거든요.

근데 이미 $x=0$에서 x축과 만나네요? $g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt$에서 $g'(0)=0$이잖아요. 그럼 기준을 $x=0$으로 잡아봅시다. $x=0$에서 극값을 가지는 경우와 $x=0$이 아닌 점에서 극값을 가지는 경우로 나누는 거죠.

3) 케이스 분류

3-1) $x=0$에서 극값을 가질 때

먼저 $x=0$에서 극값을 가지는 경우를 해봅시다. 이러면 $g'(x)$는 홀수 개의 x 인수는 무조건 가져야 합니다.

그런데 $2x$가 하나 있구요, $\int_0^x f(t)dt$는 무조건 $x=0$에서 0이 되죠? 일단 인수 2개 있습니다. 그러면

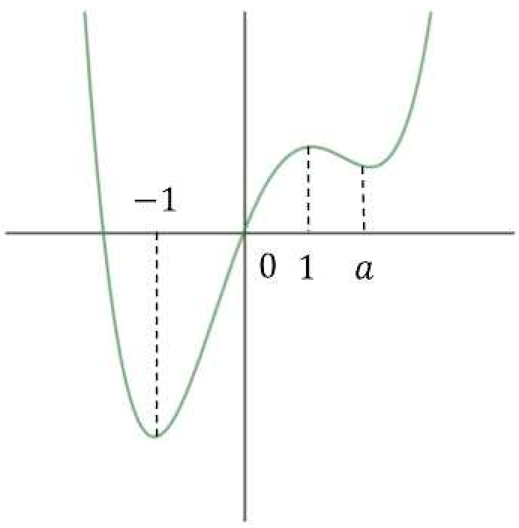
$\int_0^x f(t)dt$가 추가적으로 x라는 인수를 가져야 합니다. 홀수 개를 맞춰줘야죠. 그러면 $\int_0^x f(t)dt$가 x라는 인수를 1개 더 가져서 총 2개 가지는 경우와 3개 더 가져서 총 4개 가지는 경우가 있겠네요. 나머지 부분에서는 아예 x축과 만나지 않거나 x축과 만나도 접해야 합니다. 그러니까 $\int_0^x f(t)dt = x^2(x-k)^2$가 되거나 $\int_0^x f(t)dt = x^2 g(x)$ ($g(x)$는 x축과 만나지 않는 이차함수)이거나 $\int_0^x f(t)dt = x^4$가 되어야 한다는 거죠.

그런데 이 모든 경우는 말이 안 됩니다. 일단 이게 가능하려면 $\int_0^x f(t)dt$가 $x=0$에서 극값을 가져야 가능해요. 왜냐면 $x=0$에서 x축과 접해서 짝수 개의 인수를 얻어야 $g'(x)$가 홀수 개의 x라는 인수를 갖게 되어 극값을 가지니까요. 그런데 $\int_0^x f(t)dt$를 미분한 $f(x)$는 x라는 인수가 없잖아요. 애초에 극값을 가질 수 없는 거죠.

3-2) $x=0$이 아닌 점에서 극값을 가질 때

그러면 일단 $x=0$에서는 극값을 가지면 안 됩니다. 다시 말해서 $g'(x)$가 짝수 개의 x라는 인수를 가져야 한다는 거죠. 그런데 이미 두 개는 있죠? $2x$와 $\int_0^x f(t)dt$ 모두 $x=0$에서 값이 0이 되니까 이미 두 개는 확보되어 있죠. 그리고 방금 확인했듯이 $x=0$에서는 $\int_0^x f(t)dt$가 극값을 가질 수 없으니 그 이상은 가질 수 없구요. 그렇다는 건 $\int_0^x f(t)dt$가 $x=0$이 아닌 다른 점에서 x축과 만나고, 그 이외의 점에서는 아예 만나지 않거나 만나도 접해야 합니다.

그런데 $x=0$이 아닌 다른 점에서 x축과 접하면서 방향 그대로 가는 건 불가능해요. 그러면 인수가 3개 있어야 하는데 지금 $f(x)$를 대충 부정적분해서 그려보면

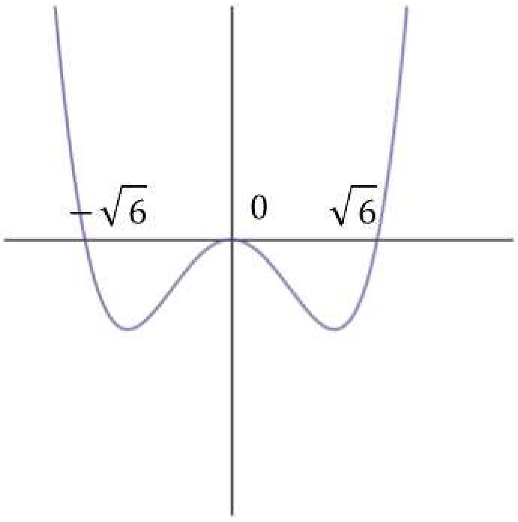


이렇게 되겠죠. 물론 간격을 무시하고 그려서 그렇지만 실제로는 1과 a의 간격에 따라 $x>1$부분은 약간 바뀔 수 있습니다.

그런데 바뀌더라도 바뀌지 않는 부분은 있죠. 지금 $x<-1$부분에서 x축과 만나잖아요? 여기는 무조건 인수를 하나만 가지죠. 그러면 여기는 무조건 극값을 가집니다. x축을 뚫고 방향 그대로 지나가잖아요. 그러면 요 부분과

$x=0$을 제외한 나머지는 x축과 만나지 않거나 만나도 접해야 합니다. 그럼 결국 $\int_0^x f(t)dt$의 $x=a$에서의 극값이 0보다 크거나 같으면 되겠네요. 0이어도 결국 접하게 되니까 가능하죠. 그럼 $\int_0^a f(t)dt \geq 0$이어야 합니다.

이제 계산해볼까요? $\int_0^a f(t)dt = \int_0^a (t^3 - at^2 - t + a)dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{at^3}{3} - \frac{t^2}{2} + at\right]_0^a = -\frac{a^4}{12} + \frac{a^2}{2} \geq 0$이니까 $a^4 - 6a^2 \leq 0$인 a를 구하면 됩니다. 이거 대충 그래프를 그려보면 $a^2(a^2-6) = a^2(a-\sqrt{6})(a+\sqrt{6})$이므로



이렇게 되네요. a의 최댓값은 $\sqrt{6}$입니다. 답은 ④번이네요.

10. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_7 = 2$일 때, a_{25}의 값은? 〔2021학년도 수능 21〕

① 78 ② 80 ③ 82 ④ 84 ⑤ 86

10. 정답 ③ 〔2021학년도 수능 21〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

일단 $0 < a_1 < 1$이고 $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$, $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$이랍니다. 뭔가 2020학년도 수능 21번 느낌이 많이 나죠? n에 숫자 넣을 준비는 하고 있어야겠어요.

그리고 $a_7 = 2$일 때 a_{25}의 값을 구하랍니다. 일단 n에 숫자 넣어봅시다. 먼저 관련있는 건 $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$에 $n = 3$을 넣어보는 거겠죠? 그러면 $a_7 = a_2 \times a_3 - 2 = 2$가 나와서 $a_2 \times a_3 = 4$가 되니까요.

또 관련 있는 게 뭐가 있을까요? $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$에 $n = 1$도 넣어볼까요? $a_3 = a_2 \times a_1 - 2$입니다. 그대로 $a_2 \times a_3 = 4$에 넣어보면 $a_2(a_2 \times a_1 - 2) = 4$가 되네요.

음.. 또 관련 있는 건 뭐가 있을까... $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$에 $n = 1$을 넣어봐도 좋을 것 같아요.

$a_2 = a_2 \times a_1 + 1$입니다. 근데.... $a_2 - 1 = a_2 \times a_1$를 $a_2(a_2 \times a_1 - 2) = 4$에 넣으면 좋을 것 같지 않나요..? 넣으면 $a_2(a_2 - 3) = 4$이고 $a_2^{\,2} - 3a_2 - 4 = (a_2 - 4)(a_2 + 1) = 0$이니까 $a_2 = 4$ 이거나 $a_2 = -1$입니다. 음..? 왜 두 개가 나올까요?

잘 생각해보세요. $0 < a_1 < 1$라는 걸 왜 줬을까요? 아까 $a_2 - 1 = a_2 \times a_1$라는 걸 알았죠? 여기서 a_2를 넘기면 $a_1 = \dfrac{a_2 - 1}{a_2} = 1 - \dfrac{1}{a_2}$가 됩니다. 따라서 $0 < 1 - \dfrac{1}{a_2} < 1$이고 정리하면 $0 < \dfrac{1}{a_2} < 1$이고 $a_2 > 1$이 됩니다. 따라서 $a_2 = 4$이네요. $a_{2n} = 4a_n + 1$, $a_{2n+1} = 4a_n - 2$이네요.

이제 a_{25}를 구해봅시다. $a_{2n+1} = 4a_n - 2$에 $n = 12$를 넣으면 $a_{25} = 4a_{12} - 2$입니다.

또 $a_{2n} = 4a_n + 1$에 $n = 6$을 넣으면 $a_{12} = 4a_6 + 1$이 되죠. $a_{25} = 16a_6 + 2$입니다.

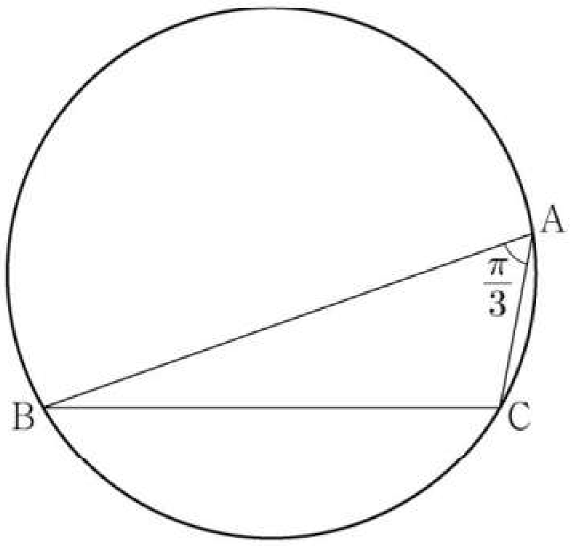
다음으로 $a_{2n} = 4a_n + 1$에 $n = 3$을 넣으면 $a_6 = 4a_3 + 1$가 됩니다. $a_{25} = 64a_3 + 18$입니다. 아까 $a_2 \times a_3 = 4$라고 했으니 $a_3 = 1$이죠? 따라서 $a_{25} = 82$입니다. 답은 ③번이네요.

11. $\angle \mathrm{A} = \frac{\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = 3 : 1$인 삼각형 ABC가 있다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때,

선분 AC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오.

〔2021학년도 수능 28〕

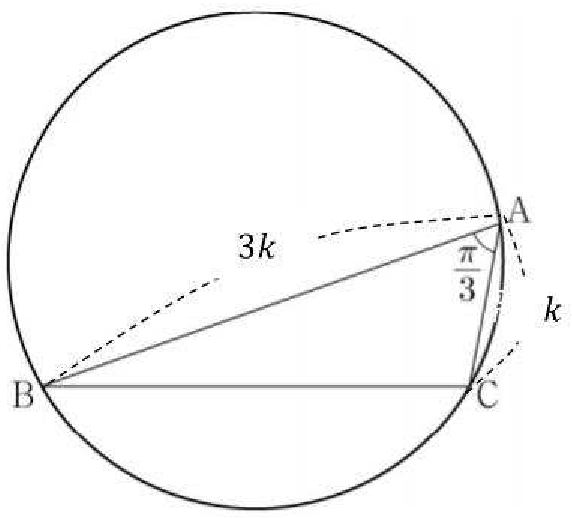


11. 정답 21 〔2021학년도 수능 28〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 외부 확인

일단 표시 좀 합시다. $\angle A = \frac{\pi}{3}$는 표시되어 있구요, $\overline{AB} : \overline{AC} = 3:1$라네요. 그리고 그림에 보이는 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이라네요. 지금 보면 삼각형이 원에 내접하고 있죠? 그러면 사인법칙을 생각해야겠어요. 마침 반지름의 길이도 줬네요! 거기에 각도도 하나 있구요. 사용할 준비는 바로 해야겠죠?

그리고 선분 AC의 길이를 k라 하자고 합니다. 그러면 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3:1$에 의하여 선분 AB의 길이는 $3k$이죠? 다 표시해보면



이렇게 되겠네요.

2) 외부, 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

이제 사인법칙을 사용해볼까요? 일단 각도를 아는 것이 있으니까 선분 BC로 갑시다. $\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2R$인데

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $R = 7$이니까 $\overline{BC} = 7\sqrt{3}$입니다.

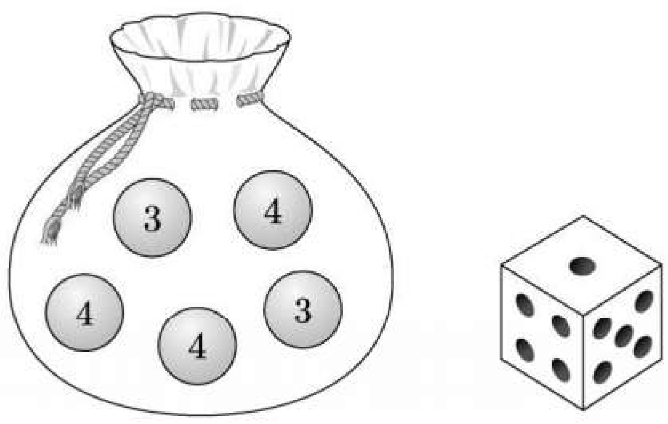
그리고 나면 두 변의 길이가 나오고 한 각이 나왔네요. 그러면 코사인법칙으로 가야겠죠?

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{(3k)^2 + k^2 - (7\sqrt{3})^2}{2 \times 3k \times k}$이니까 $7k^2 = 49 \times 3$이고 $k^2 = 21$입니다.

12. 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고, 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)
〔2021학년도 수능 29〕



12. 정답 587 〔2021학년도 수능 29〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

3, 3, 4, 4, 4의 5개의 공이 들어 있는 곳에서 하나의 공을 꺼내서 3이 나오면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고, 4가 나오면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한답니다. 그때 점수가 10점일 확률을 구하라네요.

일단 공을 하나 꺼내서 3이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이고 4가 나올 확률은 $\frac{3}{5}$이에요. 각각 천천히 해봅시다.

만약 3이 나왔다고 해볼게요. 그러면 주사위를 3번 던져서 나온 눈의 합이 10이 되어야 해요. 일단 확률을 구할 때 분모는 6^3입니다. 분자는 천천히 기준 잡고 분류해볼까요? 분류할 때 최대치는 6이라는 건 잊지 마시구요. 주사위잖아요?

136, 145, 226, 235, 244, 334가 되겠네요! 136같이 3개의 숫자가 모두 다른 경우는 그냥 순서를 배열해주면 됩니다. 3번 던질 때 136으로 나올 수도 있지만 631로 나올 수도 있으니까 순서도 배열해줘야 해요. 3!입니다.

226같이 겹치는 숫자가 있는 경우는 겹치는 숫자만큼 나눠주면 됩니다. $\frac{3!}{3}=2$이네요. 따라서 모두

$6+6+3+6+3+3=27$입니다. 구하는 확률은 $\frac{2}{5}\times\frac{27}{6^3}=\frac{1}{20}$이네요.

이제 4가 나왔다고 해봅시다. 4번 던져서 나온 눈의 합이 10이어야 해요. 확률의 분모는 6^4이구요, 분자는 기준 잡고 분류해봅시다.

1126, 1135, 1144, 1225, 1234, 1333, 2224, 2233이 있겠어요. 이것도 마찬가지로 겹치지 않으면 4!으로 배열해주고 겹치면 겹치는대로 나눠주면 되겠어요. 2224같은 건 $\frac{4!}{3!}=4$으로, 2233같은 건 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$으로 말이죠.

계산하면 $12+12+6+12+24+4+4+6=80$입니다. 구하는 확률은 $\frac{3}{5}\times\frac{80}{6^4}=\frac{1}{27}$입니다. 따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{20}+\frac{1}{27}=\frac{47}{540}$이네요. $p=540$, $q=47$이므로 $p+q=587$입니다.

13. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오.
〔2021학년도 수능 30〕

13. 정답 39 〔2021학년도 수능 30〕

1) 절댓값 함수, 차함수

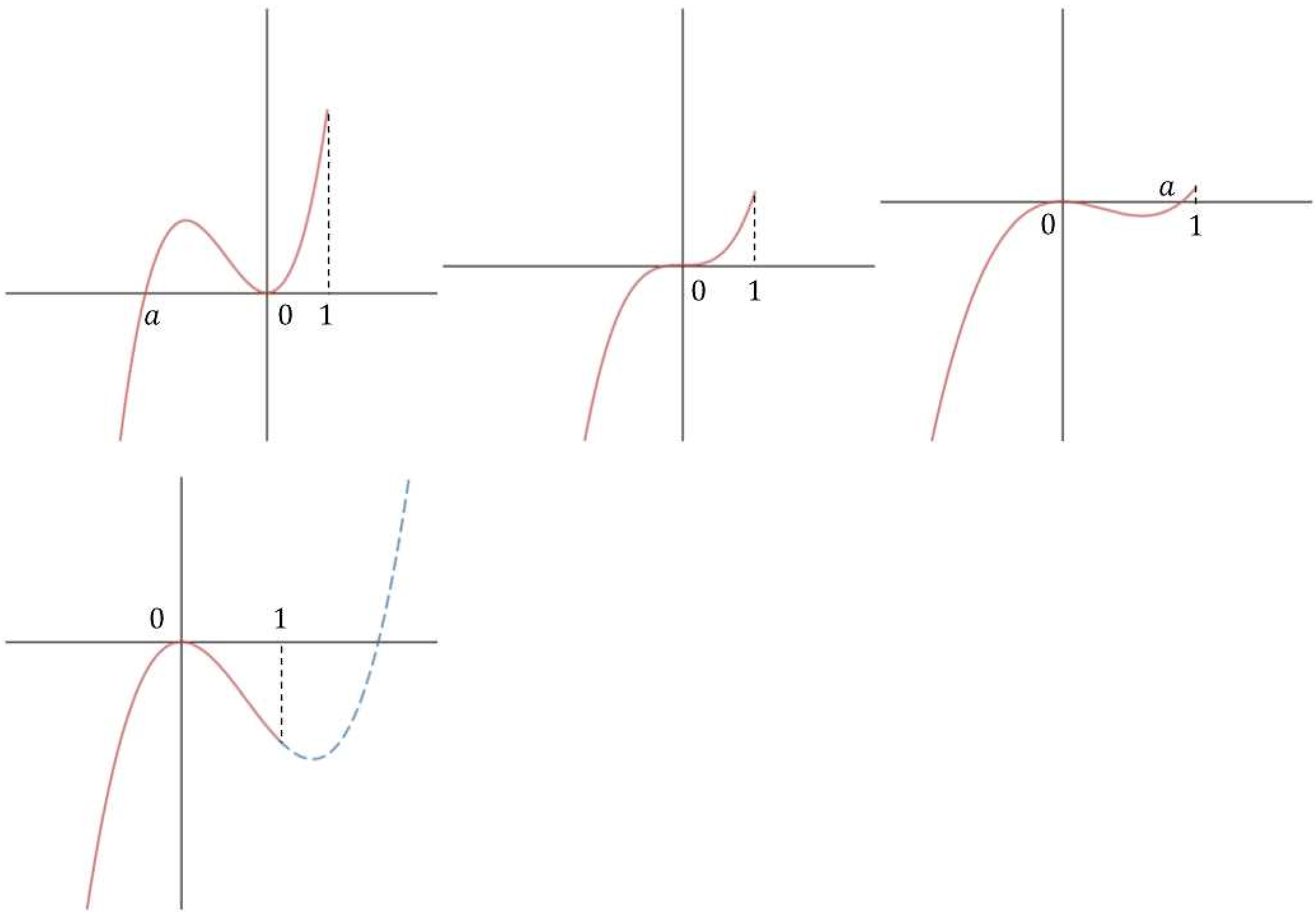
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $g(x)$는 일차함수인데 $h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \ge 1) \end{cases}$ 랍니다. 그때 $h(x)$가 미분가능하고 $h(0)=0$, $h(2)=5$랍니다.

일단 $x<1$에서 절댓값이 씌워져 있는 함수가 있어요. 그리고 $h(0)=0$인데 실수 전체의 집합에서 미분가능하네요? 이게 뭘 의미하는 거죠? $x=0$에서 x축과 만난다는 거에요. 그런데 단순히 그냥 지나가면 되는 건가요? 그러면 절댓값을 씌워 올렸을 때 미분불가능하게 될 거에요. 결국 $h(x)$는 $x=0$에서 x축에 접해야 한다는 이야기죠. 다시 이야기하면 $f(x)-g(x)$라는 새로운 차함수가 $x=0$에서 x축에 접해야 한다는 이야기에요. $f(x)-g(x)$가 x^2라는 인수를 가지고 있어야 한다는 이야기죠.

이제 대충 그래프 한 번 그려볼까요?

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

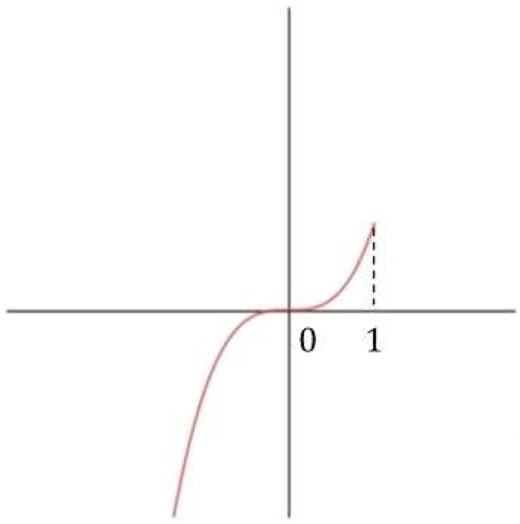
$f(x)-g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수입니다. 따라서



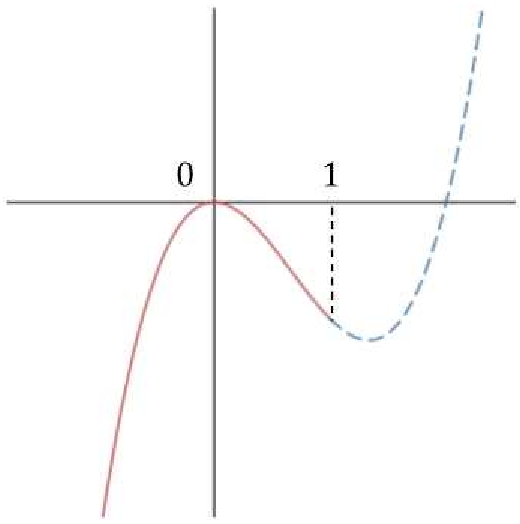
이정도가 가능한 그래프겠죠.

그런데 첫 번째 그림은 불가능합니다. 접어 올리면 $x=a$에서 미분불가능하거든요. 마찬가지로 세 번째 그림도 불가능합니다. 이것 역시 마찬가지로 $x=a$에서 미분불가능합니다.

결국 가능한 건



와 같은 $y=x^3$의 그래프이거나



와 같은

$y=x^2(x-a)$ $(a>1)$그래프입니다. 케이스가 나뉘니까 분류해야겠죠?

3) 케이스 분류

3-1) $f(x)-g(x)=x^3$일 때

$f(x)-g(x)=x^3$입니다. 그리고 $h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$ 는 $x=1$에서도 미분가능해야겠죠? 그런데

$x>0$에서 $h(x)>0$이니까 결국 $0<x<1$에서 $h(x)=f(x)-g(x)=x^3$이고, $x \geq 1$에서 $h(x)=f(x)+g(x)$입니다.

$x=1$에서 일단 먼저 연속이어야 하니까 $f(1)-g(1)=f(1)+g(1)=1$입니다. $g(1)=0$, $f(1)=1$이네요.

또한 $0<x<1$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)=3x^2$이고 $x \geq 1$에서 $h'(x)=f'(x)+g'(x)$인데 $x=1$에서 미분가능해야 하니까 $f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)=3$입니다. $g'(1)=0$, $f'(1)=3$이네요.

어? 그런데 $g(x)$는 일차함수 아니었나요? 일차함수가 어떻게 접선의 기울기가 0이 나오죠? 말이 안 되죠?

3-2) $f(x)-g(x)=x^2(x-a)$ $(a>1)$일 때

방금 전 케이스와 마찬가지로 $h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$ 는 $x=1$에서도 미분가능해야 합니다. 그래프를 잘 보면 $x<1$에서 $h(x) \leq 0$이니까 $h(x)=-f(x)+g(x)$라 할 수 있어요. $x \geq 1$에서는 $h(x)=f(x)+g(x)$이고 먼저 이게 $x=1$에서 연속이어야 하니까 $-f(1)+g(1)=f(1)+g(1)$이고 $f(1)=0$입니다.

또한 미분가능이어야 하니까 $-f'(1)+g'(1)=f'(1)+g'(1)$이고 $f'(1)=0$입니다.

이때 $f(x)-g(x)=x^2(x-a)$이고 $f(x)=x^3-ax^2+g(x)$이잖아요? $f(1)=f'(1)=0$이니까 각각 넣어볼게요.

$1-a+g(1)=0$이고 $g(1)=a-1$입니다. 또한 $f'(x)=3x^2-2ax+g'(x)$이니까 $3-2a+g'(1)=0$이고 $g'(1)=2a-3$입니다. $g(x)$는 일차함수죠? 따라서 $g(x)=(2a-3)x-a+2$입니다.

마지막으로 $h(2)=f(2)+g(2)=5$라네요. 넣어봅시다. $f(2)=8-4a+g(2)$이니까

$h(2)=2g(2)-4a+8=2a=5$이고 $a=\dfrac{5}{2}$입니다. 다 넣어보면 $g(x)=2x-\dfrac{1}{2}$이고

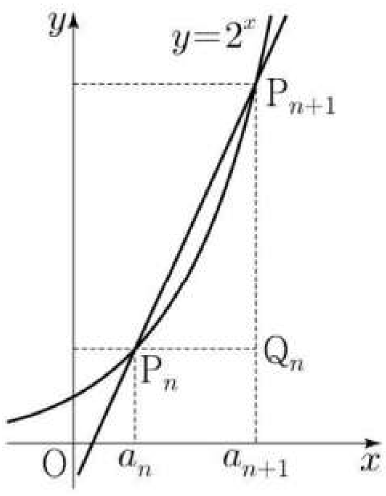
$f(x)=x^3-\dfrac{5}{2}x^2+2x-\dfrac{1}{2}=(x-1)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$이네요. $h(4)=f(4)+g(4)=39$입니다.

14. 상수 $k(k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$이고
> 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}_n\left(a_n,\ 2^{a_n}\right)$, $\mathrm{P}_{n+1}\left(a_{n+1},\ 2^{a_{n+1}}\right)$을
> 지나는 직선의 기울기는 $k \times 2^{a_n}$이다.

점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n이라 하고 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 하자.

다음은 $a_1=1$, $\dfrac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.



> 두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기가 $k \times 2^{a_n}$이므로
>
> $$2^{a_{n+1}-a_n} = k\left(a_{n+1}-a_n\right)+1$$
>
> 이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은
> 방정식 $2^x = kx+1$의 해이다.
> $k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여
> $a_{n+1}-a_n=d$이고, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.
> 점 Q_n의 좌표가 $\left(a_{n+1},\ 2^{a_n}\right)$이므로
>
> $$A_n = \frac{1}{2}\left(a_{n+1}-a_n\right)\left(2^{a_{n+1}}-2^{a_n}\right)$$
>
> 이다. $\dfrac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 $\boxed{\text{(가)}}$이고,
> 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
>
> $$a_n = \boxed{\text{(나)}}$$
>
> 이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n = \boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각

$f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+\dfrac{g(4)}{f(2)}$의 값은?

〔2021학년도 수능 가형 16〕

① 118　　② 121　　③ 124　　④ 127　　⑤ 130

14. 정답 ⑤ 〔2021학년도 수능 가형 16〕

1) 빈칸은 정확히 독해하기, 그림 있으면 그림 보면서

$k>1$이고 수열 $\{a_n\}$이 있는데 $a_n < a_{n+1}$이고 $y=2^x$위의 점 $\mathrm{P}_n\left(a_n,\ 2^{a_n}\right)$, $\mathrm{P}_{n+1}\left(a_{n+1},\ 2^{a_{n+1}}\right)$을 지나는 직선의 기울기가 $k\times 2^{a_n}$라고 합니다. 이건 그냥 $\dfrac{2^{a_{n+1}}-2^{a_n}}{a_{n+1}-a_n}$과 같은 거겠죠? $\dfrac{y\text{증가량}}{x\text{증가량}}$으로 해서 구한 거에요.

그리고 그림에도 나온 것처럼 Q_n이 있구요. A_n은 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이라고 합니다. $a_1=1$, $\dfrac{A_3}{A_1}=16$라고 하네요.

그리고 쭈루룩 읽어보면 $2^{a_{n+1}-a_n}=k\left(a_{n+1}-a_n\right)+1$이라고 합니다. 아까 $k\times 2^{a_n}=\dfrac{2^{a_{n+1}}-2^{a_n}}{a_{n+1}-a_n}$를 정리하면 나오겠네요. $k\left(a_{n+1}-a_n\right)=\dfrac{2^{a_{n+1}}-2^{a_n}}{2^{a_n}}=2^{a_{n+1}-a_n}-1$이니까요. 뭐 별로 중요한 것 같지는 않네요.

$a_{n+1}-a_n=d$라 하면 $2^x=kx+1$의 유일한 실근이 d랍니다. 그리고 $\{a_n\}$은 등차수열이구요. 저거 자체가 등차수열의 정의이죠?

$A_n=\dfrac{1}{2}\left(a_{n+1}-a_n\right)\left(2^{a_{n+1}}-2^{a_n}\right)$이라고 합니다. 아까 A_n은 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이라고 했었죠? 값을 그대로 집어넣으면 저렇게 나오네요. 밑변은 $a_{n+1}-a_n$이고 높이는 $2^{a_{n+1}}-2^{a_n}$이니까요.

이때 $\dfrac{A_3}{A_1}=16$"이므로" d의 값은 $\boxed{\text{(가)}}$라고 합니다. 이거는 $\dfrac{A_3}{A_1}=16$를 이용해서 d를 구하라는 거겠죠? 가봅시다.

$\dfrac{A_3}{A_1}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(a_4-a_3\right)\left(2^{a_4}-2^{a_3}\right)}{\frac{1}{2}\left(a_2-a_1\right)\left(2^{a_2}-2^{a_1}\right)}=16$인데 $a_4-a_3=a_2-a_1=d$이죠? 따라서 $\dfrac{A_3}{A_1}=\dfrac{\left(2^{a_4}-2^{a_3}\right)}{\left(2^{a_2}-2^{a_1}\right)}=16$입니다. 여기서 전부 다 a_1을 기준으로 정리해봅시다. $\{a_n\}$은 등차수열이니까 $a_4=a_1+3d$, $a_3=a_1+2d$, $a_2=a_1+d$이잖아요? 따라서

$\dfrac{A_3}{A_1}=\dfrac{\left(2^{a_1+3d}-2^{a_1+2d}\right)}{\left(2^{a_1+d}-2^{a_1}\right)}=\dfrac{2^{2d}\left(2^{a_1+d}-2^{a_1}\right)}{\left(2^{a_1+d}-2^{a_1}\right)}=2^{2d}=16=2^4$입니다. $d=2$이네요. (가)$=p=2$입니다.

이제 $\{a_n\}$의 일반항을 구해봅시다. 아까 $a_1=1$이라고 했고, 공차 d가 2이니까 $a_n=2n-1$이네요.

(나)$=f(n)=2n-1$입니다.

마지막으로 A_n을 구하면 되겠네요. 아까 $A_n=\dfrac{1}{2}\left(a_{n+1}-a_n\right)\left(2^{a_{n+1}}-2^{a_n}\right)$를 그대로 정리하면 되겠죠? 일단

$a_{n+1}-a_n=d=2$이구요. $a_n=2n-1$, $a_{n+1}=2n+1$이니까

$A_n=2^{2n+1}-2^{2n-1}=4\times 2^{2n-1}-2^{2n-1}=3\times 2^{2n-1}$입니다. (다)$=g(n)=3\times 2^{2n-1}$이네요.

이제 다 구했으니까 $p+\dfrac{g(4)}{f(2)}$를 구해봅시다. $2+\dfrac{3\times 2^7}{3}=130$입니다. 답은 ⑤번이네요.

15. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼, 3 이상이면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼, 이동시킨다.

이 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?
〔2021학년도 수능 가형 17〕

① 13　　② 15　　③ 17　　④ 19　　⑤ 21

15. 정답 ③ 〔2021학년도 수능 가형 17〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

원점에 점 P가 있는데 주사위를 던져서 2 이하면 P를 $x \to +3$만큼, 3 이상이면 P를 $y \to 1+$만큼 이동시킨다고 합니다. 이걸 15번 반복해서 P와 $3x+4y=0$ 사이의 거리를 확률변수 X라고 하자고 하네요. 그리고 $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하랍니다.

음... 아니 근데 점 P의 위치를 알아야 $3x+4y=0$와의 거리를 구하든 말든 하잖아요. 그럼 일단 점 P의 위치부터 구해야겠어요.

그런데.... 뭘 어쩌죠? 천천히 생각해봅시다. 만약 주사위를 던졌는데 모든 숫자가 2 이하가 나온다면? 그러면 P의 위치는 $(45,\ 0)$가 될 거에요. 확률은? 주사위를 던져서 2 이하가 나올 확률이 $\frac{1}{3}$인데 이게 15번이니까 $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$이죠.

그러면 $3x+4y=0$와의 거리는 $\frac{|3\times 45|}{\sqrt{3^2+4^2}}$입니다.

그러면 2 이하가 14번 나오고 3 이상이 한 번 나온다면요? 위치는 $(42,\ 1)$가 되겠죠? 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{14}\times\left(\frac{2}{3}\right)$이겠네요. 거리는 $\frac{|3\times 42+4\times 1|}{\sqrt{3^2+4^2}}$일 거구요.

이런 방식으로는 끝도 없을 거에요. 미지수로 잡아봅시다. 2 이하가 k번 나오고 3 이상이 $15-k$번 나온다면?

위치는 $(3k,\ 15-k)$가 되겠죠? 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{15-k}=\frac{2^{15-k}}{3^{15}}$이고, 거리는

$\frac{|3\times 3k+4\times(15-k)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5k+60|}{5}=k+12$이겠네요. 그러면 $X=k+12$가 되겠어요.

그런데 잘 생각해보세요. k는 전체 15번의 시행 중에서 성공확률이 $\frac{1}{3}$인 $B\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$를 따르는 확률변수에요.

주사위를 각각 던지는 시행은 독립이고 그걸 15번 반복하니까요. 따라서 $E(k)=5$입니다. 그러면 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(k+12)=\mathrm{E}(k)+12=17$입니다. 답은 ③번이네요.

16. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.)〔2021학년도 수능 가형 29〕

(가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다. (나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 이상이다. (다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

16. 정답 201 〔2021학년도 수능 가형 29〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 준다네요. 그리고 같은 색 모자끼리는 구별하지 않구요.
이거는 서로 다른 상자에 같은 공을 넣는 경우이죠?
(가)조건에서 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다고 합니다. 모자를 아예 안 받을 수는 없네요.
(나)조건에서 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 이상이라고 합니다. 이러면 일단 A가 받는 검은색 모자의 개수를 기준으로 분류하면 좋을 것 같아요.
(다)조건에서 검은색 모자의 개수>흰색 모자인 경우는 A 그리고 나머지 한 명이라고 합니다.
일단 방금 말했던 것처럼 (나)조건에 따라 A가 받는 검은색 모자의 개수를 기준으로 분류해봅시다. 나머지 사람들에게도 분류해볼게요. 4200, 4110, 5100, 6000이 있겠네요. 각각 케이스를 나눠야겠죠?

2) 케이스 분류

2-1) 4200일 때

일단 A는 검은색 모자 4개, 그리고 누군지 모를 나머지 한 명은 검은색 모자 2개를 받으면 됩니다. 일단 사람을 골라야겠죠? 고르는 경우는 3가지입니다. B, C, D가 받을 수 있으니까요. 여기서 B가 받았다고 가정해봅시다.
다음으로 (다)조건에 의하여 검은색 모자의 개수>흰색 모자의 개수인 경우는 A 그리고 나머지 한 명이어야 합니다. 그런데 지금 검은색 모자를 받은 A와 B를 제외한 나머지 두 명은 아예 검은색 모자가 없어요. 애초부터 검은색 모자의 개수가 흰색 모자보다 커질 수가 없다는 거에요. 그러면 (다)조건을 만족시키는 두 명은 자동적으로 검은색 모자를 받은 두 사람이 되죠. A는 흰색 모자를 3개 이하로, B는 흰색 모자를 1개 이하로 받아야 합니다.
그러면 케이스가 적을 것 같은 B를 기준으로 분류해봅시다.
만약 B가 흰색 모자를 1개 받았다고 해볼게요. 나머지가 받는 흰색 모자의 개수는

A	C	D
0	$5 \rightarrow {}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$	
1	$4 \rightarrow {}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$	
2	$3 \rightarrow {}_2H_1 = {}_2C_1 = 2$	
3	$2 \rightarrow {}_2H_0 = {}_1C_0 = 1$	

이렇게 됩니다. A가 0개를 받으면 C, D가 받는 흰색 모자의 개수는 5개죠. 그런데 (가)조건에 의하여 아예 모자를 안 받을 수는 없습니다. 그러면 C, D에게는 흰색 모자를 미리 1개씩 주고 시작해야 한다는 이야기에요.
따라서 남은 흰색 모자는 3개가 됩니다. 이러면 서로 다른 두 개의 상자에 같은 공을 3번 넣는 경우가 되죠?
따라서 선택종류 2가지에 선택횟수 3번이니까 ${}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$가 됩니다. 나머지들도 이 방식대로 하면 되겠죠?
만약 B가 흰색 모자를 0개 받았다고 해볼게요. 이것도 방금 전과 마찬가지로 해보면

A	C	D
0	$6 \rightarrow {}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$	
1	$5 \rightarrow {}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$	
2	$4 \rightarrow {}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$	
3	$3 \rightarrow {}_2H_1 = {}_2C_1 = 2$	

이렇게 나옵니다. 따라서 총 경우의 수는 $3\times(10+14)=72$이네요.

2-2) 4110일 때

A가 검은색 모자를 4개 받고, 나머지 세 명 중 두 명이 각각 1개씩 받는 경우에요. 일단 정해봅시다. 가능한 경우는 110을 B, C, D에게 배열하는 거니까 $\frac{3!}{2!}=3$입니다. 여기서는 B, C가 받았다고 가정해볼게요.

다음으로 (다)조건을 충족시켜야 합니다. 그런데 아까도 말했듯이 검은색 모자를 받지 않았다면 (다)조건을 충족시킬 수 없어요. 그러니까 여기서 (다)조건을 충족시킬 수 있는 건 A와 검은색 모자를 받은 B, C 중 한 명이라는 거죠. 이거 역시 케이스가 나뉘네요. 가능한 경우는 2가지입니다.

B를 골랐다고 해볼게요. 그러면 A는 흰색 모자를 3개 이하로, B는 0개, C는 1개 이상을 받아야 합니다. B는 검은색 모자의 개수가 1개인데 검은색 모자의 개수>흰색 모자의 개수이어야 하니까 흰색 모자를 무조건 0개를 받아야 하구요, C는 검은색 모자의 개수≤흰색 모자의 개수이어야 하는데 검은색 모자는 이미 1개를 받았으니까요. 가봅시다.

A	C	D
0	$6 \rightarrow {}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$	
1	$5 \rightarrow {}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$	
2	$4 \rightarrow {}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$	
3	$3 \rightarrow {}_2H_1 = {}_2C_1 = 2$	

A가 0개 받았다고 가정하면 C, D가 받는 흰색 모자는 6개입니다. 이 중에서 C는 1개 이상을 받아야 한다고 했고, D는 아직 모자가 없으니까 무조건 하나는 받아야 합니다. 따라서 미리 각각 한 개의 흰색 모자를 주면 남은 건 4개죠. 그러면 C, D 두 명에게 같은 공 4개를 주는 경우가 됩니다. 따라서 선택종류 2가지에 선택횟수 4번으로 ${}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$가 되죠. 나머지도 마찬가지로 하면 됩니다. 따라서 총 경우의 수는 $3\times2\times14=84$입니다.

2-3) 5100일 때

A가 검은색 모자 5개를 받고 나머지 한 명이 1개를 받습니다. 그럼 일단 그 사람을 정해야겠죠? B, C, D가 받을 수 있으니까 경우의 수는 3입니다. B가 받았다고 가정해볼게요.

방금과 마찬가지로 (다)조건을 만족시키기 위해서는 검은색 모자를 가지고 있는 사람이어야 합니다. 그럼 딱 나왔네요. A와 B가 만족시켜야 합니다. 따라서 흰색 모자를 A는 4개 이하, B는 0개 받아야 합니다. 이거도 가봅시다!

A	C	D
0	$6 \rightarrow {}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$	
1	$5 \rightarrow {}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$	
2	$4 \rightarrow {}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$	
3	$3 \rightarrow {}_2H_1 = {}_2C_1 = 2$	
4	$2 \rightarrow {}_2H_0 = {}_1C_0 = 1$	

이렇게 해서 총 15가지 경우가 있습니다. 따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 15 = 45$이네요.

2-4) 6000일 때

A가 검은색 모자 6개를 전부 다 가지면 됩니다. 그런데... (다)조건에 따르면 A와 나머지 한 명은 검은색 모자의 개수>흰색 모자의 개수이어야 하는데 나머지 한명은 검은색 모자가 아예 없는데요? 이거는 말이 안 되는 경우네요.

이렇게 해서 총 $72 + 84 + 45 = 201$입니다.