

[한성은 모의고사]

| 고2(11월) 수1/수2 연습(1/2) |

| 한성은

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

고2 11월 모의고사 + 내신 범위입니다.

hansungeun.com

– 저자소개, 학습자료, 교재판매

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{2}} \times 27^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 18

2. $\sin \frac{3\pi}{2}$ 의 값은? [2점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (t^2 + t + a) dt = 6$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

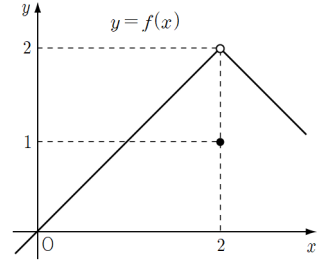
5. 반지름의 길이가 2이고 호의 길이가 4인 부채꼴의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

6. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 - 2a_3 + a_8 = 20$ 일 때, $a_{20} - a_{15}$ 의 값은? [3점]

- ① 25 ② 27 ③ 29
④ 31 ⑤ 33

7. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

8. 도함수가 $f'(x) = 6(x^2 + x)$ 인 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 2일 때, 극댓값은? [3점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

10. 함수 $f(x) = x^3$ 에 대하여 두 곡선 $y = f(x)$, $y = f(x-1) + 7$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{27}{2}$ ② 12 ③ $\frac{21}{2}$
④ 9 ⑤ $\frac{15}{2}$

9. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시간 $t(t > 0)$ 에서의 위치 x_1, x_2 가

$$x_1 = t^2 - 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}t^2 + 4t + a$$

이다. 두 점 P, Q가 서로 만나며 속도가 같아지는 시각이 존재할 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{8}{3}$ ② -3 ③ $-\frac{10}{3}$
④ $-\frac{11}{3}$ ⑤ -4

11. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\int_1^x (t-2)f(t)dt = x^3 + ax^2 + bx - 1$$

를 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

[3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

12. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & (x \leq 1) \\ x^3 & (x > 1) \end{cases}$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$ 의 값은? [3점]

- ① -9 ② -5 ③ -1
 ④ 1 ⑤ 5

13. $\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$ 인 실수 θ 에 대하여

$$\tan \theta + \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = 4$$

일 때, $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. 최솟값이 1인 이차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+2) - f(x-2)}{x-2} = 2$$

를 만족시킬 때, $f(6)$ 의 값은? [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

15. 다음은 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $x \geq 0$ 일 때,

$$x^n - 1 \geq n(x-1) \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

i) $n=2$ 일 때,

$$(x-1)^2 \geq 0$$

이므로 (*)이 성립한다.

ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때 (*)이 성립한다고 가정하면,

$$x^k - 1 \geq k(x-1)$$

이다. $n=k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} x^{k+1} - 1 - (k+1)(x-1) &= x(x^k - 1) + \boxed{\text{(가)}} - (k+1)(x-1) \\ &\geq x\{k(x-1)\} + x - 1 - (k+1)(x-1) \\ &= k \times \boxed{\text{(나)}} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

i), ii)에 의해 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 $x \geq 0$ 일 때,

$$x^n - 1 \geq n(x-1)$$

이 성립한다.

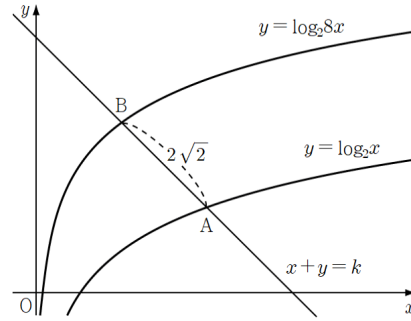
위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(x)$, $g(x)$ 이라 할 때, $f(5)+g(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

16. 그림과 같이 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = \log_2 8x$ 가

직선 $x+y=k$ 와 만나는 점을 각각 A, B라

하자. $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 일 때, k 의 값은? [4점]



- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

17. 함수 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + k$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$ 에서의 접선과 점 $(2\alpha, f(2\alpha))$ 에서의 접선이 서로 x 축에 대하여 대칭이다. $k + \alpha$ 의 값은? (단, $\alpha \neq 0$) [4점]

- ① $\frac{9}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$
 ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

18. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = \log_2 x$ 와 직선 $y = n - x$ 의 교점의 x 좌표를 a_n 이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

- ㄱ. $2 < a_4 < 3$
 ㄴ. $n < a_n + \log_2 n$
 ㄷ. $(a_n)^{n-1} < n^{a_n-1}$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \\ \frac{a_n+1}{2} & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 5 이하의 자연수 n 에 대하여 $a_n a_{n+1}$ 이

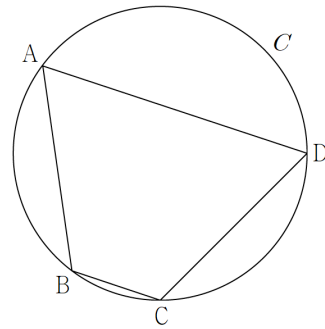
짝수일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 최솟값은? [4점]

- ① 37 ② 40 ③ 43
④ 46 ⑤ 49

20. 반지름의 길이가 5인 원 C 위의 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{BC} = \sqrt{10}$
(나) $\overline{CD} = 5\sqrt{2}$
(다) 사각형 ABCD의 넓이는 40이다.

$\overline{AB} \times \overline{AD}$ 의 값은? [4점]



- ① $30\sqrt{2}$ ② $30\sqrt{3}$ ③ 60
④ $30\sqrt{5}$ ⑤ $30\sqrt{6}$

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이다.
 (나) $x \geq 2$ 에서 $f(x) = -x^2 + ax + b$ 이다.
 (다) $x \leq 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이다.

$f(0) = 4$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

- ① $\frac{80}{3}$ ② $\frac{82}{3}$ ③ 28
 ④ $\frac{86}{3}$ ⑤ $\frac{88}{3}$

단답형

22. $\log_4 27 \times \log_3 16$ 의 값을 구하여라. [3점]

23. 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값을 구하여라. [3점]

24. 두 곡선 $y = x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + ax$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 16일 때, 양수 a 의 값을 구하여라. [3점]

26. 양수 a 와 0이 아닌 세 실수 x , y , z 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad 2^x = 3^y = a^z$$

$$(나) \quad \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{z}$$

- a 의 값을 구하여라. [4점]

25. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^5 a_k = 10$, $\sum_{k=1}^5 ka_k = 15$ 을 만족시킬 때,
 $\left\{ \sum_{k=1}^5 (k+1)a_k \right\} \times \left\{ \sum_{k=1}^4 ka_{k+1} \right\}$ 의 값을 구하여라. [3점]

27. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n-1} a_k = n^2 + n, \quad \sum_{k=1}^{2n} a_k = n^2 + 3n$$

일 때, $a_n a_{n+1} = 24$ 을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하여라. [4점]

28. 다항함수 $f(x)$ 와 자연수 n 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{n+1} + 1} = 2$$

$$(나) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 4$$

$f'(1) = 20$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라. [4점]

29. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 함수
 $f(x) = |x-5| + |x-15|$ 에 대하여

$$\sum_{k=6}^{10} f(a_k) = 50, \quad \sum_{k=11}^{15} f(a_k) = 100$$

이다. $f(a_1)$ 의 값을 구하여라. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 양수 a 에
 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq a) \\ f(x-a) + f(a) & (x > a) \end{cases}$$

는 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극솟값을 가지고
 $x = \beta$ 에서 극댓값을 가지며 $g(\alpha) = g(\beta)$ 인
 두 실수 α, β 가 존재한다.

$\int_0^{2a} g(x) dx = 32$ 일 때, $g(8)$ 의 값을 구하여라. [4점]

[고2(11월) 수1/수2 연습(1/2)]
정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	⑤	02	①	03	③	04	④	05	⑤
06	①	07	③	08	②	09	④	10	①
11	②	12	④	13	②	14	③	15	⑤
16	④	17	③	18	②	19	⑤	20	④
21	①	22	6	23	17	24	6	25	125
26	72	27	23	28	64	29	28	30	8

COMMENT 12

$f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 우미분계수는 3, 좌미분계수는 -2 이다.
$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \left\{ \frac{f(1+h)-f(1)}{h} + \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \right\}$$
이다.

COMMENT 13

$\tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$ 이므로 $\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{4}$ 이다. $(\cos\theta + \sin\theta)^2 = \frac{3}{2}$, $(\cos\theta - \sin\theta)^2 = \frac{1}{2}$ 이고
각을 짚어보면 $\cos\theta + \sin\theta < 0$, $\cos\theta - \sin\theta < 0$ 이므로 $\cos\theta + \sin\theta = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\cos\theta - \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

COMMENT 14

분자가 0으로 간다에서 $f(4)-f(0)=0$ 이므로 $f(x)=a(x-2)^2+1$ 이다.
 $f'(4)-f'(0)=2$ 에서 $f'(0)=-f'(4)$ 이므로 $f'(4)=1$ 이다. 따라서 $a=\frac{1}{4}$ 이다.

COMMENT 18

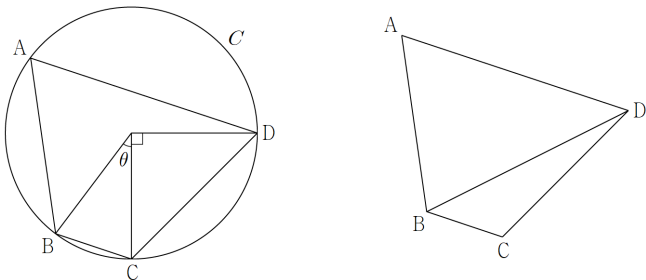
- ㄱ. $\log_2 2 < 4-2$ 이고 $\log_2 3 > 4-3$ 이다.
- ㄴ. $\log_2 a_n = n-a_n$ 이고 $\log_2 a_n < \log_2 n$ 이므로
- ㄷ. 준 식은 $\frac{\log_2 a_n}{a_n-1} < \frac{\log_2 n}{n-1}$ 이다. 기울기 봐봐.

COMMENT 19

아무 자연수나 a_n 에 넣고 뒤로 진행시켜봐. 나중에는 1, 1, 1, 1, ... 이 나온다.
그 바로 전 항은 2이다. 그 전 항은 3 또는 4, ... 이런 식이라는 것을 눈치 까야 한다.
 $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 가 최소가 되려면 그냥 $a_1=1, 1, 1, \dots, a_{10}=1$ 이면 좋겠는데
'5 이하의 자연수 n 에 대하여 $a_n a_{n+1}$ 이 짝수'
조건이 그것을 허락하지 않는군. $a_5=2$ 로 두는 것이 최소값이다.
이제 a_4 는 3 또는 4인데 최소로 가려면 $a_4=3$ 이고, a_3 은 5 또는 6인데 $a_3 a_4$ 가 짝수로 가야 하므로 $a_3=6$ 이고, ...
뭐 이런 식으로. $a_2=11$, $a_1=22$ 일 때가 최소이다. 다른 길로 가보려니까.. 그냥 망한다.

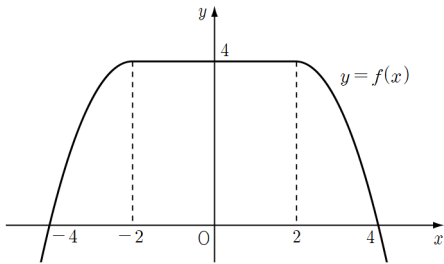
COMMENT 20

원의 중심을 O, $\angle BOC = \theta$ 라 하자. $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\angle COD = 90^\circ$ 이다.
삼각형 BOD에서 $\overline{BD} = 4\sqrt{5}$ 이고 사인법칙으로 $\sin(\angle BAD) = \sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.
삼각형 BCD의 넓이는 10이므로 삼각형 ABD의 넓이는 30, $\overline{AB} \times \overline{AD} = 30\sqrt{5}$ 이다.



COMMENT 21

곡선 $y=f(x)$ 가 y 축에 대하여 대칭이며 $x \leq 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이라면 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) = 0$ 이다.
 $f(2) = f(0) = 4$ 이고 실수 전체의 집합에서 미분가능에서 $f'(2) = 0$ 이므로 $x \geq 2$ 에서 $f(x) = -(x-2)^2 + 4$ 이다.



COMMENT 27

$a_{2n} = (n^2 + 3n) - (n^2 + n) = 2n,$
 $n \geq 2$ 일 때 $a_{2n-1} = (n^2 + n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2$ 이다.
 $a_1 = 2$ 이므로 $a_{2n-1} = 2.$
 $a_{11}a_{12} = 24, a_{12}a_{13} = 24$ 이다.

COMMENT 29

$f(x)$ 의 최솟값이 10인데 $f(a_6) + f(a_7) + f(a_8) + f(a_9) + f(a_{10}) = 50$ 이므로
 $f(a_6) = f(a_7) = \dots = f(a_{10}) = 10$ 이다. 따라서 $5 \leq a_6, a_{10} \leq 15$ 이고 이를 만족하려면 공차는 1 또는 2다.
공차가 1이면 $\sum_{k=11}^{15} f(a_k)$ 의 값이 개 크더라도 $a_{11} = 16, a_{12} = 17, \dots, a_{15} = 20$ 이고 $f(a_{11}) = 12, f(a_{12}) = 14, \dots, f(a_{15}) = 20$ 으로
100에 미치지 못한다. 따라서 공차는 2이고 $f(a_{13}) = 20$ 이다. (엄밀하게는 $a_{11} < 15$ 인 경우를 따로 고려해 줘야 함. 될 수 없다.)
 $f(a_{13}) = 20$ 이면 $a_{13} = 20$ 이다. $a_1 = -4$ 이고 $f(a_1) = 28$ 이다.

COMMENT 30

미분가능 조건에서 $f(0) = 0, f'(0) = f'(a)$ 이다.
 $\Rightarrow$ 점 $(\frac{a}{2}, f(\frac{a}{2}))$ 는 함수 $f(x)$ 의 [수2에서는 이름을 말할 수 없는 그것]이다. ㄴㄱㅈ.
극대 극소 조건에서 $f(0)$ 와 $f(x)$ 의 극솟값이 서로 같아야 한다. 열심히 썰러보자.
 $f(x) = x(x - \frac{3}{4}a)^2$ 이다. 적분값을 끼얹으면 $f(x) = x(x-3)^2$ 이다.
 $\Rightarrow$ 대칭성을 활용하면 적분 계산이 필요하지 않다.

