수학 전문가 그룹 N.G.D

2021학년도 대학수학능력시험 해설

2021학년도 대학수학능력시험 문제지

수학 영역
(가형)

성명			수험번호	

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 유형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

NGD

2021학년도 대학수학능력시험 문제지

제2교시

수학 영역(가 형)

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{9} \times 3^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $3^{\frac{1}{2}}$ ③ 3
④ $3^{\frac{3}{2}}$ ⑤ 9

2. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-2n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{9}$
④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{11}$

5. 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

6. 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})$의 값은? [3점]

① $\frac{83}{4}$ ② $\frac{85}{4}$ ③ $\frac{87}{4}$ ④ $\frac{89}{4}$ ⑤ $\frac{91}{4}$

7. 함수 $f(x)=(x^2-2x-7)e^x$의 극댓값과 극솟값을 각각 a, b라 할 때, $a\times b$의 값은? [3점]

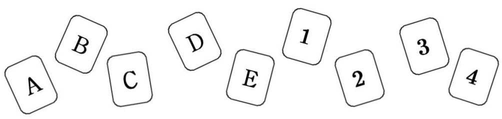
① -32 ② -30 ③ -28 ④ -26 ⑤ -24

8. 곡선 $y=e^{2x}$과 x축 및 두 직선 $x=\ln\frac{1}{2}$, $x=\ln 2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ $\frac{15}{7}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

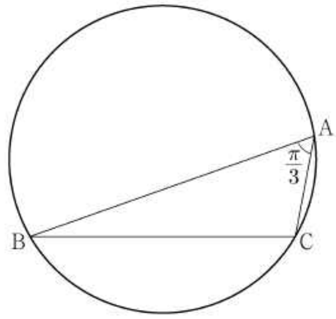
9. 문자 A, B, C, D, E가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드와 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 이 9장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 문자 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 각각 숫자가 적혀 있는 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{12}$



10. $\angle A=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$



11. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$ 의 값은? [3점]

① $4\sqrt{3}-6$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $5\sqrt{3}-8$
④ $2\sqrt{3}-3$ ⑤ $3\sqrt{3}-5$

12. 확률변수 X는 평균이 8, 표준편차가 3인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y가

$$\mathrm{P}(4 \le X \le 8)+\mathrm{P}(Y \ge 8)=\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}\left(Y \le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

13. $\frac{1}{4} < a < 1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

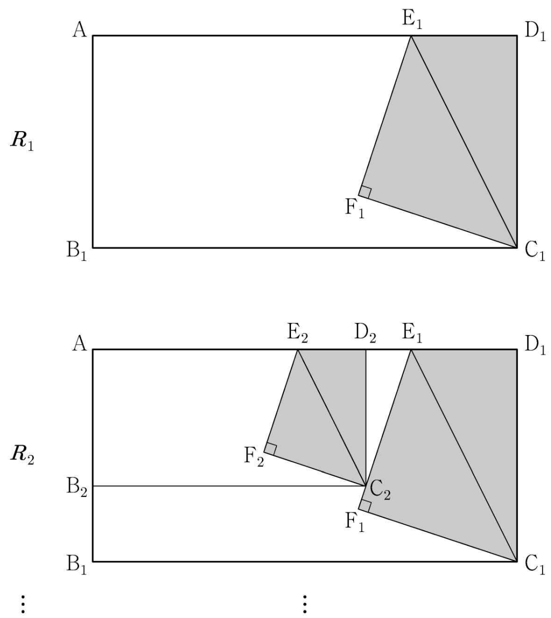
ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{\text{AB}} < \overline{\text{CD}}$이면 $\frac{1}{2} < a < 1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 그림과 같이 $\overline{\text{AB}_1}=2$, $\overline{\text{AD}_1}=4$인 직사각형 $\text{AB}_1\text{C}_1\text{D}_1$이 있다. 선분 AD_1을 $3:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $\text{AB}_1\text{C}_1\text{D}_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{\text{F}_1\text{E}_1}=\overline{\text{F}_1\text{C}_1}$, $\angle \text{E}_1\text{F}_1\text{C}_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $\text{E}_1\text{F}_1\text{C}_1$을 그린다. 사각형 $\text{E}_1\text{F}_1\text{C}_1\text{D}_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AE_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\text{AB}_2} : \overline{\text{AD}_2} = 1:2$인 직사각형 $\text{AB}_2\text{C}_2\text{D}_2$에 삼각형 $\text{E}_2\text{F}_2\text{C}_2$를 그리고 사각형 $\text{E}_2\text{F}_2\text{C}_2\text{D}_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{441}{103}$ ② $\frac{441}{109}$ ③ $\frac{441}{115}$
④ $\frac{441}{121}$ ⑤ $\frac{441}{127}$

15. $x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2},\qquad f(1)=5$$

이다. $x<0$에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$의 값은? [4점]

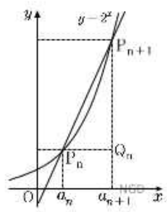
(가) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$이다. (나) $f(2)+g(-2)=9$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

16. 상수 $k(k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고 곡선 $y=2^x$위의 두 점 $\mathrm{P}_n\left(a_n,\ 2^{a_n}\right)$, $\mathrm{P}_{n+1}\left(a_{n+1},\ 2^{a_{n+1}}\right)$을 지나는 직선의 기울기는 $k\times 2^{a_n}$이다.

점 P_n을 지나고, x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n이라 하고 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 하자. 다음은 $a_1=1$, $\dfrac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.



두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기가 $k\times 2^{a_n}$이므로 $2^{a_{n+1}-a_n}=k\left(a_{n+1}-a_n\right)+1$ 이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은 방정식 $2^x=kx+1$의 해이다. $k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이고, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다. 점 Q_n의 좌표가 $\left(a_{n+1},\ 2^{a_n}\right)$이므로 $A_n=\dfrac{1}{2}\left(a_{n+1}-a_n\right)\left(2^{a_{n+1}}-2^{a_n}\right)$ 이다. $\dfrac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 $\boxed{(가)}$ 이고, 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\boxed{(나)}$ 이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+\dfrac{g(4)}{f(2)}$의 값은? [4점]

① 118　② 121　③ 124　④ 127　⑤ 130

17. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼, 3 이상이면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 15 번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

18. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$

라 하자. $(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

[4점]

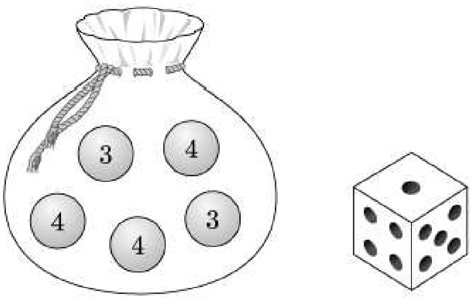
① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

19. 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
> 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고,
> 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은? [4점]

① $\frac{13}{180}$ ② $\frac{41}{540}$ ③ $\frac{43}{540}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{47}{540}$



20. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0,\ 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)dx=2,\ \int_{-1}^{1} xh(x)dx=-\frac{1}{32}$$
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
> (나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91 ② 92 ③ 93
④ 94 ⑤ 95

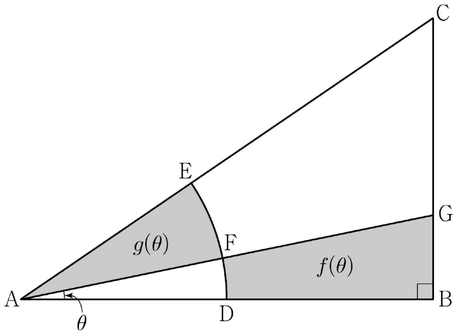
단답형

22. $\left(x + \dfrac{3}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 6}{x - 1}$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오.

[3점]

24. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\angle \mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자.
호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자.
$\angle \mathrm{BAG}=\theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$ [3점]



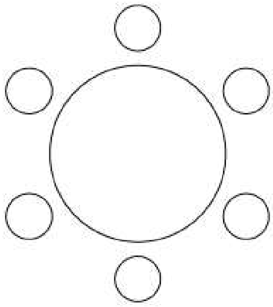
25. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}a_k=55$일 때, $\sum_{k=1}^{5}k(a_k-3)$의 값을 구하시오. [3점]

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다.

이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오.

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) A와 B는 이웃한다. (나) B와 C는 이웃하지 않는다.



27. $\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$ 의 값이 40 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

28. 두 상수 a, b $(a < b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = (x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x) = x^3 + x + 1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하다.

(나) $h'(3) = 2$

29. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.
> (나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 이상이다.
> (다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f\left(\sin^2 \pi x\right)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2021년도
대수능

배포본이 아닌 hwp 원본이 필요하시면 다음 카페

by N.G.D 수학적 실험

에 방문하셔서 NGD 작업에 참여하시면 받으실 수 있습니다.

수학 전문가 그룹

N.G.D

math whiz

강혁 - 서울대치 - 모아시스수학 - ☎ 010.3790.1715
구덕문 - 부산해운대 - 아연학원 - ☎ 010.3558.6123
권도형 - 울산옥동 - 더플러스수학학원 - ☎ 052.260.9981
권세욱 - 경기광명 - 하피수학학원 - ☎ 02.899.7360
김광현 - 인천송도 - 선심수학학원 - ☎ 032.818.1999
김군용 - 경기남양주 - 매쓰메카수학전문학원 - ☎ 010.7142.9927
김대호 - 충북청주 - 온수학전문학원 - ☎ 010.2709.0502
김동규 - 경기화성동탄 - 학꿈수학 - ☎ 010.8624.6738
김문수 - 경기용인 - 생각의창수학학원 - ☎ 010.2105.8463
김미선 - 경기분당 - 패러다임수학 - ☎ 010.3056.5452
김상운 - 대구수성 - 진솔수학 - ☎ 053.742.0553
김성민 - 충남천안 - GoMSLab. - ☎ 010.6315.3720
김영민 - 서울서초 - 다온수학학원 - ☎ 02.532.6650
김영제 - 서울대치 - 상아학원•상산브레인학원 - ☎ 010.2737.7997
김영태 - 대구수성 - 가인수학학원 - ☎ 053.755.6588
김정희 - 경기도남양주 - 다름수학 - ☎ 010.3406.0553
김주용 - 경기화성동탄 - 스타수학 - ☎ 010.9108.3443
김지선 - 서울반포 - 에프엑스수학 - ☎ 02.594.4888
김지수 - 서울성북 - 용문고 - ☎ 010.7618.6029
김태현 - 서울대치 - 미투스카이 - ☎ 010.4953.1211
김하늘 - 서울대치 - 역경패도수학전문 - ☎ 02.566.7854
김호영 - 서울동작 - 미래영재학원 - ☎ 010.3125.1141
김훈 - 부산진구 - 매쓰힐수학학원 - ☎ 010.2620.1705
남성현 - 경기안양평촌 - 김통영해병수학 - ☎ 031.476.0903
남호성 - 서울은평 - 퍼씰수학 - ☎ 02.385.9101
노인주 - 서울대치 - CMS - ☎ 010.2723.7885
Ray - 세종 - 4차원수학 - ☎ 010.8449.1974
류병욱 - 경기분당 - 엘피수학 - ☎ 031.711.2534
박기태 - 부산동래•해운대 - 프리미엄영어수학•더올림 - ☎ 010.8878.4254
박용운 - 서울대치 - 메이드수학 - ☎ 02.561.8973
박원식 - 서울중계 - 수아인수학학원 - ☎ 02.933.1211
박경균 - 하당교연학원 - ☎ 010.7370.7719
박정수 - 서울대치 - 해를학원•개념상상 - ☎ 010.9043.8353
박준석 - 서울대치 - 대치해냄 - ☎ 010.8644.1080
박현철 - 서울마포 - 시그마식스수학학원 - ☎ 02.322.4786
박형근 - 충북청주 - 유비수학학원 - ☎ 043.293.7796
반영민 - 서울대치 - 시대인재 - ☎ 010.5414.1028
배장윤 - 서울대치 - 대치미래탐구 - ☎ 010.8529.5170
서동범 - 서울강동 - 더블랙에듀 - ☎ 010.6201.4711
서민국 - 서울대치 - 시대인재 - ☎ 010.8346.7440
송동일 - 서울중계 - 청솔학원 - ☎ 010.9368.4406
신동휘 - 대구수성•달서 - 알파학원 - ☎ 010.9847.1793
신헌섭 - 부산화명 - 신수학전문학원 - ☎ 010.8921.2154
윤영호 - 서울은평 - SP학원 - ☎ 010.5344.6057
윤혜영 - 서울대치 - 수수배학원 - ☎ 010.3383.3235
이경덕 - 부산동래 - 수딴's 수학 - ☎ 051.924.2358
이광희 - 서울대치 - 메이드학원 - ☎ 010.4134.7134
이상학 - 경기일산 - 이투스네오 - ☎ 010.8891.0043
이성기 - 경기일산 - 싸이쌤수학 - ☎ 010.2696.1705
이소연 - 서울대치 - SY전문교육 - ☎ 010.9968.2190
이수동 - 경기부천 - E&T수학전문학원
이수민 - 경기오산 - 스마트쎈큰수학 - ☎ 010.9790.9731
이승헌 - 서울대치 - xmath수학학원 - ☎ 010.6597.5006
이용우 - 강원홍천 - 블루밍타임클래스 - ☎ 010.3126.9531
이정환 - 온라인 - 이투스•분당청솔학원 - ☎ 010.3266.3884
이제성 - 경기수원 - 제이매쓰 - ☎ 010.9402.9746
이종환 - 서울마포 - 카이수학전문학원 - ☎ 02.706.6173
이중현 - 경기분당 - 수이학원 - ☎ 010.4029.7138
장규만 - 세종충청 - UTOEDU(유토에듀) - ☎ 010.6226.7268
장석원 - 서울목동 - 목동미래탐구 - ☎ 010.4744.2481
정다움 - 서울중랑 - 정다움수학학원•러셀강남 - ☎ 02.2209.9981
정영기 - 경기의정부 - 정영기학원 - ☎ 010.6398.8856
정은혁 - 경기부천 - 퀸즈아카데미 - ☎ 010.7311.0710
정하윤 - 서울중계 - 랑수학 - ☎ 010.3278.3420
조현탁 - 서울중계 - 전문가집단 - ☎ 010.4439.1633
조훈진 - 서울양천 - 바람수학학원 - ☎ 02.2647.2511
지요한 - 부산사직 - 트리플수학학원 - ☎ 010.9074.5658
채종원 - 서울강서 - 분석수학강서1관 - ☎ 010.8994.2002
최승인 - 서울마포 - 종로학원 - ☎ 010.3787.7779
한연호 - 서울서초 - 상운학원 - ☎ 02.3474.9452
허접 - 상도•대방•노량진 - 수준별맞춤과외 - ☎ 010.6471.0175
허진 - 경기수원 - 이자경수학 - ☎ 031.236.8558
황완수 - 안양평촌 - 황선생수학 - ☎ 010.5549.1138
황은지 - 경기안산 - 멘토수학 - ☎ 010.7413.0816
<객원 member>
최재영 - 대구달서구 - 셰르파수학교습소 - ☎ 010.2577.4221
하세원-부산동래사직-정수열수학학원-☎ 051-502-2586

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

<2021학년도 대학수학능력시험 수학(가형)>

2021학년도 대학수학능력시험 수학(가형) 홀수형									
1	③	2	②	3	①	4	④	5	⑤
6	②	7	①	8	②	9	④	10	②
11	①	12	④	13	③	14	③	15	②
16	⑤	17	③	18	③	19	⑤	20	⑤
21	②	22	15	23	8	24	60	25	160
26	36	27	13	28	72	29	201	30	29

1) 정답 ③

문제해설

$\sqrt[3]{9}\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=3$

2) 정답 ②

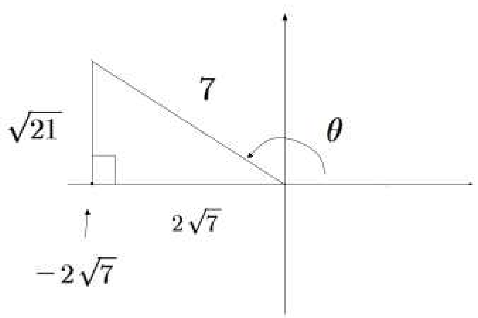
문제해설

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}{4n^2+2n+1-4n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}{2n+1}$$
$$=\frac{2+2}{2}=2$$

3) 정답 ①

문제해설 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 그림과 같이 제 2사분면의 각이므로 $\tan\theta$는 음의 값을 가진다.

피타고라스 정리에 의해



$\tan\theta=\frac{\sqrt{21}}{-2\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) 정답 ④

문제해설

$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{1}{4}$이므로

$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)$

$4\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{1}{3}$

$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$3\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡식을 ㉢식에 대입하면

$4\mathrm{P}(A\cap B)+3\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{10}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$ 이다.

5) 정답 ⑤

문제해설

$\left(\frac{1}{9}\right)^x<3^{21-4x}$

$3^{-2x}<3^{21-4x}$

밑이 1보다 크므로

$-2x<21-4x$

$x<\frac{21}{2}$

따라서 자연수 x의 개수는 10개

6) 정답 ②

문제해설

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=20$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}=\frac{5}{4}$

$\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=20+\frac{5}{4}=\frac{85}{4}$

7) 정답 ①

문제해설

주어진 함수 $f(x)=(x^2-2x-7)e^x$에 대해

$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x-7)e^x$

$=(x^2-9)e^x$

이때, e^x는 모든 x에 대해 항상 $e^x>0$이므로

$x=3$일 때, 극댓값을 $x=-3$일 때, 극솟값을 가진다.

$f(3)=-4e^3=a$, $f(-3)=8e^{-3}=b$

$\therefore\ a\times b=(-4e^3)\times 8e^{-3}=-32$

8) 정답 ②

문제 해설

곡선 $y=e^{2x}$는 구간 $\left[\ln\frac{1}{2},\ \ln 2\right]$에서 양수이므로 곡선

$y=e^{2x}$과 x축 및 두 직선 $x=\ln\frac{1}{2}$, $x=\ln 2$로 둘러싸인

부분의 넓이는

$$\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2}$$

$$=\frac{1}{2}\times 4-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{15}{8}$$

9) 정답 ④

문제 해설

5개의 카드와 4개의 숫자를 나열하는 전체 경우의 수는 9!

A카드 양옆에 오는 숫자를 선택하는 경우 ${}_4C_2=6$

A카드 양옆에 오는 숫자를 순서를 바꾸는 경우 $2!=2$

A카드와 양옆에 오는 숫자를 한 묶음으로 생각하여 7개를 일렬로 나열하는 경우 7!

즉, A카드의 양옆에 숫자가 오는 경우$=6\cdot 2\cdot 7!$

구하는 확률은 $\frac{6\cdot 2\cdot 7!}{9!}=\frac{6\cdot 2\cdot 7!}{9\cdot 8\cdot 7!}=\frac{1}{6}$

다른 풀이

5개의 카드와 4개의 숫자를 나열하는 전체 경우의 수는 9!

A카드 양옆에 오는 숫자를 선택하여 나열하는 경우 ${}_4P_2=12$

A카드와 양옆에 오는 숫자를 한 묶음으로 생각하여 7개를 일렬로 나열하는 경우 7!

따라서 구하는 확률은 $\frac{12\cdot 7!}{9!}=\frac{12\cdot 7!}{9\cdot 8\cdot 7!}=\frac{12}{9\cdot 8}=\frac{1}{6}$

10) 정답 ②

문제 해설

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times 7$이므로 $\overline{BC}=7\sqrt{3}$이다.

$\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$로부터 $\overline{AB}=3x$, $\overline{AC}=x$라 하면

삼각형 ABC에서 제 2코사인 정리에 의하여

$(7\sqrt{3})^2=(3x)^2+x^2-2\times 3x\times x\times\cos\frac{\pi}{3}$

$7x^2=147$, $x^2=21$ $\quad\therefore\ x=\sqrt{21}$

따라서 선분 AC의 길이는 $\sqrt{21}$이다.

11) 정답 ①

문제 해설 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$ 에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{3n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{k}{3n}}}$

$\frac{k}{3n}=x$라 하면 $\frac{1}{3n}=dx$이다. 따라서 $3\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{1+x}}\,dx$이고,

$1+x=t$라 하면 $dx=dt$이다.

따라서 $3\int_1^{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{1}{t}}\,dt=3\int_1^{\frac{4}{3}}t^{-\frac{1}{2}}dt=4\sqrt{3}-6$ 이다.

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{k}{3n}}}$ 에서

$1+\frac{k}{3n}$를 x로 $\frac{1}{3n}$을 dx로 바꾸면

적분구간은 $\left[1,\ \frac{4}{3}\right]$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{k}{3n}}}=3\int_1^{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{1}{x}}\,dx$$

$$=3\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{\frac{4}{3}}=4\sqrt{3}-6$$

12) 정답 ④

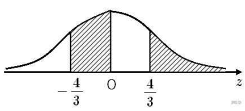
문제 해설

확률변수 X는 $N(8,\ 3^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 $N(m,\ \sigma^2)$을 따른다.

이때

$\mathrm{P}(4\le X\le 8)+\mathrm{P}(Y\ge 8)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{4}{3}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{8-m}{\sigma}\right)$



$=\frac{1}{2}$

이므로 $\frac{8-m}{\sigma}=\frac{4}{3}$가 성립한다.

$\therefore\ m=8-\frac{4}{3}\sigma$

따라서

$$P\left(Y\le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)=P\left(Z\le\frac{8+\frac{2\sigma}{3}-m}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(Z\le\frac{8+\frac{2\sigma}{3}-\left(8-\frac{4}{3}\sigma\right)}{\sigma}\right)$$
$$=P(Z\le 2)$$
$$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5+0.4772$$
$$=0.9772$$

13) 정답 ③

문제 해설 $\log_a x=1$에서 $x=a$이고 $\log_{4a}x=1$에서 $x=4a$이다.

또, $\log_a x=-1$에서 $x=\frac{1}{a}$이고 $\log_{4a}x=-1$에서 $x=\frac{1}{4a}$ 이므로

네 점 $A(a,\ 1)$, $B(4a,\ 1)$, $C\left(\frac{1}{a},\ -1\right)$, $D\left(\frac{1}{4a},\ -1\right)$이다.

ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 외분한 점은 $(0,\ 1)$이다. (참)

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 A와 D, B와 C의 x값이 각 각 같다. 그러므로 $a=\frac{1}{4a}$에서 $a=\frac{1}{2}$이다. (참)

ㄷ. $\overline{AB}=4a-a=3a$ 이고 $\overline{CD}=\frac{1}{a}-\frac{1}{4a}=\frac{3}{4a}$이므로

$\overline{AB}<\overline{CD}$에서

$3a<\frac{3}{4a}$

$4a^2<1\ (\because\ a>0)$

$(2a-1)(2a+1)<0$

$-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

이때 $\frac{1}{4}<a<1$이므로

$\therefore\ \frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ (거짓)

따라서 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14) 정답 ③

문제 해설

$\triangle C_1D_1E_1=\frac{1}{2}\times\overline{D_1E_1}\times\overline{C_1D_1}$

$=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$

$\triangle E_1F_1C_1$은 직각이등변삼각형 이므로

$\overline{E_1C_1}^2=\overline{E_1D_1}^2+\overline{C_1D_1}^2$

$=1^2+2^2=5$

$\triangle E_1F_1C_1=\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{C_1F_1}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{5}{4}$

$S_1=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

$\overline{D_2C_2}=x$, $\angle D_1E_1C_1=\alpha$, $\angle D_2E_1C_2=\theta$라 하면

$\tan\alpha=2$

$\tan\theta=\frac{x}{3-2x}$

$\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{x}{3-2x}$

$\tan\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{3}{4}\pi-\tan\alpha}{1+\tan\frac{3}{4}\pi\tan\alpha}=\frac{-1-2}{1-2}=3$이므로

$\frac{x}{3-2x}=3$

$x=9-6x$

$7x=9$, $x=\frac{9}{7}$

따라서 공비는 $\frac{9}{14}$

$\frac{\frac{5}{4}}{1-\left(\frac{9}{14}\right)^2}=\frac{441}{115}$

15) 정답 ②

문제 해설

$f(x)=\int 2-\frac{3}{x^2}dx$

$f(x)=2x+\frac{3}{x}+C_1$

$f(1)=5$이므로 $f(1)=2+3+C_1=5$, $f(x)=2x+\frac{3}{x}$

$g'(x)=f'(-x)=2-\frac{3}{x^2}$

$g(x)=\int 2-\frac{3}{x^2}dx=2x+\frac{3}{x}+C_2$

$f(2)=4+\frac{3}{2}$, $g(-2)=-4-\frac{3}{2}+C_2$

$f(2)+g(-2)=4+\frac{3}{2}-4-\frac{3}{2}+C_2=9$

$C_2=9$

$g(x)=2x+\frac{3}{x}+9$

$g(-3)=-6-1+9=2$

16) 정답 ⑤

문제 해설

$\frac{A_3}{A_1}=16$이므로 $\frac{2^{a_3+d}-2^{a_3}}{2^{1+d}-2}=\frac{2^{1+3d}-2^{1+2d}}{2^{1+d}-2^1}=16$에서

$d=2$

$2^x=kx+1$에서 $2^2=2k+1$

$k=\frac{3}{2}$

$a_1=1$이고, $d=2$이므로 $a_n=2n-1$이므로, $f(2)=3$

$A_n=\frac{1}{2}\times 2\times(2^{2n+1}-2^{2n-1})=3\times 2^{2n-1}$이므로 $g(4)=3\times 2^7$

$p+\frac{g(4)}{f(2)}=2+\frac{3\times 2^7}{3}=130$

17) 정답 ③

문제 해설

x_1: 2 이하의 눈이 나오는 경우의 수,

y_1: 3이상의 눈이 나오는 경우의 수

$\mathrm{P}(3x_1,\ y_1)$와 $3x+4y=0$ 사이의 거리를 확률변수 X라 하자.

$X=\frac{|9x_1+4y_1|}{\sqrt{9+16}}=\frac{1}{5}(9x_1+4y_1)(\because\ x_1\geq 0,\ y_1\geq 0)$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\mathrm{E}\left(\frac{9}{5}x_1+\frac{4}{5}y_1\right)\\&=\frac{9}{5}\mathrm{E}(x_1)+\frac{4}{5}\mathrm{E}(y_1)\end{aligned}$$

$x_1\sim\mathrm{B}\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$이고, $y_1\sim\mathrm{B}\left(15,\ \frac{2}{3}\right)$이므로

$\mathrm{E}(x_1)=5,\ \mathrm{E}(y_1)=10$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\frac{9}{5}\mathrm{E}(x_1)+\frac{4}{5}\mathrm{E}(y_1)\\&=9+8\\&=17\end{aligned}$$

18) 정답 ③

문제 해설

step.1

x의 범위에 따라서 극한값을 나누어보면 다음과 같다.

(ⅰ) $-1<x<1$일 때

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}=2x$

(ⅱ) $x=1$일 때

$f(1)=\frac{a}{4}$

(ⅲ) $x=-1$일 때

$f(-1)=-\frac{a}{4}$

(ⅳ) $x<-1,\ x>1$일 때

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x+\frac{2}{x^{2n-1}}}{3+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{(a-2)}{3}x$

step.2

$(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$

$f(1)=\frac{a}{4}$이므로

$f(f(1))=\frac{5}{4}$

$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{5}{4}$가 될 수 있는 값을 위 범위에 따라서 구해본다.

(ⅰ) $-1<\frac{a}{4}<1$일 때 $f(x)=2x$이므로

$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{2}=\frac{5}{4}$가 되어 $a=\frac{5}{2}$

(ⅱ) $\frac{a}{4}=1$일 때 $f(x)=\frac{a}{4}$이므로

$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$가 되어

$a=5$이지만 조건에 모순되어 성립할 수 없다.

(ⅲ) $\frac{a}{4}=-1$일 때

$f\left(\frac{a}{4}\right)=-\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$가 되어

$a=-5$이지만 조건에 모순되어 성립할 수 없다.

(ⅳ) $\frac{a}{4}<-1,\ \frac{a}{4}>1$일 때 $f(x)=\frac{(a-2)}{3}x$이므로

$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{5}{4}$를 만족시키는 a의 값을 구하면

$\frac{(a-2)}{3}\cdot\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$

$a^2-2a-15=0$

$a=5$ 또는 $a=-3$ 중에서 조건을 만족시키는 $a=5$

따라서 모든 a의 값의 합은 $\frac{5}{2}+5=\frac{15}{2}$이다.

19) 정답 ⑤

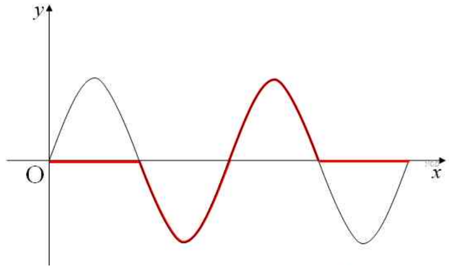
문제 해설

주머니에서 3이 나오는 경우
주머니에서 4가 나오는 경우로 나눌 수 있다.
각각은 배반 사건이므로 각각의 확률을 계산해 더 하면 된다.
i) 주머니에서 3이 나오는 경우
주머니에서 3이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$,
주사위를 3번 던지니 하나의 사건이 나올 확률은
$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$
두 사건을 곱사건 처리하면
$\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$이다.
위 확률에 점수의 합이 10점인 모든 경우의 수를 곱하여 확률을 계산하면 된다.
처음 나온 주사위 눈을 a
두 번째 나온 주사위 눈을 b
세 번째 나온 주사위 눈을 c
라 두면
$a+b+c=10$
$(a,\ b,\ c)=(6,\ 3,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $3!=6$가지
$(a,\ b,\ c)=(6,\ 2,\ 2)$일 때 $a,\ b,\ c$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{3!}{2!}=3$가지
$(a,\ b,\ c)=(5,\ 4,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $3!=6$가지
$(a,\ b,\ c)=(5,\ 3,\ 2)$일 때 $a,\ b,\ c$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $3!=6$가지
$(a,\ b,\ c)=(4,\ 4,\ 2)$일 때 $a,\ b,\ c$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{3!}{2!}=3$가지
$(a,\ b,\ c)=(4,\ 3,\ 3)$일 때 $a,\ b,\ c$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{3!}{2!}=3$가지
총 경우의 수를 더하면 27가지이므로
구하는 확률은 $\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 27$이다.
ii)주머니에서 4가 나오는 경우
주머니에서 4가 나올 확률은 $\frac{3}{5}$
주사위를 3번 던지니 하나의 사건이 나올 확률은
$\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$이다.
위 확률에 점수의 합이 10점인 모든 경우의 수를 곱하여 확률을 계산하면 된다.
처음 나온 주사위 눈을 a
두 번째 나온 주사위 눈을 b
세 번째 나온 주사위 눈을 c
네 번째 나온 주사위 눈을 d
라 두면
$a+b+c+d=10$
$(a,\ b,\ c,\ d)=(6,\ 2,\ 1,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{2!}=12$가지
$(a,\ b,\ c,\ d)=(5,\ 3,\ 1,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{2!}=12$가지
$(a,\ b,\ c,\ d)=(5,\ 2,\ 2,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{2!}=12$가지
$(a,\ b,\ c,\ d)=(4,\ 4,\ 1,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$가지
$(a,\ b,\ c,\ d)=(4,\ 3,\ 2,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $4!=24$가지
$(a,\ b,\ c,\ d)=(4,\ 2,\ 2,\ 2)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{3!}=4$가지
$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 3,\ 3,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{3!}=4$가지
$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 3,\ 2,\ 2)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$가지
총 경우의 수를 더하면 80가지이므로
구하는 확률은 $\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 80$이다.
따라서 i), ii)의 각각의 확률을 더하여
구하고자 하는 확률을 표현하면
$\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 27+\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 80$
$=\frac{47}{540}$이다.

20) 정답 ⑤

문제해설

$g(x)=\begin{cases}0\\1\end{cases}$ 이므로,
$y=f(nx)g(x)$의 그래프는 아래와 같은 형태로 추측된다.

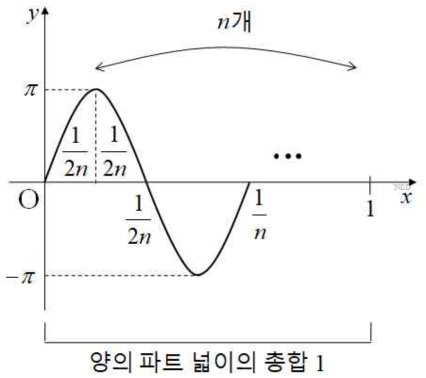


그런데,

$$\int_0^{\frac{1}{2n}} f(nx)dx = \int_0^{\frac{1}{2n}} \pi \sin 2\pi x dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2n}\cos 2n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2n}}$$

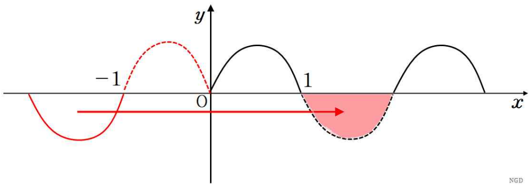
$$= \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$$



$y=h(x)$ 그래프의 x축 위쪽 부분의 넓이의 총합이 2이므로

$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2$이기 위해서 $g(x)=\begin{cases} 0 & (\text{if } f(x) < 0) \\ 1 & (\text{if } f(x) \geq 0) \end{cases}$이다.

$y=xf(nx)$는 우함수라는 사실에서 아래 그림과 같이 생각하면



$$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \int_0^1 xf(nx)dx$$

$$= \int_0^1 \pi x \sin(2n\pi x)dx$$

$$= \left[-\frac{x}{2n}\cos(2n\pi x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2n}\cos(2n\pi x)dx$$

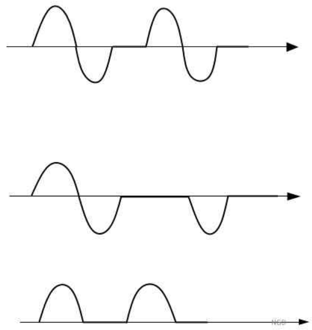
$$= -\frac{1}{2n} + \left[\frac{1}{4n^2\pi}\sin(2n\pi x)\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$$

$\therefore \ n=16$

다른 풀이

$f(nx)=\pi \sin 2n\pi x$은 주기가 $\frac{1}{n}$인 주기함수이고 $g(x)$의 함숫값이 0인 구간에서는 $h(x)$의 함숫값도 0이 되고 $g(x)$의 함숫값이 1인 구간에서는 $h(x)$는 $f(nx)$와 동일하다. 그리고 $h(x)$가 실수 전체에서 연속이므로 $g(x)$가 0이 되는 구간은 $f(nx)$의 함숫값이 0이 되는 점을 구간의 양끝으로 하면 된다. 따라서 아래 그래프들이 함수 $h(x)$ 그래프의 일부임을 알 수 있다.



$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2$을 살펴보면 $h(x)$그래프가 x축 위에 있는 경우와 아래에 있는 경우가 짝이 맞으면 적분값은 0이므로 그래프가 x축 위에 있는 구간의 수와 x축 아래에 있는 구간의 수의 차를 k라 하면

$$\int_{-1}^{1} h(x)dx = k\int_0^{\frac{1}{2n}} f(nx)dx$$

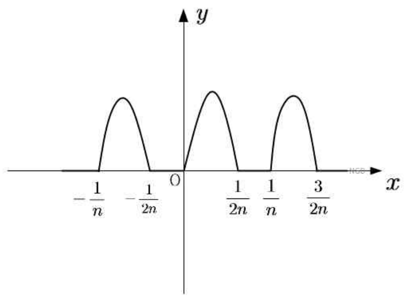
$$= k\int_0^{\frac{1}{2n}} \pi \sin 2n\pi x\, dx$$

$$= k\left[\frac{1}{2n}(-\cos 2n\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{k}{n} = 2$$

$\therefore \ k=2n$

$f(x)$는 주기가 $\frac{1}{n}$인 주기함수이므로 구간 $[-1,\ 1]$에서 $2n$개의 그래프가 반복해서 나오므로 $h(x)$의 그래프 개형은 아래와 같다.



$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = -\frac{1}{32}$를 살펴보면 $h(x)$는 x축 위에 그래프가 그려지지만 $x<0$인 구간에서 $xh(x)<0$이고 $x>0$인 구간에서 $xh(x)>0$이다.

$$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \int_0^1 xh(x)dx$$

$\left(\because \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{2n}} xh(x)dx = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} xh(x)dx\right)$

$$= \int_0^1 xf(nx)dx$$

$$= \pi\left[-x \times \frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x\right]_0^1 + \pi\int_0^1 \frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$$

$\therefore\ n = 16$

21) 정답 ②

문제 해설

조건 (가)로부터 $a_2 = a_2 \times a_1 + 1$이므로 $a_2(1-a_1) = 1$ … (i)

$a_4 = a_2 \times a_2 + 1$

$a_8 = a_2 \times a_4 + 1 = a_2(a_2 \times a_2 + 1) + 1 = \{a_2\}^3 + a_2 + 1$ … (ii)

조건 (나)로부터

$a_3 = a_2 \times a_1 - 2$

$a_7 = a_2 \times a_3 - 2 = a_2(a_2 \times a_1 - 2) - 2$

$a_{15} = a_2 \times a_7 - 2 = a_2(a_2(a_2 \times a_1 - 2) - 2) - 2$

$= a_1 \times \{a_2\}^3 - 2\{a_2\}^2 - 2a_2 - 2$ … (iii)

$a_8 - a_{15} = 63$이므로, (ii)−(iii)으로부터

$(1-a_1)\{a_2\}^3 + 2\{a_2\}^2 + 3\{a_2\} + 3 = 63$

한편 (i)에서 $(1-a_1) = \frac{1}{a_2}$이므로, 이를 준식에 대입하면

$\frac{1}{a_2} \times \{a_2\}^3 + 2\{a_2\}^2 + 3\{a_2\} + 3 = 63$

이를 정리하면

$\{a_2\}^2 + \{a_2\} - 20 = (a_2 - 4)(a_2 + 5) = 0$

$\therefore\ a_2 = 4$ 또는 $a_2 = -5$

$a_2 = 4$일 때 (i)에 의하여 $a_1 = \frac{3}{4}$

$a_2 = -5$일 때 (i)에 의하여 $a_1 = \frac{6}{5}$이지만, 이는 조건 $0 < a_1 < 1$에 모순이다.

따라서 $a_1 = \frac{3}{4}$이고 $a_2 = 4$이다.

또한 $a_8 = \{a_2\}^3 + a_2 + 1 = 64 + 4 + 1 = 69$이므로

$\therefore\ \frac{a_8}{a_1} = 69 \times \frac{4}{3} = 92$

다른 풀이

(가)에서 $a_2 = a_2 \times a_1 + 1$ ……①

$a_4 = a_2 \times a_2 + 1$

$a_8 = a_2 \times a_4 + 1$

$= a_2(a_2^2 + 1) + 1$

$= a_2^3 + a_2 + 1$ ……②

(나)에서 $a_3 = a_2 \times a_1 - 2$

$a_7 = a_2 \times a_3 - 2$

$= a_2 \times (a_2 \times a_1 - 2) - 2$

$= a_2^2 \times a_1 - 2a_2 - 2$

$a_{15} = a_2 \times a_7 - 2$

$= a_2 \times (a_2^2 \times a_1 - 2a_2 - 2) - 2$

$= a_2^3 \times a_1 - 2a_2^2 - 2a_2 - 2$ ……③

$a_8 - a_{15} = 63$에서 ②, ③을 대입하면

$63 = a_2^3 + a_2 + 1 - \{a_2^3 \times a_1 - 2a_2^2 - 2a_2 - 2\}$

$= (1-a_1)a_2^3 + 2a_2^2 + 3a_2 + 3$

①에서 $1 - a_1 = \frac{1}{a_2}$이므로 이것을 위에 대입하여 정리하면

$63 = a_2^2 + 2a_2^2 + 3a_2 + 3$

$3a_2^2 + 3a_2 - 60 = 0,\ a_2^2 + a_2 - 20 = 0$

$\therefore a_2 = 4,\ -5$

$\therefore\ a_1 = \frac{3}{4},\ \frac{6}{5}$

그런데 $0 < a_1 < 1$이므로 $a_1 = \frac{3}{4},\ a_2 = 4$이다.

②에서 $a_8 = 4^3 + 4 + 1 = 69$이므로

$\therefore\ \frac{a_8}{a_1} = \frac{69}{\frac{3}{4}} = 92$

22) 정답 15

문제 해설

$\left(x + \frac{3}{x^2}\right)^5 = {}_5C_r x^{5-r}(3x^{-2})^r$ 에서 전개하여 정리하면

$\left(x + \frac{3}{x^2}\right)^5 = {}_5C_r\, 3^r\, x^{5-3r}$ 이고

x^2의 계수는 $r = 1$일 때 ${}_5C_1 \times 3^1 = 15$

23) 정답 8

문제 해설

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 6}{x - 1}$$

$$= \frac{(x-1)^2 - 7}{x - 1}$$

$$= x - 1 - \frac{7}{x-1}$$

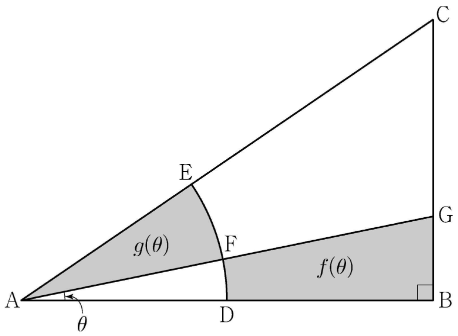
이고, 이를 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=1+\frac{7}{(x-1)^2}$$

$$\therefore\ f'(0)=1+7=8$$

24) 정답 60

문제 해설



삼각형 ABG에서 $\angle \mathrm{BAG}=\theta$, $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=2\tan\theta$

부채꼴 EAD에서 $\angle \mathrm{BAG}=\theta$이므로 $\angle \mathrm{EAF}=2\theta$

($\because$ 중심각의 크기는 호의 길이에 비례)

따라서

삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분 넓이 $f(\theta)$는

$$f(\theta)=(\triangle \mathrm{ABG}\text{의 넓이})-(\text{부채꼴 ADF의 넓이})$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\times\overline{\mathrm{BG}}-\frac{1}{2}\times 1^2\times\theta$$
$$=2\tan\theta-\frac{\theta}{2}$$

부채꼴 AFE의 넓이 $g(\theta)$는

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times 1^2\times 2\theta=\theta$$

이므로

$$40\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=40\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\tan\theta-\frac{\theta}{2}}{\theta}$$
$$=40\times\left(2-\frac{1}{2}\right)$$
$$=60$$

25) 정답 160

문제 해설

$\sum_{k=1}^{5}a_k=55$에서 공차를 d라하면

$$\frac{5\{2\times 3+4\times d\}}{2}=55$$

$d=4$

$a_n=4n-1$

$$\sum_{k=1}^{5}k(4k-1-3)=\sum_{k=1}^{5}(4k^2-4k)=4\times\frac{5\times 6\times 11}{6}-4\times\frac{5\times 6}{2}$$
$$=160$$

26) 정답 36

문제 해설

A와 B가 이웃하는 전체의 경우에서 B와 C가 이웃하는 경우를 제외한다.

(i) A와 B가 이웃하는 경우

$(5-1)!\times 2=48$

(ii) A와 B가 이웃하면서 동시에 C가 B와 이웃하는 경우

$2\times(4-1)!=12$

(i)과 (ii)에 의하여

$\therefore\ 48-12=36$ (가지)

다른풀이 C를 제외한 5명 중 A와 B를 이웃하게 묶은 후 배열하면 $(4-1)!\times 2!$

여기에 C는 B와 이웃하지 못하므로 3군데 중 한 곳에 위치할 수 있다.

따라서, $3!\times 2!\times 3=36$

27) 정답 13개

문제 해설

주어진 조건을 정리하면

$\log_{16}4n^4-\log_{16}n=\log_{16}4n^3$ 이다.

따라서 $\log_{16}4n^3=m$ (단, $m\le 40$ 인 자연수) 이라 두면

$4n^3=16^m$ (단, $m\le 40$ 인 자연수) 이다.

즉 $n=2^p$ (단, $p\ge 0$) 일 때,

$2^{2+3p}=2^{4m}$ 이다.

따라서 $2+3p=4m$ 을 만족하는 자연수 해를 구하면

$p=2,\ 6,\ 10\cdots$ 의 꼴이고

$2+3p=4m\le 160$ 이므로 $p\le 52$ 이다.

따라서 이를 만족하는 p의 개수는 13개 이다.

즉 n의 개수도 13개 이다.

28) 정답 72

문제 해설

$A(x)=(x-1)|h(x)|$라 하자.

$(x-1)$은 모든 실수에서 미분가능하므로

(가) 조건에 의해 함수 $A(x)$가 모든 실수에서 미분가능하기 위해서는

$|h(x)|$가 미분불가능한 점에서 미분이 가능해야 한다.

즉, $h(x)=0$인 점에서 함수 $A(x)$가 미분이 가능해야 한다.

함수 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$이므로

$h(x)=f(g^{-1}(x))=(g^{-1}(x)-a)(g^{-1}(x)-b)^2$에서

$h(x)=0$을 만족하는 점은 $g^{-1}(x)=a$ 또는 $g^{-1}(x)=b$인 점이다.

$f'(b)=0$이고,

$g^{-1}(x)=b$를 만족하는 x를 α라 하면

함수 $g(x)$가 증가함수이므로 $g^{-1}(x)$ 또한 증가함수이다.

$x\to\alpha-$이면 $g^{-1}(x)\to b-$이고, $x\to\alpha+$이면 $g^{-1}(x)\to b+$ 이므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{A(\alpha+h)-A(\alpha)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{(\alpha+h-1)|f(g^{-1}(\alpha+h))|-(\alpha-1)|f(g^{-1}(\alpha))|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{(\alpha+h-1)|f(g^{-1}(\alpha+h))|-(\alpha-1)|f(b)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{(\alpha+h-1)|f(g^{-1}(\alpha+h))|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}(\alpha+h-1)\times\lim_{h\to0-}\frac{|f(g^{-1}(\alpha+h))|}{h}$$

$$=(\alpha-1)\times\lim_{h\to0-}\frac{f(g^{-1}(\alpha+h))}{h}$$

$$=(\alpha-1)\times f'(b)$$

$$=0$$

같은 방식으로 $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{A(\alpha+h)-A(\alpha)}{h}=0$

따라서 $g^{-1}(x)=b$를 만족하는 x에서 함수 $A(x)$는 미분가능하다.

$g^{-1}(x)=a$를 만족하는 x를 β라 하면, $f'(a)>0$이고

$x\to\beta-$이면 $g^{-1}(x)\to a-$이고, $x\to\beta+$이면 $g^{-1}(x)\to a+$ 이므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{A(\beta+h)-A(\beta)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{(\beta+h-1)|f(g^{-1}(\beta+h))|-(\beta-1)|f(g^{-1}(\beta))|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{(\beta+h-1)|f(g^{-1}(\beta+h))|-(\beta-1)|f(a)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{(\beta+h-1)|f(g^{-1}(\beta+h))|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}(\beta+h-1)\times\lim_{h\to0-}\frac{|f(g^{-1}(\beta+h))|}{h}$$

$$=(\beta-1)\times\lim_{h\to0-}\frac{-f(g^{-1}(\beta+h))}{h}$$

$$=(\beta-1)\times-f'(a)\ \cdots\cdots\ ㉠$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{A(\beta+h)-A(\beta)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{(\beta+h-1)|f(g^{-1}(\beta+h))|-(\beta-1)|f(g^{-1}(\beta))|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{(\beta+h-1)|f(g^{-1}(\beta+h))|-(\beta-1)|f(a)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{(\beta+h-1)|f(g^{-1}(\beta+h))|}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}(\beta+h-1)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(g^{-1}(\beta+h))|}{h}$$

$$=(\beta-1)\times\lim_{h\to0+}\frac{f(g^{-1}(\beta+h))}{h}$$

$$=(\beta-1)\times f'(a)\ \cdots\cdots\ ㉡$$

$x=\beta$에서 미분가능하기 위해서는 ㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$\beta=1$이고, $g^{-1}(\beta)=a$에서 $g^{-1}(1)=a$이므로

$g(a)=1$에서 $a=0$이다.

또한, $h'(3)=2$이므로 $f'(g^{-1}(3))(g^{-1})'(3)=2$이다.

이때, $g^{-1}(3)=1$이고,

$(g^{-1})'(3)=\dfrac{1}{g'(1)}=\dfrac{1}{3\times1^2+1}=\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 $f'(1)=8$이다.

$f(x)=x(x-b)^2$이고,

$f'(x)=(x-b)^2+2x(x-b)$에서

$f'(1)=(1-b)^2+2(1-b)=8$을 만족하는 실수 $b=-1,\ 5$

이때 문제에서 $a<b$라 하였으므로 $b=5$

$\therefore\ f(x)=x(x-5)^2,\ f(8)=72$

29) 정답 201

문제해설

흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생이 A, B라고 가정하면 검은색 모자를 나누어 주는 경우는

$(A,\ B,\ C,\ D)=(4,\ 2,\ 0,\ 0)$, $(4,\ 1,\ 1,\ 0)$, $(5,\ 1,\ 0,\ 0)$로 나눌수 있다.

i) $(A,\ B,\ C,\ D)=(4,\ 2,\ 0,\ 0)$일 때,

흰색 모자를 나누어주는 경우

A		B		C		D		
검은색	흰색	검은색	흰색	검은색	흰색	검은색	흰색	
4	0	2	0	0	1	0	5	⇒ 5가지
					2		4	
					3		3	
					4		2	
					5		1	
4	1	2	0	0	1	0	4	⇒ 4가지
					2		3	
					3		2	
					4		1	
4	2	2	0	0	⋮	0	⋮	⇒ 3가지
4	3	2	0	0	⋮	0	⋮	⇒ 2가지
4	0	2	1	0	⋮	0	⋮	⇒ 4가지
4	1	2	1	0	⋮	0	⋮	⇒ 3가지
4	2	2	1	0	⋮	0	⋮	⇒ 2가지
4	3	2	1	0	⋮	0	⋮	⇒ 1가지

따라서 $5+4+3+2+4+3+2+1=24$

그런데 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생이 C, D가 될수 있으므로

$24\times3=72$

ii) $(A,\ B,\ C,\ D)=(4,\ 1,\ 1,\ 0)$일 때,

흰색 모자를 나누어주는 경우

A		B		C		D			
검은색	흰색	검은색	흰색	검은색	흰색	검은색	흰색		
4	0	1	0	1	1	0	5		
					2		4		
					3		3	⇒	5가지
					4		2		
					5		1		
4	1	1	0	1	1	0	4		
					2		3	⇒	4가지
					3		2		
					4		1		
4	2	1	0	1	⋮	0	⋮	⇒	3가지
4	3	2	0	0	⋮	0	⋮	⇒	2가지

따라서 $5+4+3+2=14$가지

마찬가지로 B, C, D 순서를 바꾸는 경우가 6가지이므로

$14\times6=84$

iii) $(A,\ B,\ C,\ D)=(5,\ 1,\ 0,\ 0)$일 때,

흰색 모자를 나누어주는 경우

A		B		C		D			
검은색	흰색	검은색	흰색	검은색	흰색	검은색	흰색		
5	0	1	0	0	1	0	5		
					2		4		
					3		3	⇒	5가지
					4		2		
					5		1		
5	1	1	0	0	1	0	4		
					2		3	⇒	4가지
					3		2		
					4		1		
5	2	1	0	0	⋮	0	⋮	⇒	3가지
5	3	1	0	0	⋮	0	⋮	⇒	2가지
5	4	1	0	0	⋮	0	⋮	⇒	1가지

따라서 $5+4+3+2+1=15$가지

마찬가지로 B, C, D 순서를 바꾸는 경우가 3가지이므로

$15\times3=45$

i), ii), iii)에 의해서 $72+84+45=201$

다른 풀이

학생 A가 받을 수 있는 검은색 모자의 개수는 4또는 5이다.

(i) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수가 4이고,
남은 검은색 모자 2개를 B, C, D중 한 사람이 2개를 받는 경우

우선 학생 A에게 검은색 모자를 4개를 주고 남은 검은색 모자 2개를 받는 사람을 결정하는 방법의 수는 ${}_3C_1=3$이다.

이제 흰색 모자를 분배하는 방법을 생각해보자.

	A	검은색 모자 2개 받은 사람	검은색 모자를 받지 못한 사람 1	검은색 모자를 받지 못한 사람 2
흰색 모자를 받는 개수	p	q	r	s

$p+q+r+s=6,\ 0\le p<4,\ q=0$ 또는 $1,\ r\ge1,\ s\ge1$

㉠ $q=0$ 일 때,

$p+q+r+s=6,\ p\ge0,\ q=0,\ r\ge1,\ s\ge1$에서

$p=4,\ r=1,\ s=1$을 만족시키는 한 경우를 빼주면 되므로

${}_3H_4-1=14$(가지)

㉡ $q=1$ 일 때, ${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times(14+10)=72$(가지)이다.

(ii) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수가 4이고,
남은 검은색 모자 2개를 B, C, D중 두 사람이 각각 1개씩을 받는 경우

우선 학생 A에게 검은색 모자를 4개를 주고 남은 검은색 모자 2개를 한 개씩 받는 두 사람을 결정하는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$(가지)이다.

이제 흰색 모자를 분배하는 방법을 생각해보자.

	A	검은색 모자를 1개 받은 사람 1	검은색 모자를 1개 받은 사람 2	검은색 모자를 받지 못한 사람
흰색 모자를 받는 개수	p	q	r	s

이때, 조건 (다)를 만족시키기 위해서는

검은색 모자를 1개 받은 두 사람 중 한 사람은 흰색 모자를 받지 않고 다른 한 사람은 흰색 모자를 적어도 한 개 이상 받아야 한다.

㉠ $p+q+r+s=6,\ 0\le p<4,\ q=0,\ r\ge1,\ s\ge1$

$p+q+r+s=6,\ p\ge0,\ q=0,\ r\ge1,\ s\ge1$에서

$p=4,\ r=1,\ s=1$을 만족시키는 한 경우를 빼주면 되므로

${}_3H_4-1=14$(가지)

㉡ $p+q+r+s=6,\ 0\le p<4,\ q\ge1,\ r=0,\ s\ge1$

㉠의 경우의 수와 같으므로 14(가지)이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times(14+14)=84$

(iii) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수가 5이고, 남은 검은색 모자 1개를 B, C, D중 한 사람이 받는 경우

우선 학생 A에게 검은색 모자를 5개를 주고

남은 검은색 모자 1개를 받는 한 사람을 결정하는 방법의 수는 ${}_3C_1 = 3$ (가지)이다.

이제 흰색 모자를 분배하는 방법을 생각해보자.

	A	검은색 모자 1개 받은 사람	검은색 모자를 받지 못한 사람 1	검은색 모자를 받지 못한 사람 2
흰색 모자를 받는 개수	p	q	r	s

$p+q+r+s=6,\ 0 \le p \le 4,\ q=0,\ r \ge 1,\ s \ge 1$

${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times 15 = 45$ (가지)이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$72+84+45=201$ (가지)이다.

30) 정답 29

문제 해설

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$f'(x)=3(x-a)(x-b)$ $(a<b)$이고

모든 실수 x에 대하여 $0 \le \sin^2\pi x \le 1$이다.

실수 전체에서 함수 $g(x)$의 최대값과 최솟값은

$0 \le x \le 1$에서 함수 $f(x)$의 최대최소와 같다.

함수 $g'(x) = 2\pi\cos\pi x sin\pi x f'(\sin^2\pi x)$

$g'(x)=0$을 만족하는 실수 x는 $\cos\pi x=0$또는 $\sin\pi x=0$ 또는 $f'(\sin^2\pi x)=0$을 만족한다.

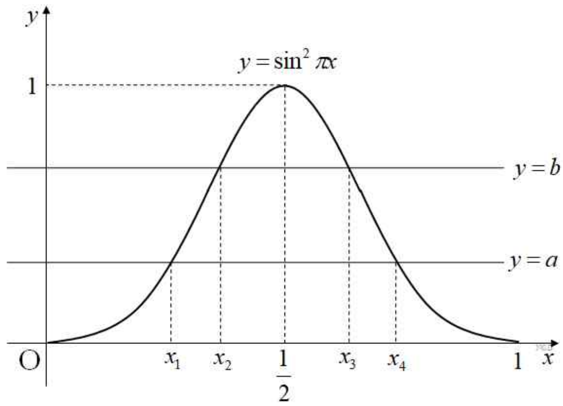
$0<x<1$에서 $\cos\pi x=0$또는 $\sin\pi x=0$ 또는 $f'(\sin^2\pi x)=0$을 만족하는 x의 값은 $x=\frac{1}{2}$와 $f'(\sin^2\pi x)=0$을 만족하는 실수 x이다.

(나) 조건에 의해서 $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이기 위해서는 $g'(x)=0$을 만족하는 실수 x의 개수가 최소 5개여야 한다.

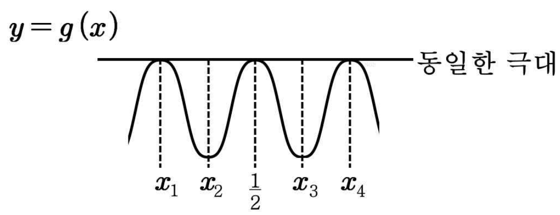
따라서, $f'(\sin^2\pi x)=0$을 만족하는 x의 개수는 최소 4이다.

$f'(\sin^2\pi x) = 3(\sin^2\pi x - a)(\sin^2\pi x - b) = 0$

$\sin^2\pi x = a$ 또는 $\sin^2\pi x = b$이다.



이때, 함수 $g(x)$의 그래프 개형은 아래 그림과 같다.



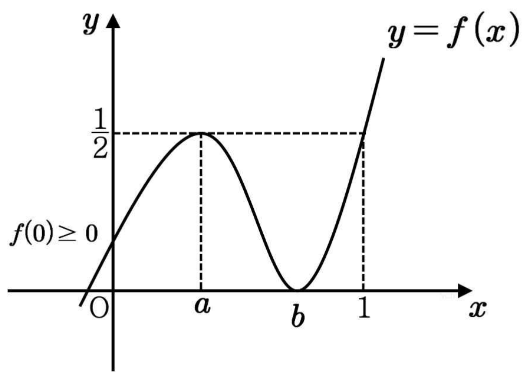
$f(a)=f(1)=\frac{1}{2}$, $f'(a)=0$, $f'(b)=0$을 만족하는 삼차함수 $f(x)$의 식은 아래와 같다.

$f(x)=(x-a)^2(x-1)+\frac{1}{2}$(단, $0<a<1$)

$b=\frac{a+2}{3}$

$0<x<1$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값이 각각 $\frac{1}{2}$와 0이므로 가능한 $y=f(x)$의 그래프 개형은 아래와 같다.

(i) $f(b)=0$이고 $f(0) \ge 0$인 경우

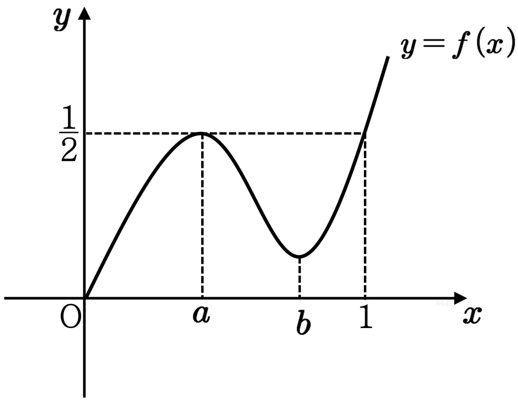


$f(b)=f\left(\frac{a+2}{3}\right)=4\left(\frac{a-1}{3}\right)^3+\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$

$0<a<1$의 조건을 만족하지 못한다.

(ii) $f(0)=0$이고 $f(b)\geq 0$인 경우



$f(0)=-a^2+\frac{1}{2}=0$

$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 $0<a<1$을 만족한다.

따라서 $f(x)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(x-1)+\frac{1}{2}$

$f(2)=\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(2-1)+\frac{1}{2}$

$=5-2\sqrt{2}$

따라서, $a=5$, $b=-2$

$a^2+b^2=29$

다른 풀이

x가 0에서 1까지 증가하면 $\sin^2\pi x$의 값이 0에서 1을 거쳐 다시 0으로 움직인다.

즉,

$$x : x \to \frac{1}{2} \to 1$$

$$\sin^2\pi x : 0 \to 1 \to 0$$

또, 함수 $\sin^2\pi x$가 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로 함수 $g(x)$도 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이다.

이때,

$0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이려면 대칭성에 의해

$0<x<\frac{1}{2}$에 1개,

$x=\frac{1}{2}$에 1개,

$\frac{1}{2}<x<1$에 1개

가 존재해야 한다.

$0<x<\frac{1}{2}$에서 $g(x)$가 극대인 x의 값을 α라 하고, $\sin^2\pi\alpha=k$라 하자.

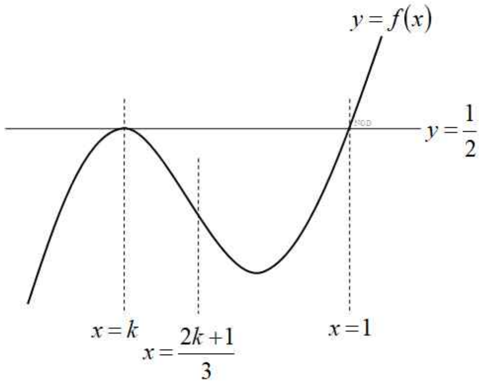
또, 주어진 조건 (나)에서 $g(x)$의 극댓값을 모두 $\frac{1}{2}$이라고 했으므로

$$g(\alpha)=g\left(\frac{1}{2}\right)=g(1-\alpha)$$

즉,

$$f(k)=f(1)\text{이고}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서, $f(x)$의 함수 식을

$$f(x)=(x-k)^2(x-1)+\frac{1}{2}\ (\text{단, } 0<k<1)$$

할 수 있다.

$f'(x)=2(x-k)(x-1)+(x-k)^2$이고

$f''(x)=2(x-1)+2(x-k)+2(x-k)$

$\quad=6x-4k-2$

이므로 변곡점의 x좌표는 $x=\frac{2k+1}{3}$이다.

또, $f(x)$의 극솟값과 같은 최솟값을 갖는 x의 좌표는

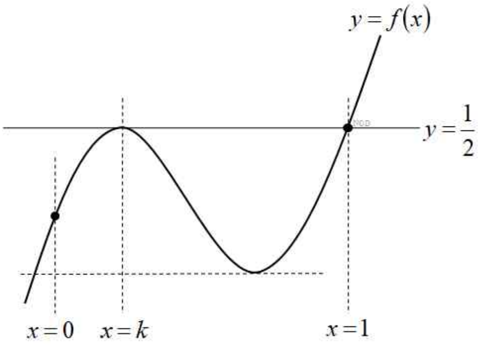
$k-\left\{\left(\frac{2k+1}{3}\right)-k\right\}=\frac{4k-1}{3}$

이므로 이 값과 0의 대소관계에 따라 나누어 생각하자.

$f'(x)=(x-k)(3x-k-2)$이므로 함수

$f(x)$는 $x=\frac{k+2}{3}$에서 극소이다.

(i) $\frac{4k-1}{3}\leq 0$일 때,



$g(x)$의 최솟값은 $f(x)$의 극솟값과 같으므로

$$f\left(\frac{k+2}{3}\right)=\left(\frac{k+2}{3}-k\right)^2\left(\frac{k+2}{3}-1\right)+\frac{1}{2}$$

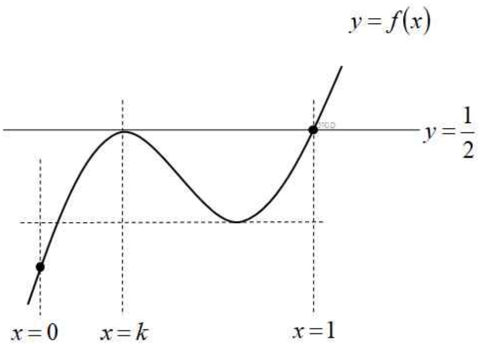
$$=\frac{4}{27}(k-1)^3+\frac{1}{2}=0$$

에서 $(k-1)^3=-\frac{27}{8}$,

$$k-1=-\frac{3}{2} \quad \therefore\ k=-\frac{1}{2}$$

이 값은 $0<k<1$의 조건을 만족하지 못한다.

(ii) $\frac{4k-1}{3}>0$일 때,



$g(x)$의 최솟값은 $f(0)$이므로

$f(0)=-k^2+\frac{1}{2}=0$에서 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$이고,

$\frac{1}{4}<k<1$을 만족한다.

(i), (ii)에 의하여

$$f(x)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(x-1)+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ f(2)=\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2-1)+\frac{1}{2}=5-2\sqrt{2}$$

$\therefore\ a=5,\ b=-2$

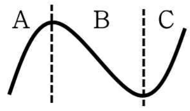
$\therefore\ a^2+b^2=5^2+(-2)^2=29$

다른 풀이

$y=\sin^2\pi x$의 그래프는 아래와 같으므로, $x:0\to1$로 움직일 때, $\sin^2\pi x:0\to1\to0$ 으로 이동된다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, $x:0\to1\to0$ 로 움직일 때, 극대가 3개이기 위해서는, $y=f(x)$는 0과 1사이에서 극대가 존재해야 한다.

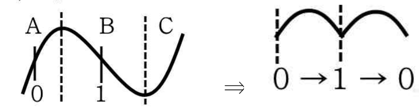
[그림 1]



위 그래프에서 0과 1사이에서 극대가 존재해야 한다. 따라서 0은 A에 속하며, 1은 B 또는 C에 속해야 한다.

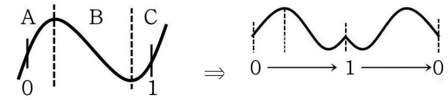
i) 1이 B에 속할 때 그래프는 다음과 같다.

[그림 2]



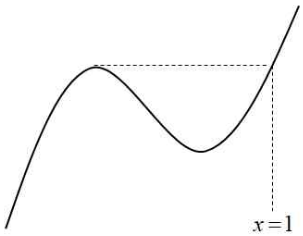
ii) 1이 C에 속할 때 그래프는 다음과 같다.

[그림 3]



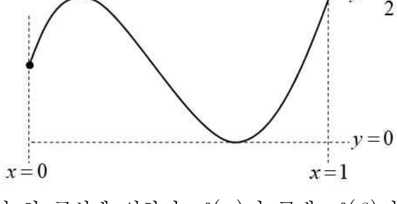
극대가 3개 존재하기 위해, 1은 C에 존재해야 한다.
동시에, 극대의 값이 모두 같기 위해서는 $f(x)$의 극대와, $f(1)$의 값이 일치하며 조건에 따라 $\frac{1}{2}$로 동일하다.

따라서 $f(x)$의 그래프를 다음과 같이 예상할 수 있다.



$g(x+1)=g(x)$인 주기가 1인 함수이므로, 구간 $[0,\ 1]$의 그래프가 반복된다. 따라서 닫힌구간 $[0,\ 1]$의 최소가 전체의 최소와 같다.
$g(x)$의 최소는 $f(0)$의 값에 따라 다음과 같이 나뉜다.

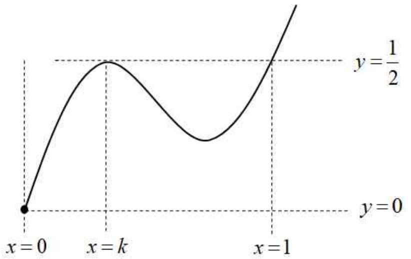
i) $f(0)$가 극소보다 클 때,



극대 극소의 차 공식에 의하여, $f(\alpha)$가 극대, $f(\beta)$가 극소라 한

다면, $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=$(극대 극소의 차)인데, 위 그림 상 극대 극소의 차가 $\frac{1}{2}$이므로, $\beta-\alpha=1$이 된다. 그러나 α, β는 0과 1사이에 있으므로 모순이다.

ii) $f(0)$가 극소보다 작을 때,



$f(x)=(x-k)^2(x-1)+\frac{1}{2}$, $f(0)=0$이므로,

$f(0)=-k^2+\frac{1}{2}=0$ 이므로, $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

$f(2)=\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(1)+\frac{1}{2}=5-2\sqrt{2}$이다.

$a=5$, $b=-2$이므로,

$a^2+b^2=29$이다.