수학 전문가 그룹 N.G.D

2021학년도 대학수학능력시험 해설

NGD

2021학년도 대학수학능력시험 문제지

수학 영역
(나형)

성명		수험번호	

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 유형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

NGD

수학 영역(나 형)

제2교시

홀수형

5지선다형

1. $3^0 \times 8^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 첫째항이 $\frac{1}{8}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_3}{a_2}=2$일 때, a_5의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

3. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

4. 함수 $f(x)=4\cos x+3$의 최댓값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

5. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{9}$일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{18}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

6. 함수 $f(x)=x^4+3x-2$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 35 ② 37 ③ 39 ④ 41 ⑤ 43

7. 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

8. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a\times b\times c=4$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{54}$ ② $\frac{1}{36}$ ③ $\frac{1}{27}$
④ $\frac{5}{108}$ ⑤ $\frac{1}{18}$

9. 곡선 $y=x^3-3x^2+2x+2$위의 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$에서의 접선과 수직이고 점 A를 지나는 직선의 x절편은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

10. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = 8,\ \sum_{k=1}^{5} b_k = 9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k-b_k+4)$의 값은? [3점]

① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

11. 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})$의 값은? [3점]

① $\frac{91}{4}$ ② $\frac{89}{4}$ ③ $\frac{87}{4}$ ④ $\frac{85}{4}$ ⑤ $\frac{83}{4}$

12. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-n^2+n$$

을 만족시킨다. a_{11}의 값은? [3점]

① 88 ② 91 ③ 94 ④ 97 ⑤ 100

13. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [3점]

$$f(2) \le f(3) \le f(4)$$

① 64 ② 68 ③ 72
④ 76 ⑤ 80

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=2t-6$$

이다. 점 P가 시각 $t=3$에서 $t=k(k>3)$까지 움직인 거리가 25일 때, 상수 k의 값은? [4점]

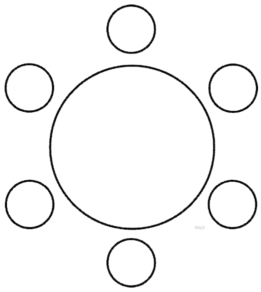
① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

15. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) A와 B는 이웃한다.
(나) B와 C는 이웃하지 않는다.

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40



16. $0 \leq x < 4\pi$일 때, 방정식

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 3 = 0$$

의 모든 해의 합은? [4점]

① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

17. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은?

[4점]

① 27　② 30　③ 33　④ 36　⑤ 39

18. $\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점]

< 보 기 >

ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 확률변수 X는 평균이 8, 표준편차가 3인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y가

$$\mathrm{P}(4 \le X \le 8) + \mathrm{P}(Y \ge 8) = \frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}\left(Y \le 8 + \frac{2\sigma}{3}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332 ④ 0.9772 ⑤ 0.9938

20. 실수 $a(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x) = x^2\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t^2 f(t)\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_7 = 2$일 때, a_{25}의 값은? [4점]

① 78 ② 80 ③ 82
④ 84 ⑤ 86

단답형

22. 다항식 $(3x+1)^8$의 전개식에서 x의 계수를 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 4x + 5$이고 $f(0) = 4$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

24. $\log_3 72 - \log_3 8$의 값을 구하시오. [3점]

25. 곡선 $y = 4x^3 - 12x + 7$과 직선 $y = k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

26. 함수

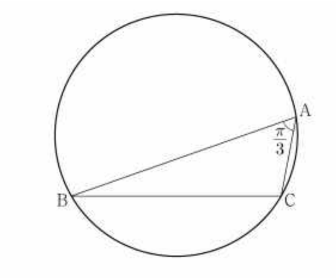
$$f(x)=\begin{cases} -3x+a & (x \le 1) \\ \dfrac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} & (x > 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 상수이다.) [4점]

27. 곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

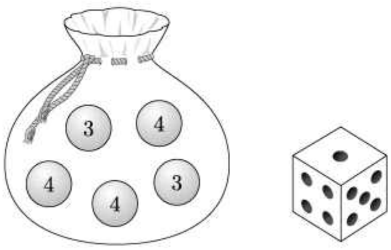
28. $\angle A=\frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7 일 때, 선분 AC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [4점]



29. 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
> 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고,
> 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점 일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다. [4점]



30. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)| & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2021년도
대수능

배포본이 아닌 hwp 원본이 필요하시면 다음 카페

by N.G.D 수학적 실험

에 방문하셔서 NGD 작업에 참여하시면 받으실 수 있습니다.

수학 전문가 그룹

N.G.D

math whiz

강혁 - 서울대치 - 모아시스수학 - ☎ 010.3790.1715
구덕문 - 부산해운대 - 아연학원 - ☎ 010.3558.6123
권도형 - 울산옥동 - 더플러스수학학원 - ☎ 052.260.9981
권세욱 - 경기광명 - 하피수학학원 - ☎ 02.899.7360
김광현 - 인천송도 - 선심수학학원 - ☎ 032.818.1999
김군용 - 경기남양주 - 매쓰메카수학전문학원 - ☎ 010.7142.9927
김대호 - 충북청주 - 온수학전문학원 - ☎ 010.2709.0502
김동규 - 경기화성동탄 - 학꿈수학 - ☎ 010.8624.6738
김문수 - 경기용인 - 생각의창수학학원 - ☎ 010.2105.8463
김미선 - 경기분당 - 패러다임수학 - ☎ 010.3056.5452
김상운 - 대구수성 - 진솔수학 - ☎ 053.742.0553
김성민 - 충남천안 - GoMSLab. - ☎ 010.6315.3720
김영민 - 서울서초 - 다온수학학원 - ☎ 02.532.6650
김영제 - 서울대치 - 상아학원•상산브레인학원 - ☎ 010.2737.7997
김영태 - 대구수성 - 가인수학학원 - ☎ 053.755.6588
김정희 - 경기도남양주 - 다름수학 - ☎ 010.3406.0553
김주용 - 경기화성동탄 - 스타수학 - ☎ 010.9108.3443
김지선 - 서울반포 - 에프엑스수학 - ☎ 02.594.4888
김지수 - 서울성북 - 용문고 - ☎ 010.7618.6029
김태현 - 서울대치 - 미투스카이 - ☎ 010.4953.1211
김하늘 - 서울대치 - 역경패도수학전문 - ☎ 02.566.7854
김호영 - 서울동작 - 미래영재학원 - ☎ 010.3125.1141
김훈 - 부산진구 - 매쓰힐수학학원 - ☎ 010.2620.1705
남성현 - 경기안양평촌 - 김통영해병수학 - ☎ 031.476.0903
남호성 - 서울은평 - 퍼씰수학 - ☎ 02.385.9101
노인주 - 서울대치 - CMS - ☎ 010.2723.7885
Ray - 세종 - 4차원수학 - ☎ 010.8449.1974
류병욱 - 경기분당 - 엘피수학 - ☎ 031.711.2534
박기태 - 부산동래•해운대 - 프리미엄영어수학•더올림 - ☎ 010.8878.4254
박용운 - 서울대치 - 메이드수학 - ☎ 02.561.8973
박원식 - 서울중계 - 수아인수학학원 - ☎ 02.933.1211
박경균 - 하당교연학원 - ☎ 010.7370.7719
박정수 - 서울대치 - 해름학원•개념상상 - ☎ 010.9043.8353
박준석 - 서울대치 - 대치해냄 - ☎ 010.8644.1080
박현철 - 서울마포 - 시그마식스수학학원 - ☎ 02.322.4786
박형근 - 충북청주 - 유비수학학원 - ☎ 043.293.7796
반영민 - 서울대치 - 시대인재 - ☎ 010.5414.1028
배장윤 - 서울대치 - 대치미래탐구 - ☎ 010.8529.5170
서동범 - 서울강동 - 더블랙에듀 - ☎ 010.6201.4711
서민국 - 서울대치 - 시대인재 - ☎ 010.8346.7440
송동일 - 서울중계 - 청솔학원 - ☎ 010.9368.4406
신동휘 - 대구수성•달서 - 알파학원 - ☎ 010.9847.1793
신헌섭 - 부산화명 - 신수학전문학원 - ☎ 010.8921.2154
윤영호 - 서울은평 - SP학원 - ☎ 010.5344.6057
윤혜영 - 서울대치 - 수수배학원 - ☎ 010.3383.3235
이경덕 - 부산동래 - 수딴's 수학 - ☎ 051.924.2358
이광희 - 서울대치 - 메이드학원 - ☎ 010.4134.7134
이상학 - 경기일산 - 이투스네오 - ☎ 010.8891.0043
이성기 - 경기일산 - 싸이쌤수학 - ☎ 010.2696.1705
이소연 - 서울대치 - SY전문교육 - ☎ 010.9968.2190
이수동 - 경기부천 - E&T수학전문학원
이수민 - 경기오산 - 스마트쎈큰수학 - ☎ 010.9790.9731
이승헌 - 서울대치 - xmath수학학원 - ☎ 010.6597.5006
이용우 - 강원홍천 - 블루밍타임클래스 - ☎ 010.3126.9531
이정환 - 온라인 - 이투스•분당청솔학원 - ☎ 010.3266.3884
이제성 - 경기수원 - 제이매쓰 - ☎ 010.9402.9746
이종환 - 서울마포 - 카이수학전문학원 - ☎ 02.706.6173
이중현 - 경기분당 - 수이학원 - ☎ 010.4029.7138
장규만 - 세종충청 - UTOEDU(유토에듀) - ☎ 010.6226.7268
장석원 - 서울목동 - 목동미래탐구 - ☎ 010.4744.2481
정다움 - 서울중랑 - 정다움수학학원•러셀강남 - ☎ 02.2209.9981
정영기 - 경기의정부 - 정영기학원 - ☎ 010.6398.8856
정은혁 - 경기부천 - 퀸즈아카데미 - ☎ 010.7311.0710
정하윤 - 서울중계 - 랑수학 - ☎ 010.3278.3420
조현탁 - 서울중계 - 전문가집단 - ☎ 010.4439.1633
조훈진 - 서울양천 - 바람수학학원 - ☎ 02.2647.2511
지요한 - 부산사직 - 트리플수학학원 - ☎ 010.9074.5658
채종원 - 서울강서 - 분석수학강서1관 - ☎ 010.8994.2002
최승인 - 서울마포 - 종로학원 - ☎ 010.3787.7779
한연호 - 서울서초 - 상운학원 - ☎ 02.3474.9452
허접 - 상도•대방•노량진 - 수준별맞춤과외 - ☎ 010.6471.0175
허진 - 경기수원 - 이자경수학 - ☎ 031.236.8558
황완수 - 안양평촌 - 황선생수학 - ☎ 010.5549.1138
황은지 - 경기안산 - 멘토수학 - ☎ 010.7413.0816
<객원 member>
최재영 - 대구달서구 - 세르파수학교습소 - ☎ 010.2577.4221
하세원-부산동래사직-정수열수학학원-☎ 051-502-2586

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

<2021학년도 대학수학능력시험 수학(나형)>

2021학년도 대학수학능력시험 수학(나형) 홀수형									
1	④	2	④	3	③	4	②	5	②
6	①	7	⑤	8	②	9	①	10	⑤
11	④	12	②	13	⑤	14	③	15	③
16	②	17	①	18	③	19	④	20	④
21	③	22	24	23	12	24	2	25	15
26	6	27	36	28	21	29	587	30	39

1) 정답 ④

문제해설

$$3^0 \times 8^{\frac{2}{3}} = 1 \times 2^{\frac{6}{3}} = 4$$

2) 정답 ④

문제해설

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $\dfrac{a_3}{a_2} = r = 2$

$$a_n = \frac{1}{8} \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_5 = \frac{1}{8} \times 2^4 = 2$$

3) 정답 ③

문제해설

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x-8}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+4)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+4) = 6$$

4) 정답 ②

문제해설

$f(x) = 4\cos x + 3$에서 $-1 \le 4\cos x + 3 \le 7$이므로 $f(x)$의 최댓값은 7이다.

5) 정답 ②

문제해설

사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(B)$ 에서

$\dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(B)$, $\dfrac{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(B)$ 이고

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$ 이다.

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{9}$ 이므로, $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{3}$이다.

6) 정답 ①

문제해설 $f(x) = x^4 + 3x - 2$

$f'(x) = 4x^3 + 3$

$f'(2) = 32 + 3$

$= 35$

7) 정답 ⑤

문제해설 주어진 식 $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x}$을 변형하면

$3^{-2x} < 3^{21-4x}$, $-2x < 21-4x$, $2x < 21$

$\therefore\ x < \dfrac{21}{2} = 10.5$

따라서 구하는 자연수의 개수는 1, 2, 3, $\cdots$, 10의 10개이다.

8) 정답 ②

문제해설 주사위를 세 번 던져서 나오는 세 숫자의 곱이 4가 되는 경우를 구해보면

1, 1, 4 또는 1, 2, 2의 두 가지 경우가 있다.

i) 1, 1, 4인 경우

(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1)의 3가지

ii) 1, 2, 2인 경우

(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)의 3가지

따라서 전체 경우의 수는 $6^3 = 216$(가지)이고

구하는 경우의 수는 $3+3=6$(가지)이므로

$\therefore$ 구하는 확률은 $\dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$이다.

9) 정답 ①

문제해설

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$의 도함수는 $y' = 3x^2 - 6x + 2$

점 A(0, 2)에서의 접선의 기울기는 $y'_{x=0} = 2$이므로 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이고 점 A(0, 2)를 지나는 직선의 방정식은 $y = -\dfrac{1}{2}(x-0)+2$, 즉 $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$이다.

따라서 구하는 직선의 x절편은 $y=0$을 대입하면 $x=4$이다.

10) 정답 ⑤

문제해설

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = 8$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} b_k = 9$이므로 $\sum$의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^{5}(2a_k - b_k + 4) = 2\sum_{k=1}^{5} a_k - \sum_{k=1}^{5} b_k + \sum_{k=1}^{5} 4$$

$$= 2 \times 8 - 9 + 4 \times 5 = 27$$

11) 정답 ④

문제해설

표본평균 $\overline{X}$는

$$\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(20,\ \frac{5^2}{16}\right)\text{이므로}$$

$$\mathrm{E}(\overline{X})=20,\ \sigma(\overline{X})=\frac{5}{4}$$

따라서, $\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=\frac{85}{4}$

12) 정답 ②

문제해설

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_2+a_2-a_3+\ \cdots\ +a_n-a_{n+1}$$

$$=a_1-a_{n+1}=-n^2+n\text{이고,}$$

문제에서 $a_1=1$이므로

$a_{n+1}=n^2-n+1$에 $n=10$을 대입하면

$a_{11}=91$

13) 정답 ⑤

문제해설

$f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4개이다.
그리고, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는
집합 X의 원소 1, 2, 3, 4의 4개 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_4\mathrm{H}_3={}_{4+3-1}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20\text{이다.}$$

따라서 구하는 함수의 개수는 $4\times20=80$

14) 정답 ③

문제해설

$$\int_3^k(2t-6)dt=\left[t^2-6t\right]_3^k$$

$$=k^2-9-6(k-3)$$

$$=k^2-6k+9$$

$k^2-6k+9=25$

$k^2-6k-16=0$

$(k-8)(k+2)=0$

$\therefore\ k=8(\because\ k>0)$

15) 정답 ③

문제해설 C를 제외한 5명 중 A와 B를 이웃하게 묶은 후 배열하면 $(4-1)!\times2!$
여기에 C는 B와 이웃하지 못하므로 3군데 중 한 곳에 위치할 수 있다.

따라서, $3!\times2!\times3=36$

다른풀이 A와 B가 이웃하는 전체의 경우에서 B와 C가 이웃하는 경우를 제외한다.

(ⅰ) A와 B가 이웃하는 경우

$(5-1)!\times2=48$

(ⅱ) A와 B가 이웃하면서 동시에 C가 B와 이웃하는 경우

$2\times(4-1)!=12$

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여

$\therefore\ 48-12=36$ (가지)

16) 정답 ②

문제해설

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로

$4\sin^2x+4\sin x-3=0$

$\sin x=t$라면 t의 범위는 $0\le x\le 4\pi$에 의하여

$-1\le t\le 1$이다.

$4t^2+4t-3=0$, $(2t-1)(2t+3)=0$, $t=\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$

그런데 t의 범위를 만족하는 값은 $t=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $\sin x=\frac{1}{2}$를 만족하는 x의 값을 구하면,

$x=\frac{\pi}{6},\ \pi-\frac{\pi}{6},\ 2\pi+\frac{\pi}{6},\ 3\pi-\frac{\pi}{6}$

모든 해의 합은 6π

17) 정답 ①

문제해설

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$이므로

$f(0)+g(0)=0,\ f'(0)+g'(0)=3$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$이므로

$f(0)=-3,\ \frac{f'(0)}{g(0)}=2$

$f(0)=-3,\ g(0)=3$

$f'(0)=6,\ g'(0)=-3$

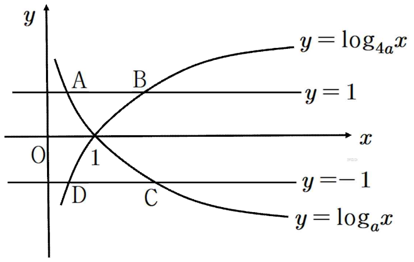
$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=6\times3+(-3)\times(-3)$

$=18+9=27$

18) 정답 ③

문제해설 $\frac{1}{4}<a<1$에서 $1<4a<4$이고 그래프는 다음과 같다.



$\log_a x=1$에서 $x=a$이므로 $\mathrm{A}(a,\ 1)$

$\log_{4a}x=1$에서 $x=4a$이므로 $\mathrm{B}(4a,\ 1)$

$\log_a x=-1$에서 $x=\dfrac{1}{a}$이므로 $\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{a},\ -1\right)$

$\log_{4a}x=-1$에서 $x=\dfrac{1}{4a}$이므로 $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{4a},\ -1\right)$

ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 내분하는 점은

$\left(\dfrac{-4\times a+1\times 4a}{1-4},\ \dfrac{-4\times 1+1\times 1}{1-4}\right)=(0,\ 1)$ (참)

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $\mathrm{AD}\perp\mathrm{AB}$이므로 점 A와 D의 x좌표가 같다. 따라서

$a=\dfrac{1}{4a}$, $4a^2=1$, $a=\dfrac{1}{2}$ $\left(\because\ \dfrac{1}{4}<a<1\right)$ (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}=4a-a=3a$

$\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{4a}=\dfrac{3}{4a}$

$\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $3a<\dfrac{3}{4a}$

$a>0$이므로 $12a^2<3$에서 $-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$이고

조건에서 $\dfrac{1}{4}<a<1$이므로 공통인 범위는

$\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$이다. (거짓)

따라서 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19) 정답 ④

문제해설

X가 $N(8,\ 3^2)$을 따르고, Y가 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 구하는 확률

$\mathrm{P}(4\le X\le 8)+\mathrm{P}(Y\ge 8)=\dfrac{1}{2}$을 표준화 시키면 아래와 같다.

$\mathrm{P}\left(\dfrac{4-8}{3}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{8-m}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{4}{3}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{8-m}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}$

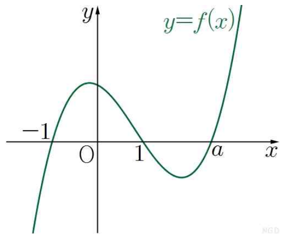
따라서, Z는 $N(0,\ 1^2)$을 따르므로 $\dfrac{8-m}{\sigma}=\dfrac{4}{3}$임을 알 수 있다.

그러므로 $\mathrm{P}\left(Y\le 8+\dfrac{2\sigma}{3}\right)$를 표준화하여 값을 구하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Y\le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{8-m+\frac{2\sigma}{3}}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{8-m}{\sigma}+\frac{2}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

20) 정답 ④

문제해설 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(x)=x^2\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t^2 f(t)\,dt$ 의 양변을 미분하면

$g'(x)=2x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt-x^2f(x)+x^2f(x)$

$=2x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ 이다.

i) $0<x<1$ 인 경우

$2x>0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt>0$ 이므로 $g'(x)>0$이고,

ii) $-1<x<0$ 인 경우

$2x<0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt<0$ 이므로 $g'(x)>0$이다.

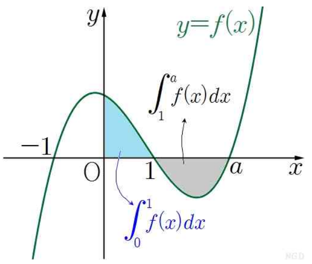
따라서 $x=0$에서 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

iii) $x<-1$ 인 경우

$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$는 그 값이 ∞로 커지므로 $x<-1$ 인 어떤점에서 $g'(x)$가 음→양으로 바뀌는 극솟값을 갖게 된다.

(문제에서 극속값이나 x값을 구하는 것이 아니기 때문에 극값이 존재한다는 것만 확인하면 된다.)

따라서 $g(x)$가 극값을 하나만 가지려면 $x>1$ 경우에 항상 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\ge 0$ 면 되고, 최대의 a값은 아래 그림과 같이



$\int_0^1 f(x)dx = -\int_1^a f(x)dx$ 일 때 최대가 된다.

따라서 a의 최댓값은

$\int_0^a f(x)dx = 0$를 만족하면 된다.

$$\int_0^a f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax\right]_0^a$$
$$= \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^2 + a^2$$
$$= a^2(a^2-6) = 0$$

$\therefore\ a = \sqrt{6}$ ($\because\ a > 1$이므로)

21) 정답 ③

문제해설

$n=1$일 때,

(가)에서 $a_2 = a_2 \times a_1 + 1$

$$a_2 = \frac{1}{1-a_1} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

(나)에서 $a_3 = a_2 \times a_1 - 2$

$$a_3 = \frac{1}{1-a_1} - 3 = \frac{-2+3a_1}{1-a_1} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

$n=3$일 때,

(나)에서 $a_7 = 2 = a_2 \times a_3 - 2 \quad a_2 \times a_3 = 4$

㉠, ㉡을 대입하여 정리하면

$$4{a_1}^2 - 11a_1 + 6 = (a_1-2)(4a_1-3) = 0$$

$0 < a_1 < 1$이므로 $a_1 = \frac{3}{4}$

따라서 $a_2 = 4,\ a_3 = \frac{4}{a_2} = 1$

$a_{2n} = 4a_n + 1,\ a_{2n+1} = 4a_n - 2$

$$a_{25} = 4a_{12} - 2$$
$$= 4(4a_6+1) - 2 = 16a_6 + 2$$
$$= 16(4a_3+1) + 2 = 64a_3 + 18 = 64 + 18 = 82$$

22) 정답 24

문제해설

$(3x+1)^8$의 전개식 일반항 ${}_8\mathrm{C}_r(3x)^r$에서 $r=1$일 때이므로 x의 계수는 ${}_8\mathrm{C}_1 \times 3 = 24$

23) 정답 12

문제해설

주어진 식을 부정적분하면

$f(x) = \int (3x^2+4x+5)dx = x^3 + 2x^2 + 5x + C$이다.

$f(0) = 4$에서 $C = 4$이므로

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 4$이고 $f(1) = 12$이다.

24) 정답 2

문제해설

$\log_3 72 - \log_3 8 = \log_3 9 = 2$

25) 정답 15

문제해설

곡선 $y = 4x^3 - 12x + 7$과 직선 $y = k$가 만나는 점의 개수가 2가 되므로 k는 극댓값 또는 극솟값이어야 한다.

$y = 4x^3 - 12x + 7$에서 $y' = 12x^2 - 12$

$12x^2 - 12 = 0,\ 12(x+1)(x-1) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = -1$

곡선 $y = 4x^3 - 12x + 7$는

$x = 1$에서 극솟값 $y = 4 - 12 + 7 = -1$

$x = -1$에서 극댓값 $y = -4 + 12 + 7 = 15$

k는 양수이므로

$\therefore\ k = 15$

26) 정답 6

문제해설

$$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-}(-3x+a)$$
$$= -3 + a$$

$$\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+} \frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} \quad \cdots \text{㉠}$$

㉠은 $\frac{0}{0}$꼴이므로 $1 + b = 0$

$\therefore\ b = -1$

$$\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$$
$$= \lim_{x\to1+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$= \lim_{x\to1+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3)-4}$$
$$= \lim_{x\to1+}(\sqrt{x+3}+2)$$
$$= 2 + 2$$

$=4$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$를 만족해야 한다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$

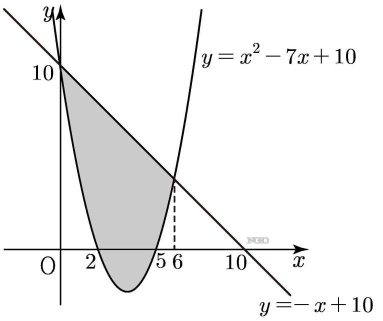
$-3+a=4$

$a=7$

$\therefore\ a+b=7+(-1)=6$

27) 정답 36

문제 해설



곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$의 교점의 x좌표는 $x^2-7x+10=-x+10$에서

$x^2-6x=0,\ x(x-6)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=6$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^6\{(-x+10)-(x^2-7x+10)\}dx$$

$$=\int_0^6(-x^2+6x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6=36$$

다른 풀이

$$\int_0^6(-x^2+6x)dx=\frac{|-1|}{6}(6-0)^3=36$$

28) 정답 21

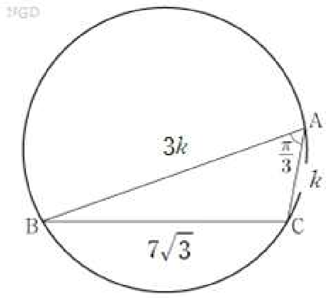
문제 해설

반지름의 길이가 7이므로 사인법칙을 이용하여 계산하면

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R=14$$

$\therefore\ \overline{BC}=14\times\sin\frac{\pi}{3}=7\sqrt{3}$

$\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$ 인 것을 이용하여 $\overline{AB}=3k,\ \overline{AC}=k$ 라 두자.



위 그림에서 코사인 법칙을 이용하여 k값을 구하면

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$(7\sqrt{3})^2=147$

$=(3k)^2+k^2-2\times3k\times k\times\frac{1}{2}$

$=7k^2$

$\therefore\ k^2=21$

29) 정답 587

문제 해설

(ⅰ) 꺼낸 공이 3인 경우

3번 주사위의 합이 10인 경우의 수

(1, 3, 6) 6가지

(2, 2, 6) 3가지

(1, 4, 5) 6가지

(2, 3, 5) 6가지

(3, 3, 4) 3가지

(2, 4, 4) 3가지 이므로

확률을 구하면

$$\frac{2}{5}\times\frac{27}{6^3}=\frac{1}{20}$$

(ⅱ) 꺼낸 공이 4인 경우

4번 주사위의 합이 10인 경우

(1, 1, 2, 6) $\frac{4!}{2!}=12$가지

(1, 1, 3, 5) $\frac{4!}{2!}=12$가지

(1, 1, 4, 4) $\frac{4!}{2!}=12$가지

(1, 2, 2, 5) $\frac{4!}{2!2!}=6$가지

(1, 2, 3, 4) $\frac{4!}{2!}=12$가지

(1, 3, 3, 3) $4!=24$가지

(2, 2, 2, 4) $\frac{4!}{3!}=4$가지

$(2,\ 2,\ 3,\ 3)\ \frac{4!}{2!2!}=6$가지

확률을 구하면

$\frac{3}{5}\times\frac{80}{6^4}=\frac{1}{27}$

두 확률을 더하면

$\frac{1}{20}+\frac{1}{27}=\frac{47}{540}$ 이다.

따라서 $p+q=587$

다른 풀이

주머니에서 3이 나오는 경우

주머니에서 4가 나오는 경우로 나눌 수 있다.

각각은 배반 사건이므로 각각의 확률을 계산해 더 하면 된다.

ⅰ) 주머니에서 3이 나오는 경우

주머니에서 3이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$,

주사위를 3번 던지니 하나의 사건이 나올 확률은

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$

두 사건을 곱사건 처리하면

$\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$이다.

위 확률에 점수의 합이 10점인 모든 경우의 수를 곱하여 확률을 계산하면 된다.

처음 나온 주사위 눈을 a

두 번째 나온 주사위 눈을 b

세 번째 나온 주사위 눈을 c

라 두면

$a+b+c=10$

$(a,\ b,\ c)=(6,\ 3,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $3!=6$가지

$(a,\ b,\ c)=(6,\ 2,\ 2)$일 때 $a,\ b,\ c$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{3!}{2!}=3$가지

$(a,\ b,\ c)=(5,\ 4,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $3!=6$가지

$(a,\ b,\ c)=(5,\ 3,\ 2)$일 때 $a,\ b,\ c$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $3!=6$가지

$(a,\ b,\ c)=(4,\ 4,\ 2)$일 때 $a,\ b,\ c$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{3!}{2!}=3$가지

$(a,\ b,\ c)=(4,\ 3,\ 3)$일 때 $a,\ b,\ c$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{3!}{2!}=3$가지

총 경우의 수를 더하면 27가지이므로

구하는 확률은 $\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 27$이다.

ⅱ)주머니에서 4가 나오는 경우

주머니에서 4가 나올 확률은 $\frac{3}{5}$

주사위를 3번 던지니 하나의 사건이 나올 확률은

$\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$이다.

위 확률에 점수의 합이 10점인 모든 경우의 수를 곱하여 확률을 계산하면 된다.

처음 나온 주사위 눈을 a

두 번째 나온 주사위 눈을 b

세 번째 나온 주사위 눈을 c

네 번째 나온 주사위 눈을 d라 두면

$a+b+c+d=10$

$(a,\ b,\ c,\ d)=(6,\ 2,\ 1,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{2!}=12$가지

$(a,\ b,\ c,\ d)=(5,\ 3,\ 1,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{2!}=12$가지

$(a,\ b,\ c,\ d)=(5,\ 2,\ 2,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{2!}=12$가지

$(a,\ b,\ c,\ d)=(4,\ 4,\ 1,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$가지

$(a,\ b,\ c,\ d)=(4,\ 3,\ 2,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $4!=24$가지

$(a,\ b,\ c,\ d)=(4,\ 2,\ 2,\ 2)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{3!}=4$가지

$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 3,\ 3,\ 1)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{3!}=4$가지

$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 3,\ 2,\ 2)$일 때 $a,\ b,\ c,\ d$가 각각의 수와 배열이 바뀔 수 있으므로 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$가지

총 경우의 수를 더하면 80가지이므로

구하는 확률은 $\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 80$이다.

따라서 ⅰ), ⅱ)의 각각의 확률을 더하여

구하고자 하는 확률을 표현하면

$\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 27+\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 80$

$=\frac{47}{540}$이다.

따라서 $p+q=587$

30) **정답** 39

문제해설

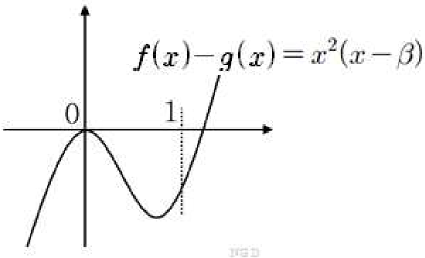
$y=|f(x)-g(x)|$가 $x=0$에서 미분가능하고

$h(0)=|f(0)-g(0)|=0$이므로 $h'(0)=0$ 이다. 즉, $f'(0)=g'(0)$이므로

$y=f(x)-g(x)=x^2(x-\beta)$의 형태이며

또한 $x<1$에서 $h(x)=|f(x)-g(x)|$가 미분가능하므로

$y=f(x)-g(x)=x^2(x-\beta)\le 0$ 이어야 한다.



즉, $h(x)=\begin{cases}-f(x)+g(x) & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\ge 1)\end{cases}$이다

$x=1$에서 미분가능하므로 연속이고

$-f(1)+g(1)=f(1)+g(1)$

$-f'(1)+g'(1)=f'(1)+g'(1)$

이 성립한다.

즉, $f(1)=0,\ f'(1)=0$

그러므로 $f(x)=(x-\alpha)(x-1)^2$의 꼴이며 $g(x)$는 $x=0$에서 $f(x)$와 접한다.

$f(0)=-\alpha$,

$f'(x)=(x-1)^2+2(x-\alpha)(x-1)$에서 $f'(0)=1+2\alpha$

$x=0$에서의 접선의 식 $y+\alpha=(1+2\alpha)x$ 로부터

$g(x)=(1+2\alpha)x-\alpha$

$h(2)=f(2)+g(2)=(2-\alpha)+2+4\alpha-\alpha=5$로부터 $\alpha=\frac{1}{2}$

그러므로 $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2,\ g(x)=2x-\frac{1}{2}$

$h(4)=f(4)+g(4)=\frac{7}{2}\times 3^2+\frac{15}{2}=\frac{78}{2}=39$

다른 풀이

$h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)| & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\ge 1)\end{cases}$이 실수 전체에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

(i) $f(1)\ge g(1)$

$f(1)-g(1)=f(1)+g(1)$이므로 $g(1)=0$이다. (연속)

$f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$이므로 $g'(1)=0$이다. (미분가능, 이때 $g(x)$는 일차함수이므로 $g'(1)\ne 0$이므로 모순이다.)

(ii) $f(1)<g(1)$

$-f(1)+g(1)=f(1)+g(1)$이므로 $f(1)=0$ (연속)

$-f'(1)+g'(1)=f'(1)+g'(1)$이므로 $f'(1)=0$ (미분가능)

$\therefore\ f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)$

조건에 의해 $h(0)=0$이므로

$|f(0)-g(0)|=0$

$\therefore\ f(0)=g(0)$

$f(0)=-\alpha$이므로 $g(x)=px-\alpha$라 하자.(p는 0이 아닌 실수)

$h(2)=f(2)+g(2)$

$\quad=2-\alpha+2p-\alpha=5$

$\therefore\ 2p-2\alpha=3$

$\therefore\ p=\frac{3}{2}+\alpha$

$\therefore$

$$h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)|=x^3-(2+\alpha)x^2+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)x & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\ge 1)\end{cases}$$

에서

$x<1$일 때의 절댓값 함수가 $x=0$에서 해를 가지므로 실수 전체에서 미분가능하기 위해서는 반드시 중근을 가져야 한다.

따라서 일차항의 계수가 0이어야 하므로 $\alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore\ h(4)=f(4)+g(4)$

$\quad=9\cdot\frac{7}{2}+\frac{15}{2}$

$\quad=39$