제 2 교시

수학 영역(가 형)

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{9} \times 3^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $3^{\frac{1}{2}}$ ③ 3 ④ $3^{\frac{3}{2}}$ ⑤ 9

$3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3$

2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-2n}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}{\cancel{4n^2}+2n+1-\cancel{4n^2}} = 2$

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{28}}{7}$ $\tan\theta = -\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{28}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$P(B|A) = \frac{1}{4}, \quad P(A|B) = \frac{1}{3}, \quad P(A)+P(B) = \frac{7}{10}$$

일 때, $P(A\cap B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{11}$

$\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4}$ $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$

$\frac{P(A)+P(B)}{P(A\cap B)} = 7$ $\therefore P(A\cap B) = \frac{1}{10}$

5. 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^{x} < 3^{21-4x}$ 을 만족시키는 자연수 x의 개수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$3^{-2x} < 3^{21-4x}$

$-2x < 21-4x$

$2x < 21$ 10

6. 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})$의 값은? [3점]

① $\frac{83}{4}$ ② $\frac{85}{4}$ ③ $\frac{87}{4}$ ④ $\frac{89}{4}$ ⑤ $\frac{91}{4}$

$E(\overline{X})=20$ $\sigma(\overline{X})=\frac{5}{4}$ $\frac{85}{4}$

7. 함수 $f(x)=(x^2-2x-7)e^x$의 극댓값과 극솟값을 각각 a, b라 할 때, $a\times b$의 값은? [3점]

① -32 ② -30 ③ -28 ④ -26 ⑤ -24

$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x-7)e^x$

$=(x^2-9)e^x$

$f(-3)\cdot f(3)=8\cdot(-4)=-32$

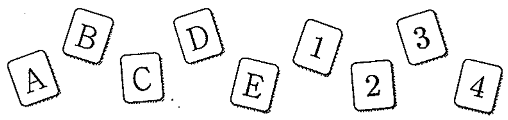
8. 곡선 $y=e^{2x}$과 x축 및 두 직선 $x=\ln\frac{1}{2}$, $x=\ln 2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ $\frac{15}{7}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$$\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} = \frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

9. 문자 A, B, C, D, E가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드와 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 이 9장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 문자 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 각각 숫자가 적혀 있는 카드가 놓일 확률은? [3점]

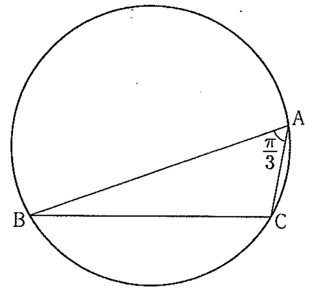
① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{12}$



○A○ $\quad \frac{{}_4P_2\cdot 7!}{9!} = \frac{4\cdot 3}{9\cdot 8} = \frac{1}{6}$

10. $\angle A=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$



$x^2 = 9k^2+k^2-2\cdot 3k^2\cos\frac{\pi}{3} = 7k^2$

$\therefore x=\sqrt{7}k \qquad \frac{\sqrt{7}k}{\sin A} = 14 \qquad \sqrt{7}k = 7\sqrt{3}$

$k=\sqrt{21} \quad \therefore \overline{AC}=\sqrt{21}$

11. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$ 의 값은? [3점]

① $4\sqrt{3}-6$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $5\sqrt{3}-8$
④ $2\sqrt{3}-3$ ⑤ $3\sqrt{3}-5$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}} = \int_3^4\sqrt{\frac{3}{x}} = \int_3^4\sqrt{3}x^{-\frac{1}{2}}$

$= \left[2\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}\right]_3^4 = 4\sqrt{3}-6$

12. 확률변수 X는 평균이 8, 표준편차가 3인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y가

$$\mathrm{P}(4\le X\le 8)+\mathrm{P}(Y\ge 8)=\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}\left(Y\le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

$p(-\frac{4}{3}\le z\le 0)+p(Y\ge 8)=\frac{1}{2}$

$p(Y\ge 8)=p(z\ge\frac{4}{3})$ $m=8-\frac{4}{3}6$

$p(Y\le 8+\frac{2}{3}6) = p(z\le 2) = 0.9772$

13. $\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

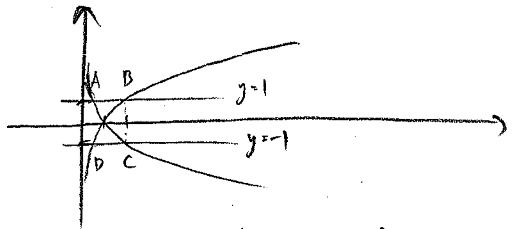
ㄱ. 선분 AB를 1:4로 외분하는 점의 좌표는 (0, 1)이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{AB}<\overline{CD}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

let $a=\frac{1}{2}$



$A(a,1)$ $B(4a,1)$ $C(\frac{1}{a},-1)$ $D(\frac{1}{4a},-1)$

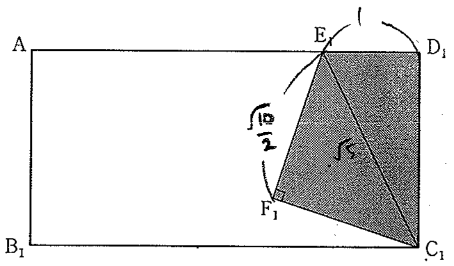
ㄱ. (o)

ㄴ. (o)

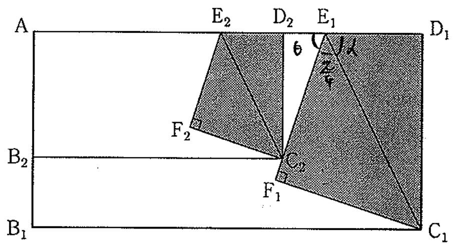
ㄷ. $3a<\frac{3}{4a}$ $4a^2<1$ $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ (x)

14. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 선분 AD_1을 3:1로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다. 사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AE_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{441}{103}$ ② $\frac{441}{109}$ ③ $\frac{441}{115}$ ④ $\frac{441}{121}$ ⑤ $\frac{441}{127}$

$S_1=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$ $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$ $\therefore \sin\theta=\sin(\pi-\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\tan\theta=3$ let $\overline{D_2E_1}=x$ $7x=3$ $x=\frac{3}{7}$

$\therefore \overline{D_2C_2}=\frac{9}{7}$ 닮음비 $=\frac{9}{14}$ 넓이의 비 $=\frac{81}{196}$

$$\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{81}{196}}=\frac{9}{4}\cdot\frac{196}{115}=\frac{441}{115}$$

15. $x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2},\quad f(1)=5$$

이다. $x<0$에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$의 값은? [4점]

(가) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$이다.
(나) $f(2)+g(-2)=9$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)=2x+3x^{-1}+C \quad f(1)=5 \quad \therefore f(x)=2x+3x^{-1}$

$f(2)=4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2} \quad g(-2)=\frac{7}{2}$ (원점대칭꼴, 상수항은 다름)

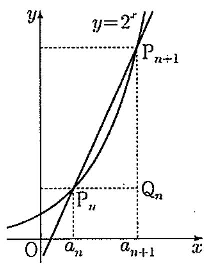
$f(3)-f(2)=7-\frac{11}{2}=\frac{3}{2}$

$g(-2)-g(-3)=\frac{3}{2} \quad \therefore g(-3)=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=2$

16. 상수 $k(k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고
곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}_n(a_n,\ 2^{a_n})$, $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ 2^{a_{n+1}})$을 지나는 직선의 기울기는 $k\times 2^{a_n}$이다.

점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n이라 하고 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 하자.



다음은 $a_1=1$, $\dfrac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.

두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기가 $k\times 2^{a_n}$이므로

$$2^{a_{n+1}-a_n}=k(a_{n+1}-a_n)+1$$

이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은 방정식 $2^x=kx+1$의 해이다.
$k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이고, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.
점 Q_n의 좌표가 $(a_{n+1},\ 2^{a_n})$이므로

$$A_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$$

이다. $\dfrac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 $\boxed{\text{(가)}}$이고,
수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=\boxed{\text{(나)}}$$

이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+\dfrac{g(4)}{f(2)}$의 값은? [4점]

① 118 ② 121 ③ 124 ④ 127 ⑤ 130

$\dfrac{2^{a_4}-2^{a_3}}{2^{a_2}-2^{a_1}}=2^{2d}=16 \quad d=2 \quad a_1=1$

$a_n=2n-1 \quad A_n=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2^{2n+1}-2^{2n-1})=2^{2n-1}\cdot 3$

$2+\dfrac{2^7\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}}=130$

17. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼, 3 이상이면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

$Y \sim B(15, \frac{1}{3})$ $E(Y)=5$ $V(Y)=\frac{10}{3}$

$(x, y) = (3Y, 15-Y)$

$\frac{|9Y+60-4Y|}{\sqrt{25}} = Y+12$

$E(X) = E(Y)+12 = 17$

18. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$

라 하자. $(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

[4점]

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

$\boxed{f(\alpha)=\frac{5}{4}}$

$\alpha>1$ $\frac{(a-2)\alpha}{3}=\frac{5}{4}$

$\alpha=1$ $\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$ $a=5$

$0<\alpha<1$ $2\alpha=\frac{5}{4}$ $\alpha=\frac{5}{8}$

$\boxed{f(1)=\alpha}$

$\alpha=1,\ a=5$ (x)

$\alpha>1$ $\frac{a}{4}=\alpha$, $\frac{(a-2)\alpha}{3}=\frac{5}{4}$

$4(4\alpha-2)\alpha=15$ $16\alpha^2-8\alpha-15=0$ $\begin{matrix}4 & 3\\ 4 & -5\end{matrix}$

$\therefore \alpha=\frac{5}{4}$ $a=5$

$0<\alpha<1$ $\frac{a}{4}=\frac{5}{8}$ $a=\frac{5}{2}$

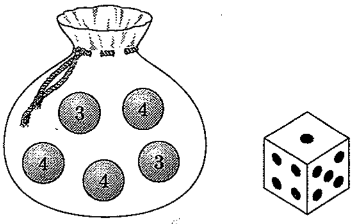
$5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$

19. 숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
> 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고,
> 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은? [4점]

① $\frac{13}{180}$ ② $\frac{41}{540}$ ③ $\frac{43}{540}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{47}{540}$



$\frac{2}{5}$ — { 1 3 6 6 / 2 2 6 3 / 1 4 5 6 / 2 3 5 6 / 2 4 4 3 / 3 3 4 3 } $\times \frac{1}{6^3}$

$\frac{3}{5}$ — { 1 1 2 6 12 / 1 2 2 5 12 / 2 2 2 4 4 / 2 2 3 3 6 / 1 2 3 4 24 / 1 1 4 4 6 / 1 1 3 5 12 / 1 3 3 3 4 } $\times \frac{1}{6^4}$

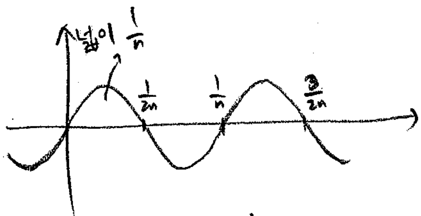
$\frac{2}{5} \cdot \frac{27}{216} + \frac{3}{5} \cdot \frac{80}{1296} = \frac{47}{540}$

108 20 432 108

20. 함수 $f(x) = \pi \sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x) = f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2$, $\int_{-1}^{1} xh(x)dx = -\frac{1}{32}$
> 이다.

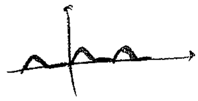
① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16



$\int_0^{\frac{1}{2n}} \pi \sin 2\pi nx\, dx = -\frac{1}{2n}[\cos 2\pi nx]_0^{\frac{1}{2n}}$

$= -\frac{1}{2n}(\cos\pi - 1) = \frac{1}{n}$

$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2 \Rightarrow$ { $f(x)$ x축 위 $g(x)=1$ / $f(x)$ x축 아래 $g(x)=0$ }



$\int_0^{\frac{1}{2n}} x\pi \sin 2\pi nx\, dx = -\frac{1}{2n}[x\cos 2\pi nx]_0^{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{1}{2n}} \cos 2\pi nx\, dx$

$= \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4\pi n^2}[\sin 2\pi nx]_0^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{4n^2}$

$\frac{1}{4n^2}((1+5+9+ \cdots + 4n-3) - (3+7+ \cdots +4n-1))$

$= \frac{1}{4n^2} \cdot (-2 \cdot n) = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$ $\therefore n=16$

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
>
> (나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91 ② 92 ③ 93 ④ 94 ⑤ 95

(가) $a_2 = a_2 \cdot a_1 + 1$

$a_4 = a_2^2 + 1$

$a_8 = a_2^3 + a_2 + 1$

(나) $a_3 = a_1 \cdot a_2 - 2$

$a_7 = a_1 \cdot a_2^2 - 2a_2 - 2$

$a_{15} = a_1 \cdot a_2^3 - 2a_2^2 - 2a_2 - 2$

$(1-a_1)a_2^3 + 2a_2^2 + 3a_2 + 3 = 63$

$(1-a_1)a_2 = 1$

$\therefore 3a_2^2 + 3a_2 + 3 = 63$

$a_2^2 + a_2 - 20 = 0 \quad a_2 = 4 \quad (1-a_1 > 0)$

$a_1 = \dfrac{3}{4} \quad a_8 = 69$

$\therefore \dfrac{a_8}{a_1} = 92$

단답형

22. $\left(x + \dfrac{3}{x^2}\right)^5$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오. [3점] 15

${}_5C_4 \cdot x^4 \cdot \left(\dfrac{3}{x^2}\right) = 15x^2$

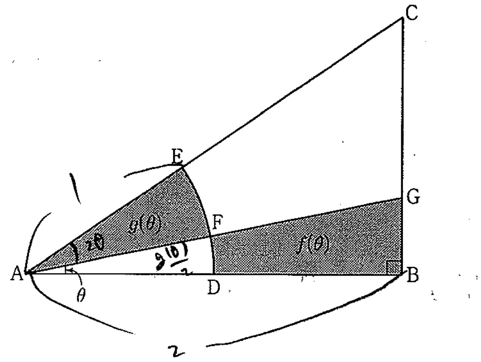
23. 함수 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 6}{x - 1}$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오. [3점] 8

$f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x-6)}{(x-1)^2}$

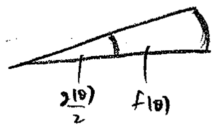
$f'(0) = 2 + 6 = 8$

24. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자.
호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자.
$\angle BAG=\theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [3점]

60



$\theta\to0+$



$\frac{g(\theta)}{2}:f(\theta)=1:3$

$g(\theta):f(\theta)=2:3$

$40\cdot\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=40\cdot\frac{3}{2}=60$

25. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}a_k=55$일 때, $\sum_{k=1}^{5}k(a_k-3)$의 값을 구하시오. [3점] 160

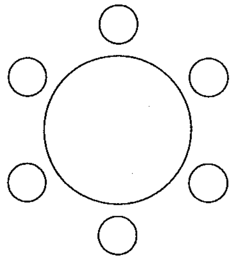
3 7 11 15 19 $a_k=4k-1$

$\sum_{k=1}^{5}(4k^2-4k)=4\cdot\frac{5\cdot6\cdot11}{6}-\cancel{4}^{2}\cdot\frac{5\cdot6}{\cancel{2}}$

$=220-60=160$

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다.
이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점] 36

(가) A와 B는 이웃한다.
(나) B와 C는 이웃하지 않는다.



원순열

A B ○ DEF

$3\cdot2\cdot3!=36$

27. $\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$ 의 값이 40 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점] 13

$\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_4 n = \log_4 2n\sqrt{n} \le 40$

$2n\sqrt{n} = 4^x$ $n = 4^{2k+1}$

$2 \cdot 4^{2k+1} \cdot 2^{2k+1}$

$= 4^{3k+2}$ $3k+2$ $k = 0 \sim 12$

13개

28. 두 상수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = (x-a)(x-b)^2$$

이라 하자. 함수 $g(x) = x^3+x+1$ 의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점] 72

> (가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) $h'(3) = 2$

$g'(x) = 3x^2+1 \ge 0$ $g(x)$ 증가함수 $g^{-1}(x)$ 증가함수

$x=1$ 에서 $|h(x)|$ 미분불가능 $h(1)=0$ $g(0)=1$ $g^{-1}(1)=0$

$(f \circ g^{-1})(1)=0$ $f(0)=0$ $a=0$

$\therefore f(x) = x(x-b)^2$

$h'(3) = f'(g^{-1}(3))(g^{-1})'(3) = 2$ $g(1)=3$ $g'(1)=4$

$(g^{-1})'(3) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{4}$

$h'(3) = f'(1) \cdot \frac{1}{4} = 2$ $f'(1) = 8$

$f'(x) = (x-b)^2 + 2x(x-b)$

$f'(1) = (1-b)^2 + 2(1-b) = b^2-4b+3 = 8$

$b^2-4b-5=0$ $b=5$ $(a<b)$

$f(x) = x(x-5)^2$ $\therefore f(8) = 8 \cdot 9 = 72$

29. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

201

> (가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.
> (나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 이상이다.
> (다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

A를 포함한 2명을 A, B라 가정하면

검은색 모자 (A, B) = (4, 2), (4, 1), (5, 1)

i) (A, B) = (4, 2)

A: b w, B: b w, C: b w, D: b w

4 0 | 2 0 | 0 | 0 (C, D에 미리 흰색 모자 1개씩 분배) ${}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$

2 1 ${}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$

4 1 | 2 0 ${}_2H_3 = 4$

2 1 ${}_2H_2 = 3$

4 2 | 2 0 ${}_2H_2 = 3$

4 2 | 2 1 ${}_2H_1 = 2$

4 3 | 2 0 ${}_2H_1 = 2$

4 3 | 2 1. 1

$24 \cdot 3 = 72$ (B 선택하는 경우의 수)

ii) (A, B) = (4, 1)

A: b w, B: b w, C: b w, D: b w

4 0 | 1 0 | 1 | 0 ${}_2H_4 = 5$

4 1 | 1 0 | 1 | 0 ${}_2H_3 = 4$

4 2 | 1 0 | 1 | 0 ${}_2H_2 = 3$

4 3 | 1 0 | 1 | 0 ${}_2H_1 = 2$

$14 \cdot 3! = 84$ (B, C, D 모두 구별됨 3!)

iii) (A, B) = (5, 1)

A: b w, B: b w, C: b w, D: b w

5 0 | 1 0 | 0 | 0 ${}_2H_4 = 5$

1 | 1 0 | 0 | 0 ${}_2H_3 = 4$

2 | 1 0 | 0 | 0 ${}_2H_2 = 3$

3 | 1 0 | 0 | 0 ${}_2H_1 = 2$

4 | 1 0 1

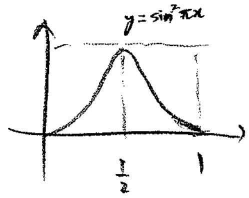
$15 \cdot 3 = 45$ (B 선택하는 경우의 수) $72 + 84 + 45 = 201$

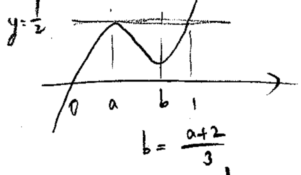
30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x) = f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 < x < 1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2) = a + b\sqrt{2}$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

29





$b = \frac{a+2}{3}$

$f'(x) = 3(x-a)(x-b)$

$f(x) = (x-a)^2(x-1) + \frac{1}{2}$

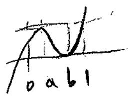
$= x^3 - 2ax^2 + a^2x - x^2 + 2ax - a^2 + \frac{1}{2}$

$= x^3 + (-2a-1)x^2 + (a^2+2a)x - a^2 + \frac{1}{2}$

i) $f(0) = 0$ 인 경우

$-a^2 + \frac{1}{2} = 0$ $a^2 = \frac{1}{2}$ $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $f(x) = (x - \frac{1}{\sqrt{2}})^2(x-1) + \frac{1}{2}$

ii) $f(b) = f(\frac{a+2}{3}) = 0$ 인 경우



$(\frac{-2a+2}{3})^2(\frac{a-1}{3}) + \frac{1}{2} = 0$

$\frac{4(a-1)^3}{27} = -\frac{1}{2}$ $(a-1)^3 = -\frac{27}{8}$ $a - 1 = -\frac{3}{2}$

$\therefore a = -\frac{1}{2}$ ($0 < x < 1$ 이므로 X)

$\therefore f(x) = (x - \frac{1}{\sqrt{2}})^2(x-1) + \frac{1}{2}$

$f(2) = (2 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2} - 2\sqrt{2} + \frac{1}{2} = 5 - 2\sqrt{2}$

$\therefore 25 + 4 = 29$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.