[2021학년도 수능 가형 20번]

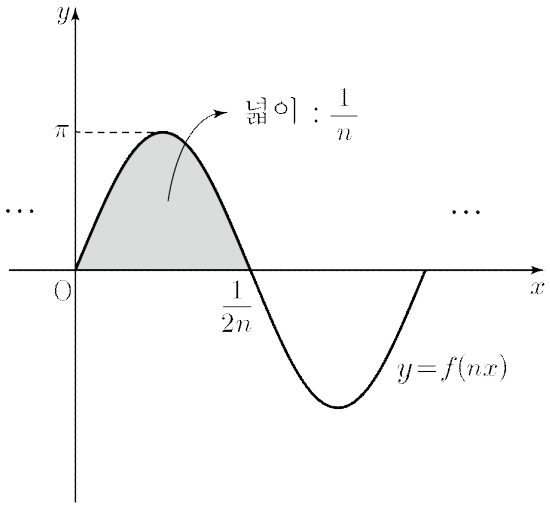
함수 $f(x)=\pi \sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고
치역이 집합 $\{0,\ 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은?

함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $$\int_{-1}^{1} h(x)dx=2,\ \int_{-1}^{1} xh(x)dx=-\frac{1}{32}$$ 이다.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

[해설]

함수 $g(x)$는 1 또는 0이므로 함수 $h(x)$는 $h(x)=f(nx)$ 또는 $h(x)=0$이다.
함수 $f(nx)$는 그림과 같이 그려진다.



$\int_{0}^{\frac{1}{2n}} f(nx)dx=\int_{0}^{\frac{1}{2n}} \pi \sin 2\pi x dx=\frac{1}{n}$ 이다.

$\int_{-1}^{1} h(x)dx=2$ 이므로

$f(nx)\geq 0$ 부분의 모든 넓이의 합이 1이므로

함수 $h(x)$는

$f(nx)<0$ 부분의 모든 값이 0이 되어야한다.

따라서

$$h(x)=\begin{cases} f(nx) & (f(nx)\geq 0) \\ 0 & (f(nx)<0) \end{cases}$$

이다.

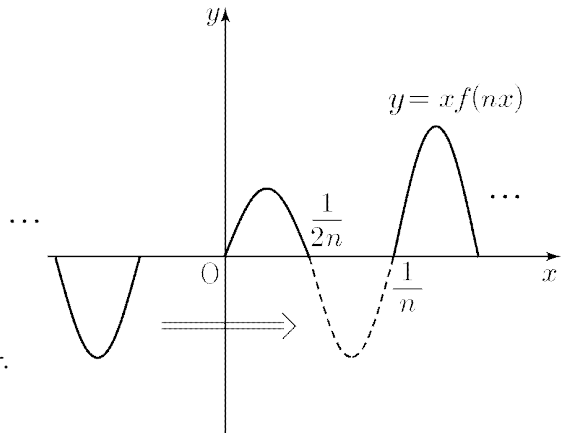
$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = -\frac{1}{32}$ 에서

함수 $xh(x)$는

$f(nx)\geq 0$에서 $xh(x)=x\cdot\pi\sin 2\pi x$이고 $f(nx)<0$에서 $xh(x)=0$이므로

$x<0$에서 함수 $xh(x)$를 y축 대칭시키면 $x>0$에서 $xh(x)=0$인 부분에

함수 $xf(nx)$가 되므로 $\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \int_{0}^{1} xf(nx)dx = -\frac{1}{32}$



이다.

$$\int_{0}^{1} \pi x\sin(2\pi nx)dx$$

$$=\left[-\frac{x}{2n}\cos(2\pi nx)\right]_{0}^{1}+\int_{0}^{1}\frac{1}{2n}\cos(2\pi nx)dx$$

$$=-\frac{1}{2n}=-\frac{1}{32} \quad (\because \int_{0}^{1}\cos(2\pi nx)dx=0)$$

따라서 $n=16$