정적분의 부등식

2022 예시문항(공통) 12번

12. $0 < a < b$인 모든 실수 a, b에 대하여

f(x)

$$\int_a^b (x^3 - 3x + k)\,dx > 0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

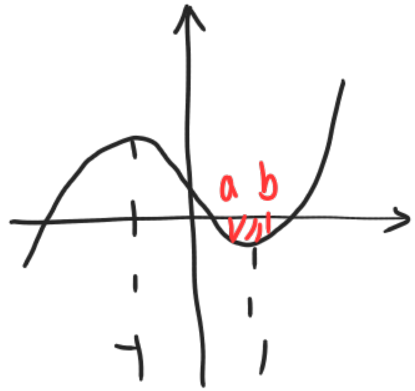
#Tip! 적분가능한 $f(x)$에 대하여 $[a, b]$ 에서

① $f(x) \geq 0$ 이면 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

② $f(x) \geq g(x)$ 이면 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

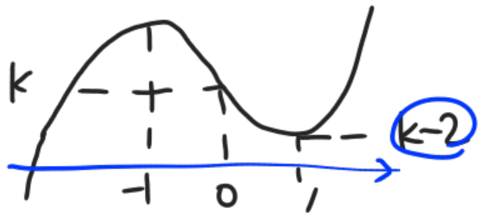
③ $m \leq f(x) \leq M$ 이면 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$



$\int_a^b f(x)\,dx < 0$

$x > 0$ 에서 $f(x) \geq 0$



$k-2 \geq 0$

$\boxed{k \geq 2}$

정적분의 부등식

* 나형 학생들은 그냥 로그 함수로 생각.

20210918(가)

18. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)\,dt$$

$t=\frac{1}{2}$ 대칭

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a)\ge 1$인 실수 a가 존재한다.

ㄱ. $\int_0^{x\,(\le 0)} \underbrace{f(t)}_{=0} f(1-t)\,dt = 0$

ㄴ. $y=f(x)f(1-x)$ 가 $x=\frac{1}{2}$에 대칭이므로

$$g(1)=\int_0^1 f(t)f(1-t)\,dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)\,dt = 2g\left(\frac{1}{2}\right)$$

같다

~~ㄷ~~. $x\le 0$ 또는 $x\ge 1$ 이면 $g(x)=0$

$[0,1]$에서 $(\ln(1+x^4))^{10}\le(\ln 2)^{10}$ 이므로

$f(x)f(1-x)\le(\ln 2)^{20}$ 이다.

$[0,1]$에서 $g(x)\le(\ln 2)^{20}\times(1-0)<(\ln e)^{20}=1$