

삼차함수의 대칭성과 비율 관계

2021 사관(나) 30번

30. 양수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

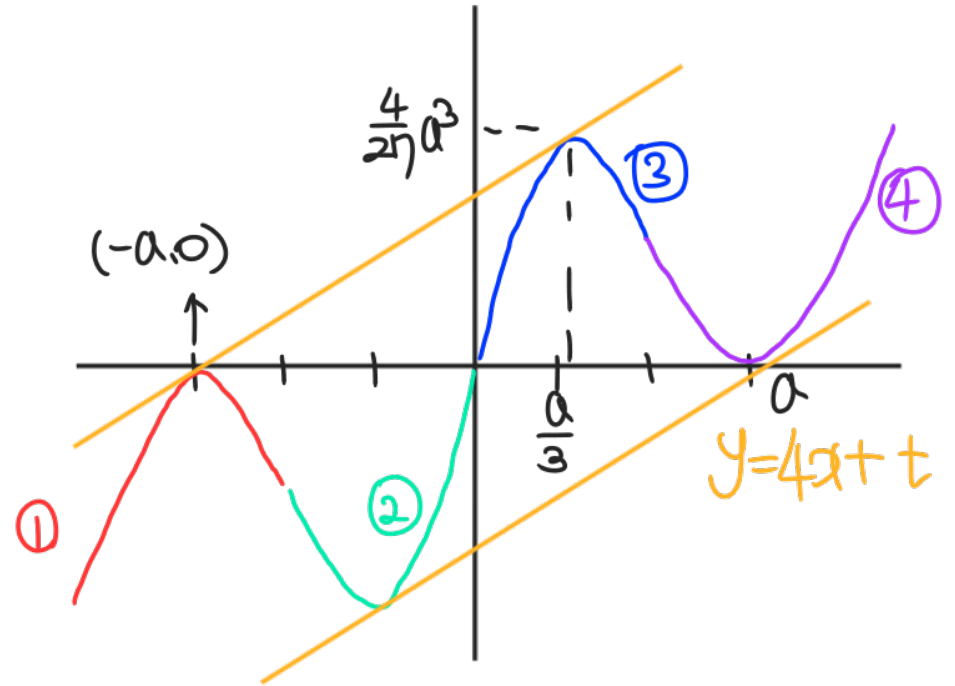
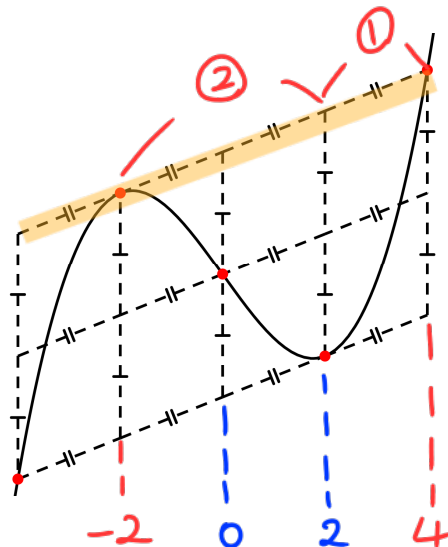
$$f(x) = \begin{cases} x(x+a)^2 & (x < 0) \\ x(x-a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=4x+t$ 의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 5이다.
- (나) 함수 $g(t)$ 가 $t=\alpha$ 에서 불연속인 α 의 개수는 2이다.

$f'(0)$ 의 값을 구하시오. [4점]

- ① 삼차함수는 점대칭입니다.
- ② 접점, 대칭점, 교점 사이의 비율 관계를 알아두면 계산이 아주 편해지는 경우가 있습니다.



① ② 점대칭, ③ ④ 점대칭) → ① ③ 합
(① + ②) (③ + ④) 점대칭

따라서 (점대칭 이은 기울기) = (극점 이은 기울기) = 4

$$\frac{\frac{4}{27}a^3}{\frac{a}{3} - (-a)} = \frac{1}{9}a^2 = 4, \quad a^2 = 36.$$

