수학Ⅱ - 적분법

2020.11.23

실 생활

수학Ⅱ - 적분법

부정적분

적분은 쉽게 말하면 미분의 역과정이다.
(함수 대 역함수의 관계와 비슷)

그렇다면 왜 '부정' 적분일까?

→ 범위가 없는 적분이라는 뜻이다.

$F(x)$를 미분하면 $f(x)$라고 할 때 아래와 같이 쓴다.

$$\int f(x)\,\underbrace{dx}_{} = F(x) + \underbrace{C}_{}$$

어느 미지수에 대한 적분인지 알려준다.

적분상수 : 우리가 상수항을 미분하면 없어지기에 거꾸로 복구할 때는 확실치 않은 상수 C를 붙인다.

- 적분은 어떻게 하나요?

미분의 역과정이다.

미분을 할 때는 차수를 1 낮추고 지수의 수를 곱해줬으니

적분을 하려면 차수를 1 올리고 1 올린 차수로 나눈다.

ex) $3x^2+4x$를 x에 대해 적분하라.

$3 \div 3 \cdot x^{2+1} + 4 \div 2 \cdot x^{1+1} = x^3 + 2x^2 + \underbrace{C}_{\text{적분상수}}$

부정적분의 성질

① $\int k \cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

x에 대한 식이 아니니 상수 취급

② $\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

③ $\int \{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

곱셈, 나눗셈은 안 하나요?

(나)형 선택은 여기까지.

정적분

정적분은 '부'정적분과는 달리 범위가 존재한다.

a 에서 b까지 $f(x)$를 x에 대해 적분한다면

$\int_a^b f(x)\,dx$ 라고 쓸 수 있다.

$F(x)$를 미분하여 $f(x)$가 된다면 $\int_a^b f(x)\,dx$를 아래와 같이 볼 수 있다.

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= (F(b)+C) - (F(a)+C) = F(b)-F(a)\\ &= [\,F(x)\,]_a^b\end{aligned}}$$

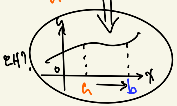
적분상수

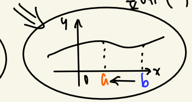
※ 범위를 다루는 방법.

- $\int_a^a f(x)\,dx \Rightarrow$ a부터 a까지 적분?
  $= 0$
  시작과 끝이 같다면 함수에 관계없이 0

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \Rightarrow$ 범위의 순서가 바뀌면 앞에 (-) 붙여주자.

왜?





- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt \Rightarrow$ 미지수는 뭐가 들어가든 상관 X
  그러나 함수와 뒤에 d○은 서로 같아야 함

정적분과 미분의 관계

$\int_a^x f(t)dt$ 를 x에 대해 미분하면

상수

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

x에 대해 미분.

왜?

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$$

마찬가지로 '수'

↓

$$\frac{d}{dx}\left(F(x) - F(a)\right) = f(x)$$

상수

ex) $\int_2^x (t^3+2t)dt$ 를 x에 대해 미분하라.

$$\frac{d}{dx}\int_2^x (t^3+2t)dt = x^3+2x$$

• 정적분의 성질.

부정적분의 성질을 모두 가지고 있다

① $\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

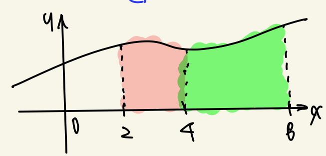
③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

여기서 하나가 추가된다.

④ $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

연결고리가 같으면 이어서 쓸 수 있다.

ex) $\int_2^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx = \int_2^8 f(x)dx$



• 정적분으로 나타낸 함수의 극한 ($\int f(x)dx = F(x)+C$)

① $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt$

이 방법은 $\int_a^{a+h} f(t)dt = F(a+h) - F(a)$ 라는 것을 이용한다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(F(a+h)-F(a)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h} = F'(a) = f(a)$$

응용을 한다면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_a^{a+4h} f(t)dt = \lim_{h\to 0}\frac{F(a+4h)-F(a)}{2h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{F(a+4h)-F(a)}{4h}}\cdot 2 = 2\cdot F'(a) = 2f(a)$$

a+4h와 a의 차이가 분모에 있어야 한 세트. ⊢ 미분법 때 연습.

② $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(a) = f(a)$$

함수의 극한은 계속 나온다...

정적분의 활용

1. 곡선과 x축 사이의 넓이

다만 부호가 있다.

함수 $f(x)$가 $[a, b]$에서 연속일때 $f(x)$, $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 넓이 S는

$S = \int_a^b |f(x)|dx$ 로 나타낼 수 있다.

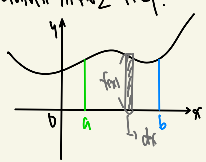
↳ 절댓값을 쓴 이유는 '넓이' S라고 했으니까.

※ 알 필요는 없지만 알아두면 이해에 도움되는 FACT.

$\int_a^b f(x)dx$

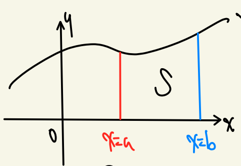
↳ 굉장히 작은 x값

↳ 함숫값.



회색 상자를 a에서 b까지 다 더하니 넓이가 되었지?

※ 교과서에는 없는 팁. : $\boxed{\text{넓이의 부호는 } x\text{의 방향, 함숫값의 부호에 영향을 받는다.}}$

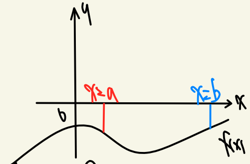


① ⟶ 양(+)의 방향

② ⟵ 음(-)의 방향

① $\int_a^b f(x)dx$: $\underbrace{\text{양(+)의 방향}}_{x\text{축}}$ × $\underbrace{\text{양수인 함숫값}}_{y\text{축}}$ = (+)S

② $\int_b^a f(x)dx$: $\underbrace{\text{음(-)의 방향}}_{x\text{축}}$ × $\underbrace{\text{양수인 함숫값}}_{y\text{축}}$ = (-)S



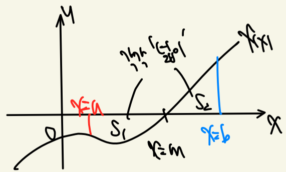
① ⟶ 양의 방향

② ⟵ 음의 방향

① $\int_a^b f(x)dx$: $\underbrace{\text{양(+)의 방향}}_{x\text{축}}$ × $\underbrace{\text{음수인 함숫값}}_{y\text{축}}$ = (-)S

② $\int_b^a f(x)dx$: $\underbrace{\text{음(-)의 방향}}_{x\text{축}}$ × $\underbrace{\text{음수인 함숫값}}_{y\text{축}}$ = (+)S

• 함숫값의 부호가 바뀐다면?



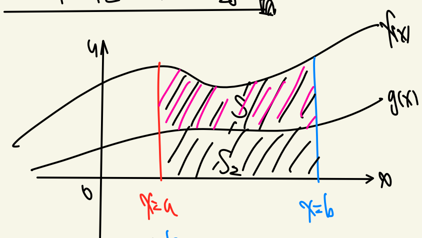
정적분의 성질 활용.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^m f(x)dx + \int_m^b f(x)dx$$

$$= \underbrace{-S_1 + S_2}$$

결론 : 각각 넓이를 구해서 부호만 잘 붙여주면 됨.

2. 두 곡선 사이의 넓이



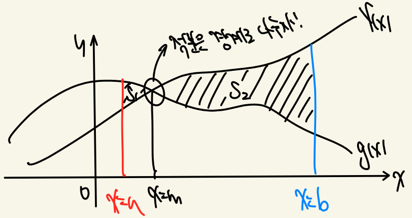
$$\int_a^b f(x) - g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$= S_1 - S_2 = S$$

$\int_a^b f(x)dx = S_1$ 이라 하자.

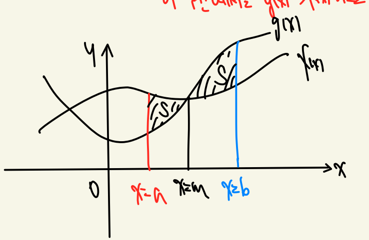
※ 응용이 된다면?

① 교차하는 두 함수 사이의 적분.



$$\int_a^b f(x)-g(x)\,dx=\int_a^m f(x)-g(x)\,dx+\int_m^b f(x)-g(x)\,dx$$

$$=\underbrace{-S_1}_{\text{이 구간에서는 } g(x)>f(x)\text{이므로}}+(+S_2)=-S_1+S_2$$



$$\int_a^b f(x)-g(x)\,dx=\int_a^m f(x)-g(x)\,dx+\int_m^b f(x)-g(x)\,dx$$

$$=(+)S+(-)S=0$$

교점을 기준으로 넓이가 같고 부호가 다르다면

↓ ↑ $\boxed{\text{적분값이 0이면 이럴수도}}$

적분하면 0이네?

② 역함수와 넓이와의 관계

역함수 라는 관계에 있는 두 그래프는 $y=x$ 대칭이다.

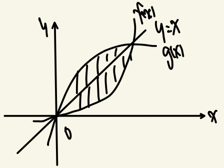
(출처 : 고1 고학기 : 함수)

→ 느낌이 있네.

$f(x)$와 $g(x)$가 서로 역함수이고 두 함수 모두 (a, a), (b, b)를 지날 때 $f(x)$와 $g(x)$로 둘러싸인 넓이는.

$$S=2\int_a^b |x-f(x)|\,dx$$

$y=x$와 둘 중 어느 하나의 적분값의 2배.

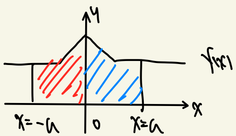


※ 조금의 활용?

① 우함수 (짝함수)의 정적분

모든 실수 x에 대해 $f(x)=f(-x)$

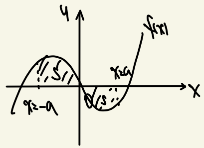
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$$



② 기함수 (홀함수)의 정적분.

주의점 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$

원점 대칭



$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=\int_{-a}^0 f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx$$

$$=-S+S=0$$

$\boxed{\text{적분했을 때 0이 된다는 것이 엄청난 메리트.}}$

속도와 거리

미분 수업할 때를 떠올려보자.

정리	3차?		2차?		1차?
	위치 $f(t)$	미분 → / ← 적분	속도 $f'(t)$	미분 → / ← 적분	가속도 $f''(t)$

차원을 올린다는 느낌?

시간 t에 따른 속도함수를 $v(t)$라고 할때.

- 시간 t일때 위치 $x(t)$는

$$x(t)=\underbrace{x(a)}_{\text{원위치}}+\underbrace{\int_a^t v(t)\,dt}_{\text{이동한 거리}}$$

이동한 거리 → 속도를 적분 = 위치

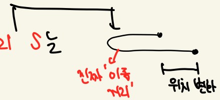
- 시간 $t=a$에서 $t=b$까지 위치의 변화량은

$$\underbrace{x(b)-x(a)}_{\text{위치 변화량}}=\int_a^b v(t)\,dt=\Big[x(t)\Big]_a^b=x(b)-x(a)$$

- 시간 $t=a$에서 $t=b$까지 점이 움직인 거리 S는

$$S=\int_a^b \underbrace{|v(t)|}\,dt$$

→ 거리니까 절댓값



※ 구간과 함수가 정해진 적분값은? → 우리가 모르지만 수이다.

$\int_1^2 f(x)\,dx$ 와 같이 구간과 함수가 정해져 있다면 $\underbrace{\text{미지수로 잡고}}$ 진행하자.

왜? ↳ 우리가 모르는 수니까.

예) 다항함수 $f(x)$에 대하여

$f(x) = 4x^3 + 2x\int_0^1 f'(t)\,dt$ 일때, $f(2)=$?

출처: 수능특강(2020) 수학Ⅱ p.51 7번

A. $\int_0^1 f'(t)\,dt$ 는 구간과 함수가 정해져있으니 미지수 a로 두자.

문제에 a 없으니 가능

$f(x) = 4x^3 + 2ax$, $f'(x) = 12x^2 + 2a$

$f'(x) = 12x^2 + 2a$ 이니까 $\int_0^1 f'(t)\,dt$ 구할 수 있겠다.

$=a$

$\int_0^1 f'(t)\,dt = \int_0^1 12t^2 + 2a\,dt = \left[4t^3 + 2at\right]_0^1$

$= \{(4+2a) - (0)\} = a$

$\int_0^1 f'(t)\,dt = a$ 니까!

$4 + 2a = a$ $\quad a = -4$

$f(2) = 32 + 4\cdot(-4) = \boxed{16}$

현역 시절 성적 떡락한 썰.

2018년에 23이 된 본인은 3,4월 모의고사에서 88, 92점을 맞으며 수학 1등급은 누워서 떡 먹기라고 생각했다.

명문대에 가는 행복한 상상을 하던 와중에 6월 평가원이 다가왔다.

2019학년도 6월을 기점으로 28+2 구조에서 준킬러가 어려워지는 구조로 바뀌었다.

나는 너무나 당당하게 첫 페이지를 누구보다 빨리 넘기며 좋은 출발을 하였다. 그러나.

9. 곡선 $e^x - e^y = y$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 1일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $1+\ln(e+1)$ ② $2+\ln(e^2+2)$ ③ $3+\ln(e^3+3)$
④ $4+\ln(e^4+4)$ ⑤ $5+\ln(e^5+5)$

$e^x - e^y \cdot y' = y'$ (O) $\quad \underbrace{e^x - e^y = y'}_{\text{본인이 선택}}$ (X)

이 새끼에서 방향을 잘못잡아 9번만 40분동안 풀다가 64점을 맞고 좌절했다.

이후 마주친 대학들은 명문대는 커녕 처음 들어볼 대학들이었다.

내일 이어서....