2021학년도 6월 모의평가 확장분석

수학 영역
(가 형)

성명		수험번호						-				

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

> **곤경에 빠지는 건 뭔가를 몰라서가 아니다.**
> **뭔가를 확실히 안다는 착각 때문이다.**

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

우 주 설 모 의 평 가

제 2 교시

수학 영역(가 형)

수열의 극한 관찰방법

1. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}$$

에 대하여 $f(k)=-\frac{1}{3}$을 만족시키는 정수 k의 개수는? (6월 모의평가 7번)

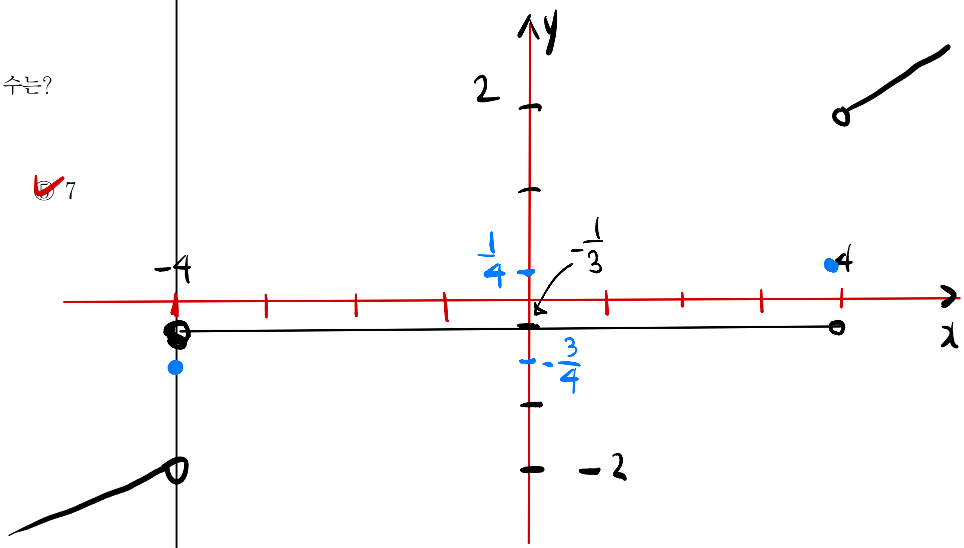
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$-4<k<4$

2. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}$$

의 그래프를 그리시오.



3. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}+3}$$

에 대하여 함수 $f(x)$의 치역의 집합을 A라 할 때, 집합 A의 원소의 개수는? (변형문항)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$|x|>4$, $f(x)=0$

$|x|=4$, $f(x)=0$

$x=3$, $f(x)=-\frac{1}{4}$

$x=-3$, $f(x)=-\frac{1}{2}$

$|x|<3$, $f(x)=-\frac{1}{3}$

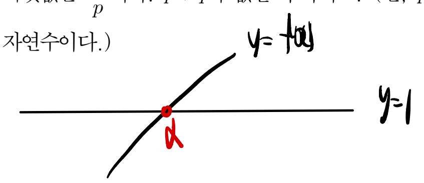
핵심정리

킬러에도 적용되는가? f(x)=±1인 상황이 반드시 존재,

4. 삼차함수 $f(x)$에 관하여 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\{f(x)\}^{2n}+x^3}{\{f(x)\}^{2n-1}+8\{f(x)\}^2} & (x\neq 0)\\ f(0) & (x=0)\end{cases}$$ ㄱ

가 실수 전체의 집합에서 연속이도록 하는 모든 $f(x)$에 대하여 $f(-3)$의 최댓값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



$x=\alpha$에서 $f(\alpha)=1$ 을 만족시키고

$$\lim_{x\to\alpha-} g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{-(0.999)^{2n}+(\alpha-)^3}{(0.999)^{2n-1}+8(0.999)^2}=\frac{\alpha^3}{8}$$

$$\lim_{x\to\alpha+} g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{-(1.001)^{2n}+(\alpha+)^3}{(1.001)^{2n-1}+8(1.001)^2}=-1$$

$$g(\alpha)=\frac{-(1)^{2n}+\alpha^3}{(1)^{2n-1}+8\times 1^2}=\frac{\alpha^3-1}{9}$$

$\dfrac{\alpha^3}{8}=-1=\dfrac{\alpha^3-1}{9}$ 을 만족시키는, $\alpha=-2$, // $f(x)=1$의 실근은 $x=-2$가 유일해야한다.

마찬가지로 $f(\beta)=-1$ 으로 두고 반복하면, // $f(x)=-1$의 실근은 $x=2$가 유일해야한다.

$f(x)=0$ 이되는 $x=\gamma$라 하자. ㄱ에서 $\lim_{x\to\gamma}$ 를 하면, 분모 → 0 일때 분자 → 0 이므로 $\gamma=0$.

$f(x)=0$ 의 실근은 $x=0$ 이 유일해야 한다.

지금까지 정보를 종합하면,

$f(x)=a(x-2)(x+2)x-\frac{1}{2}x$

$=ax^3-(4a+\frac{1}{2})x$, (기함수)

$f(x)=-2, 0, 2$ 의 실근의 유일성을 위해 $f'(x)\le 0$ 이어야 한다.

$f'(x)=3ax^2-(4a+\frac{1}{2})$, $a<0$ 이고,

$-4a-\frac{1}{2}\le 0$

$-\frac{1}{8}\le a<0$.

$f(-3)=-27a+12a+\frac{3}{2}$

$=-15a+\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}<f(-3)\le\frac{27}{8}$

$\boxed{답: 35}$

함수의 연속성 추가 활용

5. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(e^{2x}-1)^2 f(x) = a - 4\cos\frac{\pi}{2}x$$

를 만족시킬 때, $a \times f(0)$의 값은? (단, a는 상수이다.) (6월 모의평가 10번)

① $\frac{\pi^2}{6}$ ② $\frac{\pi^2}{5}$ ③ $\frac{\pi^2}{4}$ ④ $\frac{\pi^2}{3}$ ⑤ $\frac{\pi^2}{2}$

생략,

이 문제에서 얻을 수 있는 교훈은?

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x) = x(x+3)$이다.
> (나) $g(0) = 1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? [4점] (2019학년도 수능 수학 나형 21번)

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

$\lim_{x\to\alpha} g(x) = \lim_{x\to\alpha} \frac{x(x+3)}{f(x)}$,

$\lim_{x\to0} \frac{x(x+3)}{f(x)} = g(0) = 1$

↳ $\lim_{x\to0} \frac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)} = \frac{3}{b} = 1$

, $b=3$

$\lim_{x\to\alpha} g(x) = \frac{x+3}{x^2+ax+3}$ 에서

분모 $\to 0$ 일때, 분자 $\not\to 0$ 이면 안된다.

$x^2+ax+3>0$, $a^2-12<0$

$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

↓

생략,

도함수의 연속성에 적용

7. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(e^{2x}-1)^2 f(x)=\tan x-\sin x$$

$f(0)+f'(0)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\tan x}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}\times 0}{4} = 0$$

$f(0)=0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{(e^{2x}-1)^2}\times\frac{\tan x}{x}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{\frac{1}{2}}{4}\times 1 = \frac{1}{8}$$

답: 9

이번년도 경우의 수 확률 핵심 :1.케이스 분류 2.확률의 연산

8. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? (6월 모의평가 17번)

(가) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 4보다 큰 수가 적혀 있는 카드가 있다.
(나) 5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 5보다 작은 수가 적혀 있는 카드가 있다.

① $\frac{1}{28}$ ② $\frac{1}{14}$ ③ $\frac{3}{28}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{5}{28}$

생략,

9. A, B, C, D의 4개의 문자와 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자가 있다. 이 8개의 문자와 숫자를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? (수능특강)

(가) 문자 A의 양쪽 옆에 숫자를 나열한다.
(나) 문자 1의 양쪽 옆에 문자를 나열한다.

① $\frac{3}{40}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{3}{20}$ ⑤ $\frac{7}{40}$

생략,

묶어서 나열할 때의 주의사항은?

10. 1, 2, 3, 4가 적힌 4장의 카드와 0이 적힌 7장의 카드가 있다. 이 11장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 구분하지 않는다.)

| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

(가) n이 적혀있는 카드는 $(n-1)$이 적혀있는 카드보다 오른쪽에 있고, 두 카드는 서로 이웃하지 않는다. $(n=3,\ 4)$

(나) 1이 적혀있는 카드는 2가 적혀있는 카드보다 왼쪽에 있거나 바로 오른쪽에 있다.

↳ case1 ↳ case 2

#case1.

각각의 공간에 들어갈 '0' 카드의 개수를 (a,b,c,d,e)라 하자,

1 2 3 4

a b c d e

$a+b+c+d+e=7$, $c,d\ge 1$ [(가)]

${}_5H_5=126$

case 2.

2 1 3 4

a b c d

$a+b+c+d=7$

$c\ge 1$, ${}_4H_6=84$

$126+84$

$\boxed{=210}$

11. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9가 하나씩 적혀 있는 9장의 카드가 있다. 이 9장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

4의 배수가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 그 수 보다 작은 수가 적혀 있는 카드가 있다.

case 1

| | 4 | |

그룹 A

| | 8 | |

그룹 B

그룹 A 결정: ${}_3C_2\times 2$

그룹 B 결정: ${}_4C_2\times 2$

그룹A, 그룹B, 남은 수1, 남은 수2, 남은 수3

⇒ 나열: $5!$

$12\times 6!$

case 2.

| | 4 | | 8 | |

그룹 C

그룹 C 결정: $2\times{}_3C_1\times 2\times 4$

나열: $5!$

⇒ $8\times 6!$

$$\frac{(8+12)6!}{9!}=\frac{20}{7\times 8\times 9}=\frac{5}{126}$$

$\boxed{131}$

12. 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허락하여 10개를 택해 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수는? (수능특강)

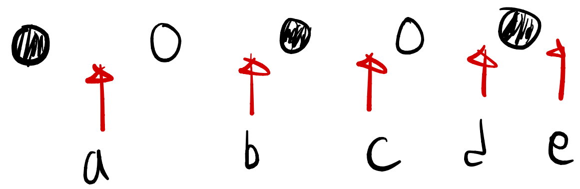
(가) x와 y는 한 번만 서로 이웃한다.
(나) y와 z는 한 번만 서로 이웃한다.
(다) z와 x는 한 번만 서로 이웃한다.

생략, $\boxed{504}$

13. 그림과 같이 검은 공 8개와 흰 공 5개를 임의로 나열 할 때, 왼쪽에서부터 차례대로 읽은 공의 색이 4번 바뀔 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이고 예를 들어 아래의 그림은 검정에서부터 시작하여 흰색이 되었다가 다시 검정, 흰색, 검정으로 색이 4번 바뀌었다.)

●○○●●●○○○●●●●

검정부터 시작

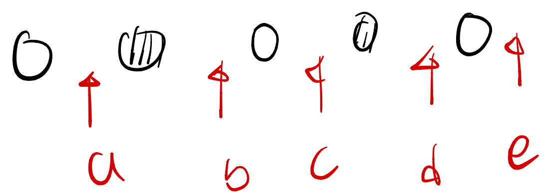


$a+c+e=5$, $b+d=3$

$a, b, c, d, e \geq 0$

$_3H_5 \times {}_2H_3 = 84$

흰공부터 시작



$a+c+e=2$, $b+d=6$

$a, b, c, d, e \geq 0$

$_3H_2 \times {}_2H_6 = 42$

$\frac{(84+42)}{_{13}C_5} = \frac{126}{13\times 11 \times 9} = \frac{14}{143}$, $\boxed{157}$

지수로그 함수 그래프 유형

14. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1<x_2$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $x_2>\dfrac{1}{2}$

ㄴ. $y_2-y_1<x_2-x_1$

ㄷ. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

생략

15. 두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1<x_2$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (사관학교)

<보기>

ㄱ. $\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2}>8+\log_2(\log_3 6)$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

생략,

중복순열과 순서쌍의 개수

16. 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3\}$에 대하여 A에서 B로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? (6월 모의평가 19번)

$f(1)\geq 2$ 이거나 함수 f의 치역은 B이다.

① $\frac{19}{27}$ ② $\frac{20}{27}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{22}{27}$ ⑤ $\frac{23}{27}$

생각

17. 두 집합 $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 f중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는? (수능특강)

(가) $f(1)+f(3)=4$ (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 2316 ② 2326 ③ 2336 ④ 2346 ⑤ 2356

생각

18. 집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는?

> 함수 f의 치역의 개수를 m,
> 함수 $f \circ f$의 치역의 개수를 n이라 할 때,
> $2m-n=5$이다.

① 840 ② 870 ③ 900 ④ 930 ⑤ 960

(m,n), f의 원소 개수 → f의 원소 개수 순서

$(5,5)$의 경우

$5!=120$

$(3,1)$의 경우

${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$

$(4,3)$의 경우

${}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_4C_2 \times 3! = 720$

$120+60+720=900$

19. 주사위를 5번 던져서 나온 눈의 수를 모두 곱하여 나온 수가 3의 배수이지만 4의 배수는 아닐 확률은 $\frac{p}{6^5}$이다. p의 값을 구하시오.

「4는 사용되면 안돼요.
2, 6은 최대 1번만 나올수 있어요」

6이 1번 나올때,

나열이므로 몇번째에 나오는지 고려 해야함. $({}_5C_1)$

⇒ 2, 6 이 나올수 없게 돼요.

1,3,5 만 가능 (3^4)

${}_5C_1 \times 3^4 = 405$

6이 나오지 않고 2가 1번 나올때

2는 몇번째에 나오는지? $({}_5C_1)$

⇒ 이제 1,3,5 만 가능, 3이 적어도 1번 나와야 돼요

$(3^4-2^4)=65$

${}_5C_1 \times 65 = 325$

6, 2가 모두 나오지 않을때

⇒ 1,3,5만 가능, 3이 적어도 1번 나와야 돼요

$(3^5-2^5)=211$

$405+325+211$
$=941$

$\boxed{941}$

추출은 순서를 고려하지 않는다.

20. 5개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 3개의 수를 택할 때, 택한 세 수의 곱이 4의 배수인 경우의 수를 구하시오.

4를 적어도 1번 선택할 경우

4를 1개 뽑고 시작, $_5H_2 = 15$

4를 선택 X, 2를 적어도 2번 선택

$_4H_1 = 4$

$15+4 = \boxed{19}$

21. 5개의 자연수 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 4개의 수를 선택할 때, 선택한 네 수들의 곱이 6의 배수가 되는 경우의 수를 구하시오.

마찬가지,

6을 적어도 1개 선택

$_5H_3 = 35$

3을 적어도 1개 + 짝수를 적어도 1개

$_4H_3 - {}_2H_3 = 16$

$35+16 = \boxed{51}$

$\boxed{51}$

등비수열의 합을 이용하는 수열

22. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 100이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? (6월 모의평가 21번)

① 150 ② 154 ③ 158 ④ 162 ⑤ 166

다음페이지

23. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_3 \sqrt[3]{\frac{3(2n+1)}{2n-1}}$$

이다. 다음 조건을 만족시키는 자연수 l의 최솟값을 구하시오. [4점]

> $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 l이하의 자연수가 되도록 하는
>
> 서로 다른 자연수 m의 개수는 2이다.

① 39 ② 42 ③ 45 ④ 48 ⑤ 51

4 쉼곽

$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}} = \frac{1}{2}\left(1+\log_2\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right)$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{1}{2}\left(1+\log_2\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(m+\log_2\left(\frac{2}{m+2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(m+1-\log_2(m+2))$$

자연수 값을 갖기 위해서는 우선 자연수 N에 대하여

$m+2=2^N$꼴이어야 한다. 이를 대입하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{1}{2}(2^N-1-N)$$

여기서 2^N-1-N이 짝수여야 하는데

한편 등비수열의 합 공식 $\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$을 이용하면

$2^N-1=1+2+2^2+\cdots+2^{N-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{1}{2}\left(1-N+\underline{2+2^2+\ \cdots\ +2^{N-1}}\right)$ 에서

밑줄 친 부분은 이미 짝수이다. 그렇다면 $1-N$이 짝수면 된다.

그렇다면, $N=3,\ 5,\ 7$ 에서

$\sum_{k=1}^{m} a_k = 2,\ 13,\ 60$으로 조건을 만족시키고

$m+2=2^N$에서 $m=6,\ 30,\ 126$을 얻는다.

$6+30+126=162$

(정말 어딜 가나 있는 숫자 162)

수열의 관찰과 나열

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2, \qquad b_{n+1} = a_n - b_n + n$$

을 만족시킨다. $b_{20} = 14$일 때, k의 값은? (180919 나형)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	1	0	-1	1	0	-1	1	0

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n+n	2	3	3	3	6	6	6	9	9
b_n	k	$2-k$	$1+k$	$2-k$	$1+k$	$5-k$	$1+k$	$5-k$	$4+k$

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n+n	9	12	12	12	15	15	15	18	18	18	21
b_n	$5-k$	$4+k$	$8-k$	$4+k$	$8-k$	$7+k$	$8-k$	$7+k$	$11-k$	$7+k$	$11-k$

$b_{20} = 11-k$

$k=-3$

25. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1 = a_1$$

이고, 2이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} + a_n & (n\text{이 3의 배수가 아닌경우}) \\ b_{n-1} - a_n & (n\text{이 3의 배수인경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10} = a_{10}$일 때, $\dfrac{b_8}{b_{10}} = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (180629 나형)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$	$a+5d$	$a+6d$	$a+7d$	$a+8d$	$a+9d$
b_n	a	$2a+d$	$a-d$	$2a+2d$	$3a+6d$	$2a+d$	$3a+7d$	$4a+14d$	$3a+6d$	$4a+15d$

$a+9d = 4a+15d$,

$3a = -6d$

$a = -2d$,

$b_{10} = 7d$, $b_8 = 6d$

$\dfrac{b_8}{b_{10}} = \dfrac{6}{7}$

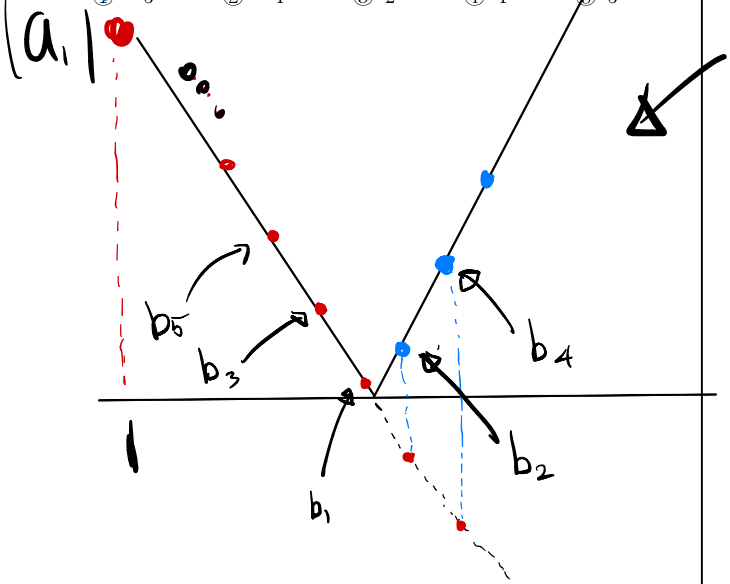
$\boxed{13}$

26. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_n|$의 값을 크기가 작은 것부터 차례대로 나열한 수열을 $\{b_n\}$이라 하자.

> (가) 임의의 자연수 m, n에 대하여 $b_m = b_n$이면, $m = n$이다.
>
> (나) $n \neq 13$일 때, $2b_{n+1} = b_n + b_{n+2}$

$\sum_{n=1}^{10} b_n = 20$이고, $a_8 > 0$일 때, a_1의 값은?

① -5 ② -4 ③ 2 ④ 4 ⑤ 5



(가): $m \neq n$ 이면 $b_m \neq b_n$

(나): $b_1 \sim b_{14}$ 는 등차수열

$b_{14} \sim \cdots$ 는 등차수열

공차 d 에 대하여

$b_1 = a$ 이면, $b_2 = d - a$, $b_3 = a + d$ 에서

$2(d-a) = a + a + d$,

$d = 4a$ 를 얻는다.

$b_n \Rightarrow a, 3a, 5a, 7a, \cdots$

$b_1 + b_2 + \cdots + b_9 + b_{10} = 20$

$a + 3a + \cdots + 17a + 19a$

$= 100a = 20$

$a = \frac{1}{5}$,

문제상황

(나⇒) $|a_1| = b_{13}$ 을 얻는다.

$b_{13} = 25a = 5$

$a_1 = \pm 5$ 에서

$a_8 > 0$ 이므로, $a_1 \sim a_7 < 0$

$a_1 = -5$,

수능 출제 예상소재 리스트

수학 I

제곱근 대표기출: 210612 가형)

지수 로그의 연산 (대표기출: 200928 나형)

지수로그 함수 그래프에서 방정식 도출 (대표기출: 180916 가형)

지수로그 함수 그래프 ㄱㄴㄷ (대표기출: 111116 가형)

삼각함수의 동경 (대표기출: 210921 가형)

삼각함수의 그래프 (수능특강 수학I 43P 예제3번)

사인법칙과 코사인법칙 (대표기출: 210329 나형)

등차수열과 등비수열 (대표기출: 191129 나형)

$S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$ (대표기출: 210315 나형)

여러 가지 수열 (대표기출: 210921 가형)

수열 과정 서술형 (대표기출: 210916 가형)

수학적 귀납법 과정 서술형 (대표기출: 210615 가형)

확률과 통계

중복순열과 함수(순서쌍)의 개수 (대표기출: 210619 가형)

같은 것이 포함된 순열 (대표기출: 201128 가형)

기준을 잡은 뒤 중복조합 (대표기출: 210929 가형)

보조사가 들어간 제약조건 (대표기출: 201120 가형)

같은 것을 다르게 보는 확률 (대표기출: 180615 가형)

순서쌍의 개수 / 순서쌍의 개수 (대표기출: 181128 가형)

독립 시행의 확률 /n번 만에 처음으로 (대표기출: 190920 나형)

조건부 확률 (대표기출: 200528 가형)

독립/종속/배반 문장형태 문제 (대표기출: 191127 가형)

이산확률변수와 시그마 활용 (대표기출: 180914 가형)

이항분포의 관찰 (수능완성 실전모의평가 5회 18번)

정규분포 (설바이벌 S 19번)

표본평균의 이산관찰 (대표기출: 151118 B형)

표본평균의 활용 (설바이벌 S 29번)

모평균의 추정 (대표기출: 191126 가형)

주요기출

1. 자연수 n이 $2 \leq n \leq 11$일 때,

$-n^2 + 9n - 18$

의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

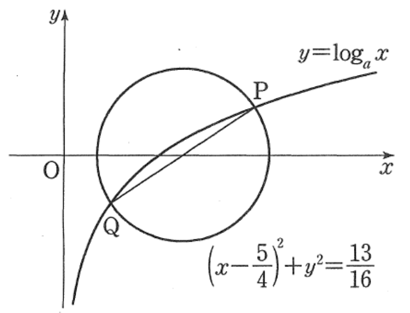
① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

2. 네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

(가) $3^a = 5^b = k^c$
(나) $\log c = \log(2ab) - \log(2a+b)$

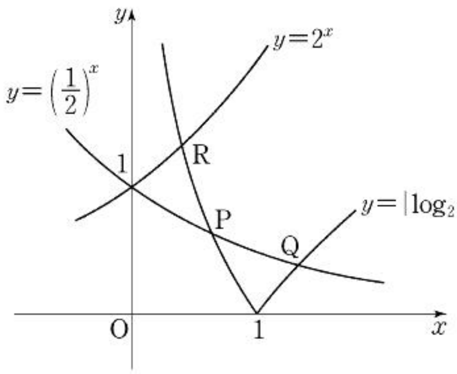
3. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 곡선 $y = \log_a x$ 와 원 $C: \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{13}{16}$ 의 두 교점을 P, Q 라 하자. 선분 PQ 가 원 C의 지름일 때, a 의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



4. 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$ 와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ $(x_1 < x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $R(x_3, y_3)$이라 하자. 옳은 것만을 <보기> 에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2011학년도 수능 가나16]



[보 기]

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$

ㄴ. $x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$

ㄷ. $x_2(x_1-1) > y_1(y_2-1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 닫힌구간 $[-2\pi, 2\pi]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sin kx+2, \quad g(x)=3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는? [4점]

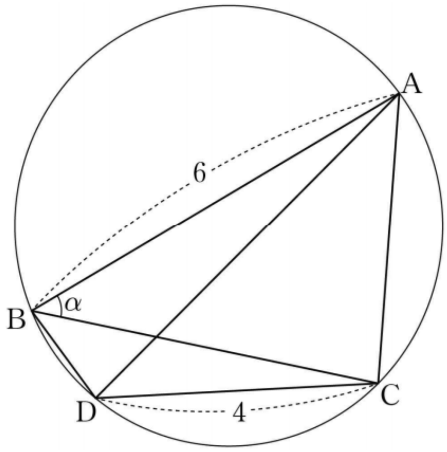
> 실수 a가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이면
> $\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$
> 이다.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

6. $0 \le x \le 4\pi$에서 곡선 $y = \sin x$위에 x좌표가 각각 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2}{3}\pi$인 두 점 P, Q가 있다. 이 곡선 위에 있으며 x 좌표가 3π이상이고 4π이하인 두 점 R, S를 사각형 PRSQ가 평행사변형이 되도록 잡을 때, 삼각형 QRS의 무게중심의 좌표는 (a, b)이다. $\frac{a}{b}$의 값은? (수특 43. 예제3)

① $-\frac{47}{3}\pi$ ② -15π ③ $-\frac{43}{3}\pi$ ④ $-\frac{41}{3}\pi$ ⑤ -13π

7. 그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{\mathrm{AB}} = 6$이고, $\angle \mathrm{ABC} = \alpha$라 할 때 $\cos\alpha = \frac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{CD}} = 4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2 = 9 : 5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [2020년 3월 모의평가 나형 29번]



8. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오. 〔4점〕

〔2019학년도 수능 나29〕

(가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$
(나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+\lvert b_n\rvert)=67$
(다) $\sum_{n=1}^{5}(\lvert a_n\rvert+\lvert b_n\rvert)=81$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}ka_k$$

를 만족시킨다. $a_1=2$일 때, $a_2+\dfrac{a_{51}}{a_{50}}$의 값은? [4점]

① 47 ② 49 ③ 51 ④ 53 ⑤ 55

10. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 다섯 개를 다음 조건을 만족시키도록 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 다섯 자리의 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 각각의 홀수는 선택하지 않거나 한 번만 선택한다.
> (나) 각각의 짝수는 선택하지 않거나 두 번만 선택한다.

11. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

12. 한 개의 동전을 7번 던질 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

> (가) 앞면이 3번 이상 나온다.
> (나) 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있다.

① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{23}{32}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{25}{32}$ ⑤ $\frac{13}{16}$

13. 그림과 같이 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 카드가 각각 3장씩 12장이 있다. 이 12장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드 중에 같은 숫자가 적혀 있는 카드가 2장 이상일 확률은? [4점]

$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{4}$

① $\frac{12}{55}$ ② $\frac{16}{55}$ ③ $\frac{4}{11}$ ④ $\frac{24}{55}$ ⑤ $\frac{28}{55}$

14. 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$ 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$가 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$ 을 만족시킬 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

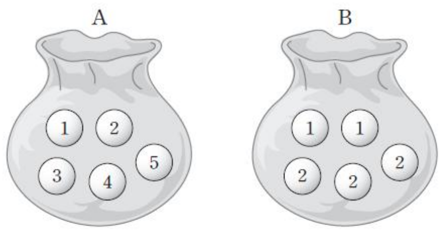
15. 상자 A 와 상자 B 에 각각 6개의 공이 들어 있다. 동전 1개를 사용하여 다음 시행을 한다.

동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 상자 A 에서 공 1개를 꺼내어 상자 B 에 넣고, 뒷면이 나오면 상자 B 에서 공 1 개를 꺼내어 상자 A 에 넣는다.

위의 시행을 6번 반복할 때, 상자 B 에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 될 확률은? [4점]

① $\dfrac{1}{64}$　② $\dfrac{3}{64}$　③ $\dfrac{5}{64}$　④ $\dfrac{7}{64}$　⑤ $\dfrac{9}{64}$

16. 주머니 A에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 구슬이 들어 있고, 주머니 B에는 1, 1, 2, 2, 2의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 구슬이 들어 있다. 주머니 A에서 공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수를 차례로 a_1, a_2라 하고, 주머니 B에서 공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수를 차례로 b_1, b_2라 하자. $a_1 \geq 3$일 때, $a_1 b_1 < a_2 b_2$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 한 번 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



17. 한 개의 주사위를 한 번 던진다. 홀수의 눈이 나오는 사건을 A, 6이하의 자연수 m에 대하여 m의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

18. 두 이산확률변수 X와 Y가 가지는 값이 각각 1 부터 5 까지의 자연수이고

$$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10} \quad (k=1,\,2,\,3,\,4,\,5)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=4$ 일 때, $\mathrm{E}(Y)$ 의 값은? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ $\frac{13}{2}$

19. 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 구슬 6개가 들어있는 주머니에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 주머니 안에 넣는 시행을 한다. 매회 시행마다 6의 약수가 적혀 있는 구슬을 꺼내면 3점을 얻고, 6의 약수가 아닌 수가 적혀 있는 구슬을 꺼내면 2점을 잃는다고 한다. 162회의 시행 후 획득한 점수가 201점 이상 246점 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6687 ④ 0.6826 ⑤ 0.7748

20. 실수 전체집합에서 정의된 연속확률변수 X는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 함수 $f(t)$를

$$f(t) = \mathrm{P}(X \leq t) + \mathrm{P}(X \geq t+6)$$

로 정의할 때, 함수 $f(t)$는 최솟값 0.3174를 갖는다. 다음 조건을 만족시키는 m의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\alpha+\beta+\sigma$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 통해 구한 것은?

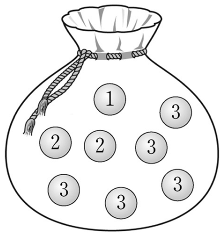
$$f(10) \leq f(12) \leq 0.5228$$

① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

21. 주머니 속에 1의 숫자가 적혀 있는 공 1개, 2의 숫자가 적혀 있는 공 2개, 3의 숫자가 적혀 있는 공 5개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 2번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은?

[4점][2015학년도 수능]

① $\frac{5}{32}$ ② $\frac{11}{64}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{13}{64}$ ⑤ $\frac{7}{32}$



22. 같은 종류의 주사위 3개를 동시에 굴려 나온 눈의 수를 각각 a, b, c $(a \geq b \geq c)$ 라 할 때, $(-1)^{ab}+(-1)^{bc}+(-1)^{ca}$의 값을 기록하는 시행을 반복하자. 8번의 시행을 하는 동안 기록된 모든 값들의 합을 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하시오. [4점]

23. 어느 지역 주민들의 하루 여가 활동 시간은 평균이 m분, 표준편차가 σ분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역 주민 중 16명을 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균이 75분일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$이다. 이 지역 주민 중 16명을 다시 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균이 77분일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \leq m \leq d$이다. $d-b=3.86$을 만족시키는 σ의 값을 구하시오.
(단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58)=0.99$로 계산한다.) [4점]

1) 1

2) 75

$3^a=5^b=k^c=X$라고 하면 $3=X^{\frac{1}{a}},5=X^{\frac{1}{b}},k=X^{\frac{1}{c}}$이다.

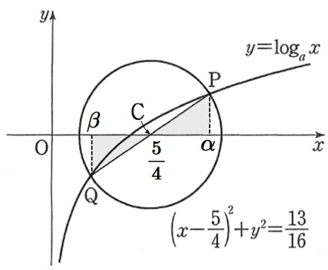
한편 주어진 조건에서 $\frac{1}{c}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}$이므로

$X^{\frac{1}{c}}=X^{\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}}=X^{\frac{1}{2a}}X^{\frac{1}{b}}$이다.

즉, $k=\sqrt{3}\times5$이다.

따라서 $k^2=75$

3) 3



원의 중심을 $\mathrm{C}\left(\frac{5}{4},0\right)$라 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CQ}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$이다.

P 와 Q 의 x좌표를 각각 α,β라 하자.

위의 그림에서 빗금친 두 삼각형이 합동임을 이용하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{5}{4}$ $\cdots$㉠

$\log_a\alpha+\log_a\beta=0$ 즉, $\alpha\beta=1$ $\cdots$㉡

이다.

㉠과 ㉡을 연립하면 $\alpha=2$임을 알 수 있다.

한편 원의 반지름 길이에 의하여 $\overline{\mathrm{CP}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$ 이고 피타고라스 정리를

이용하여 P 의 좌표를 구하면 $\mathrm{P}\left(2,\frac{1}{2}\right)$이다.

점 P 는 $y=\log_a x$ 위의 점이므로 대입하면

$\frac{1}{2}=\log_a 2$ 즉, $a=4$이다.

4) 3

ㄱ. $y=-\log_2 x$의 그래프 위의 점 $\left(\frac{1}{2},1\right)$과 $P(x_1,y_1)$의 위치를

비교하면 $y_1<1$이므로 $\frac{1}{2}<x_1<1$ $\therefore$ 참

ㄴ. $y=2^x$의 역함수는 $y=\log_2 x$이고,

$y=-\log_2 x$의 역함수는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2$이므로

$y=2^x$와 $y=-\log_2 x$의 교점 $R(x_3,y_3)$와 $y=\log_2 x$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의

교점 $Q(x_2,y_2)$는 직선 $y=x$에 대해 대칭이다.

$\therefore x_3=y_2,\ x_2=y_3 \cdots\cdots (*)$

$\therefore x_2y_2-x_3y_3=0$ $\therefore$ 참

ㄷ. 점 $(1,0)$을 S라 하면

($\overline{RS}$의 기울기) < ($\overline{PS}$의 기울기) 이므로

$\frac{y_3}{x_3-1}<\frac{y_1}{x_1-1}$이고, 여기에 위의 $(*)$을 대입하면

$\frac{x_2}{y_2-1}<\frac{y_1}{x_1-1}$이 성립하므로

$x_2(x_1-1)<y_1(y_2-1)$ $(\because x_1-1<0, y_2-1<0)$ $\therefore$거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

5) 2

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 어떤 점을 (θ,a)라고 하자.

$\sin(k\theta)+2=a$, $\cos(12\theta)=a$에 대하여

$\sin kx+2=a \Leftrightarrow \sin kx+2=\sin(k\theta)+2$

$\Rightarrow \sin kx=\sin k\theta$

이때, **동경과 $\sin$값의 관계**

$\sin\alpha=\sin\beta$이려면, $\alpha+\beta=(2n+1)\pi$ 또는 $\alpha-\beta=2n\pi$이다. (단, n은 정수)

를 사용하면, $kx+k\theta=(2n+1)\pi$ 또는 $kx-k\theta=2n\pi$

$\Rightarrow x=\frac{(2n+1)\pi}{k}-\theta$ 또는 $x=\frac{2n\pi}{k}+\theta$

이것을 $y=\cos12x$에 대입한

$\cos\left(\frac{12(2n+1)}{k}\pi-12\theta\right),\cos\left(\frac{24n\pi}{k}+12\theta\right)$가 a이면 되는데

$a=\cos12\theta$이므로 결국 해결할 것은

$\cos(12\theta)=\cos\left(\frac{12(2n+1)}{k}\pi-12\theta\right)=\cos\left(\frac{24n\pi}{k}+12\theta\right)$

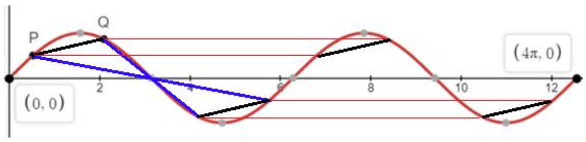
가 n에 어떤 정수를 넣어도 성립하면 된다고 해석할 수 있다.

θ가 어떤 특수한 값인 것은 아니므로 이는 주기성을 물어보는 것.

$\frac{12}{k}(2n+1)$, $\frac{24n}{k}$이 정수 n에 값에 관계없이 짝수이면 된다.

$k=1, 2, 3, 6$이 가능하다.

6) 1



파란색 보조선: 삼각함수 그래프의 점대칭 성질을 이용
빨간색 보조선: 삼각함수 그래프의 주기성을 이용

7) 63

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCD}=\theta$, $\overline{\mathrm{AD}}=a$, $\overline{\mathrm{CB}}=b$ 라 하면
삼각형 ABD 의 넓이 S_1 은

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times 6\times a\times\sin\theta=3a\sin\theta$

삼각형 CBD 의 넓이 S_2 는

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times b\times 4\times\sin\theta=2b\sin\theta$

$S_1:S_2=9:5$ 이므로 $3a:2b=9:5$
$a:b=6:5$ 이므로 $a=6k$, $b=5k\,(k>0)$라고 하자.
삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의해
$\overline{\mathrm{AC}}^2=6^2+(5k)^2-2\times 6\times 5k\times\cos\alpha$ …… ㉠
$\angle\mathrm{ABC}$ 와 $\angle\mathrm{ADC}$ 는 같은 호에 대한 원주각이므로
$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}=\alpha$
삼각형 ADC 에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{AC}}^2=(6k)^2+4^2-2\times 6k\times 4\times\cos\alpha$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하면
$11k^2+9k-20=0$, $(11k+20)(k-1)=0$
$k>0$ 이므로 $k=1$ 이고 $a=6k=6$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ADC 의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$

따라서 $S^2=(3\sqrt{7})^2=63$

8) 117

조건 (가)와 조건 (나)에서
$\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)-\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=67-27$
이므로 $\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=40$ … ㉠
한편, 등비수열 b_n의 공비를 r(r는 음의 정수)라 하면
$b_1>0$, $b_2<0$, $b_3>0$, $b_4<0$, $b_5>0$ 이므로 ㉠에서
$-2(b_2+b_4)=40$
즉, $b_1r+b_1r^3=-20$ … ㉡
$b_1r(1+r^2)=-20$
이다. 이때 b_1r는 음의 정수이고, $1+r^2$은 자연수이므로
$1+r^2$은 20의 양의 약수이어야 한다.
20의 양의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이고, r가 음의 정수이므로
$r=-1$ 또는 $r=-2$ 또는 $r=-3$ 이다.
㉡에서
$r=-1$일 때, $b_1=10$
$r=-2$일 때, $b_1=2$
$r=-3$일 때, $b_1=\frac{2}{3}$
이때, b_1은 자연수이므로
$b_1=10$, $r=-1$ 또는 $b_1=2$, $r=-2$
(i) $b_1=10$, $r=-1$일 때
$\sum_{n=1}^{5}b_n=10$이고, 조건(가)에서 $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$ 이므로
$\sum_{n=1}^{5}a_n=17$
이때 $\sum_{n=1}^{5}a_n=5a_3=17$에서 $a_3=\frac{17}{5}$
한편, 등차수열 a_n의 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수이므로
등차수열 a_n의 모든 항은 정수이다.
따라서 $b_1=10$, $r=-1$은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.
(ii) $b_1=2$, $r=-2$ 일 때
$\sum_{n=1}^{5}b_n=\frac{2\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=22$
조건 (가)에서 $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$ 이므로
$\sum_{n=1}^{5}a_n=5$
이때 $\sum_{n=1}^{5}a_n=5a_3=5$에서 $a_3=1$
또, $\sum_{n=1}^{5}|b_n|=\frac{2\{1-|-2|^5\}}{1-|-2|}=62$
조건 (다)에서 $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$ 이므로
$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=19$ … ㉢
한편, 등차수열 a_n의 공차를 d (d는 음의 정수)라 하면
$a_3=1$이므로
$a_1>a_2>a_3>0\geq a_4>a_5$
이다. 이때,

$a_1=1-2d,\ a_2=1-d,\ a_4=1+d,\ a_5=1+2d$ 이므로 ㉢에서

$(1-2d)+(1-d)+1-(1+d)-(1+2d)=19$

$1-6d=19$

$d=-3$

따라서 $a_1=1-2\times(-3)=7$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a_1=7,\ d=-3,\ b_1=2,\ r=-2$

등차수열 a_n의 일반항은

$a_n=7+(n-1)\times(-3)=-3n+10$

등비수열 b_n의 일반항은

$b_n=2\times(-2)^{n-1}$

따라서

$a_7+b_7=-11+128=117$

9) 4

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}ka_k$ 에서 $n=1$ 을 대입하면

$a_2=\sum_{k=1}^{1}ka_k=a_1$ 이므로 $a_2=2$

$n\ge 2$ 일 때 $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$ 이므로

$$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$$
$$=na_n$$

그러므로 $a_{n+1}=(n+1)a_n$ (단, $n\ge 2$)

위 식에 $n=50$ 을 대입하면

$a_{51}=51a_{50}$ 이고 $a_{50}>0$ 이므로 $\dfrac{a_{51}}{a_{50}}=51$

따라서 $a_2+\dfrac{a_{51}}{a_{50}}=2+51=53$

10) 450

[출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는가?

조건 (가), (나)를 만족시키는 경우는 다음 두 가지 경우 뿐이다.

(ⅰ) 홀수 1개, 짝수 4개를 택하는 경우

사용할 홀수 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

이 각각에 대하여 짝수는 3개 중에서 2개를 택하여 두 번씩 사용해야 하므로 사용할 짝수를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

이 각각에 대하여 택한 수 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!2!}=30$

따라서 이 경우의 수는

$3\times3\times30=270$

(ⅱ) 홀수 3개, 짝수 2개를 택하는 경우

짝수는 1개만 택하여 두 번 사용해야 하므로 사용할 짝수 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

이 각각에 대하여 택한 수 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$

따라서 이 경우의 수는

$3\times60=180$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$270+180=450$

11) 168

해설생략

12) ①

[출제의도] 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

앞면은 H, 뒷면을 T로 나타내기로 하자.

(ⅰ) 앞면이 3번 나오는 경우

H 3개와 T 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_7C_3=35$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

즉 조건 (나)를 만족시킬 확률은

$(35-10)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^7$

(ⅱ) 앞면이 4번 나오는 경우

H 4개와 T 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_7C_4=35$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는 1, 즉 조건 (나)를 만족시킬 확률은

$(35-1)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^7$

(ⅲ) 앞면이 5번 이상 나오는 경우

조건 (나)를 항상 만족시키므로 이 경우의 확률은

$({}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^7$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$(25+34+29)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^7=\dfrac{88}{128}=\dfrac{11}{16}$

13) ⑤

같은 숫자가 적혀있는 카드가 2장 이상일 사건을 A라 하면
3장 모두 다른 카드가 나오는 사건은 A^C이다.
12장의 카드 중 3장의 카드를 선택하는 방법의 수는 ${}_{12}\mathrm{C}_3$이고
3장이 모두 다른 카드가 나오는 경우의 수는
1, 2, 3, 4중 3개를 선택하는 방법의 수 ${}_4\mathrm{C}_3$이고
선택된 숫자가 적혀있는 카드 3장 중 하나씩을 선택하는 방법의 수는
각각 ${}_3\mathrm{C}_1$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{27}{55}$$

따라서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{27}{55}=\frac{28}{55}$이다.

14) 19

[출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하고 확률을 구할 수 있는가?
방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x,\ y,\ z$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=\frac{12\times11}{2\times1}=66$$

이 중에서 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립하려면 $x,\ y,\ z$ 중에서 오직 두 개만 서로 같아야 한다.
그런데 $x=y$를 만족시키는 순서쌍은
$(0,\ 0,\ 10),\ (1,\ 1,\ 8),\ \cdots,\ (5,\ 5,\ 0)$
의 6개이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 순서쌍의 개수는
${}_3\mathrm{C}_2\times6=3\times6=18$
따라서 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립할 확률은
$\frac{18}{66}=\frac{3}{11}$
이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$이 성립할 확률은
$1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$
따라서 $p+q=11+8=19$

15) ③

동전을 던져서 앞면과 뒷면이 나오는 확률은 $\frac{1}{2}$로 같다.
상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 되어야 하므로 5번째 시행 후에는 7, 4번째 시행 후에는 6이어야 한다.
4번째 시행 후에 6이 되기 위해서는 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나와야 하고, 첫 번째와 두 번째 모두 앞면이 나오는 경우를 제외해야 하므로 구하는 확률은

$$\left\{({}_4\mathrm{C}_2-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{64}\text{이다.}$$

[다른풀이]
상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 되는 경우를 직접 세어보면

1	2	3	4	5	6
앞	뒤	앞	뒤	앞	앞
앞	뒤	뒤	앞	앞	앞
뒤	앞	뒤	앞	앞	앞
뒤	뒤	앞	앞	앞	앞
뒤	앞	앞	뒤	앞	앞

의 5가지이다. 전체 경우의 수는 $2^6=64$이므로 구하는 확률은 $\frac{5}{64}$이다.

16) 51

$a_1\geq3$일 사건을 A라 하면 $P(A)=\frac{3}{5}$이고,
$a_1b_1<a_2b_2$일 사건을 B라 하면 $P(A\cap B)$는 다음과 같이 a_1의 값에 따라 나누어 구할 수 있다.
(ⅰ) $a_1=3$인 경우
$b_1=1$일 때, $3<a_2b_2$를 만족시키는 경우는
$(a_2,\ b_2)=(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (2,\ 2)$
$b_1=2$일 때, $6<a_2b_2$를 만족시키는 경우는
$(a_2,\ b_2)=(5,\ 2),\ (4,\ 2)$이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\right)$$

$$=\frac{11}{200}+\frac{3}{100}=\frac{17}{200}$$

(ⅱ) $a_1=4$인 경우
$b_1=1$일 때, $4<a_2b_2$를 만족시키는 경우는
$(a_2,\ b_2)=(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (3,\ 2)$
$b_1=2$일 때, $8<a_2b_2$를 만족시키는 경우는
$(a_2,\ b_2)=(5,\ 2)$이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}$$

$$=\frac{7}{200}+\frac{3}{100}=\frac{1}{20}$$

(ⅲ) $a_1=5$인 경우
$a_1b_1<a_2b_2$이려면 $b_1=1$이어야 한다.
따라서 $5<a_2b_2$를 만족시키는 경우는
$(a_2,\ b_2)=(4,\ 2),\ (3,\ 2)$이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{100}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$P(A\cap B)=\frac{17}{200}+\frac{1}{20}+\frac{3}{100}=\frac{33}{200}$$

따라서 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{33}{200}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{11}{40}$

따라서 $p=40,\ q=11$이므로 $p+q=51$

17) 8

[출제의도] 두 사건이 서로 독립이 될 조건을 구할 수 있는가?

$A=\{1,3,5\}$이므로 $P(A)=\frac{1}{2}$

(ⅰ) $m=1$일 때, $B=\{1\}$ 이므로

$A\cap B=\{1\}$, $P(B)=\frac{1}{6}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

따라서 $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$이므로
두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(ⅱ) $m=2$일 때, $B=\{1,2\}$ 이므로

$A\cap B=\{1\}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

따라서 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로
두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(ⅲ) $m=3$일 때, $B=\{1,3\}$ 이므로

$A\cap B=\{1,3\}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

따라서 $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$이므로
두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(ⅳ) $m=4$일 때, $B=\{1,2,4\}$ 이므로

$A\cap B=\{1\}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

따라서 $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$이므로
두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(ⅴ) $m=5$일 때, $B=\{1,5\}$ 이므로

$A\cap B=\{1,5\}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

따라서 $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$이므로
두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(ⅵ) $m=6$일 때, $B=\{1,2,3,6\}$ 이므로

$A\cap B=\{1,3\}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

따라서 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로
두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(ⅰ)~(ⅵ)에서 모든 m의 값의 합은
$2+6=8$

18) ②

$\mathrm{P}(X=k)=p_k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$라 하면

$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{5}kp_k=4$ 이다.

$$\mathrm{E}(Y)=\sum_{k=1}^{5}k\left(\frac{1}{2}p_k+\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{5}k$$
$$=\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{10}\times\frac{5\times 6}{2}$$
$$=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

19) 1

1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 구슬 6개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 6의 약수를 꺼낼 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

162회의 시행에서 6의 약수가 적혀 있는 구슬을 꺼내는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(162,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=162\times\frac{2}{3}=108$, $\mathrm{V}(X)=162\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=36$

162는 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(108,\ 6^2)$을 따른다.
6의 약수가 적혀 있는 구슬을 꺼내면 3점을 얻고,
6의 약수가 아닌 수가 적혀 있는 구슬을 꺼내면 2점을 잃으므로
162회의 시행에서 획득하는 점수는
$3X-2(162-X)=5X-324$이다.
162회의 시행 후 획득한 점수가 201점 이상 246점 이하이면
$201\le 5X-324\le 246$에서
$525\le 5X\le 570$이므로
$105\le X\le 114$

$Z=\frac{X-108}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 0점에서 시작하여 162회의 시행 후 획득한 점수가 201점 이상 246점 이하일 확률은

$$\mathrm{P}(105\le X\le 114)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{105-108}{6}\le\frac{X-108}{6}\le\frac{114-108}{6}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1)$$
$$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.1915+0.3413$$
$$=0.5328$$

20) 3

21) 5

2번의 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 순서대로 a,b라 하고, 순서쌍 (a,b)로 나타내면, $\overline{X}=2$ 가 되는 경우는
$(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$이다.

$\therefore P(\overline{X}=2)=\frac{1}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{2}{8}\times\frac{2}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{7}{32}$

22) 174

23) 12

$\overline{x}=75$일 때, 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$75-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le 75+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$\overline{x}=77$일 때, 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$77-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le 77+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

따라서

$$b=75+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$d=77+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

이므로

$$\begin{aligned} d-b&=\left(77+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\right)-\left(75+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\right)\\ &=2+0.155\sigma=3.86 \end{aligned}$$

$\sigma=12$

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.