

수학 영역 (가형)

성명

수험번호

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰십시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

칸막이로는 막을 수 없는 너의 앞날을 위해

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

Epsilon

2020년 11월 21일 시행 Epsilon 모의고사 2회 (가형)

출제위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon

19학번 : 강종우, 박석준, 백수정, 윤황규, 장지원, 정재훈, 정지혁, 황주영

20학번 : 김동연, 김동해, 김유진, 김태희, 송문주, 이도윤, 이선우, 정원철, 최인환

편집위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon 편집위원회

19학번 : 강종우, 백수정

20학번 : 김유진, 김태희

검토위원 :

전재완 (성균관대학교 수학교육과 20)

이상현 (성균관대학교 수학교육과 20)

최연조 (성균관대학교 수학교육과 20)

김동현 (성균관대학교 수학교육과 18)

이현준 (성균관대학교 수학교육과 18)

서희수 (성균관대학교 수학교육과 16)

엡실론(Epsilon) 팀 혹은 엡실론(Epsilon) 모의고사에 관하여 문의 사항이 있으신 경우 gasonha373@naver.com 으로 연락 주시기 바랍니다.

제 2 교시

Epsilon

수학 영역(가형)



성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

1. $(\sqrt[3]{3})^6 \times 2^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① $6\sqrt{2}$ ② $7\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{2}$ ④ $9\sqrt{2}$ ⑤ $10\sqrt{2}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 16n} - 2n)$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

3. $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $\tan \theta$ 의 값은? (단, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$) [2점]

- ① -1 ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ 1

4. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A^C \cup B) = \frac{2}{5}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? (단, A^C 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

5. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx}{\log_2(1+x)} & (x > 0) \\ x+4 & (x \leq 0) \end{cases}$$

일 때, 상수 k 의 값은? [3점]

- ① $\frac{4}{\ln 2}$ ② $\frac{2}{\ln 2}$ ③ 1 ④ $2\ln 2$ ⑤ $4\ln 2$

6. 어느 모집단의 확률변수 X 의 확률분포가 다음 표와 같다.

X	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	a	a	b	1

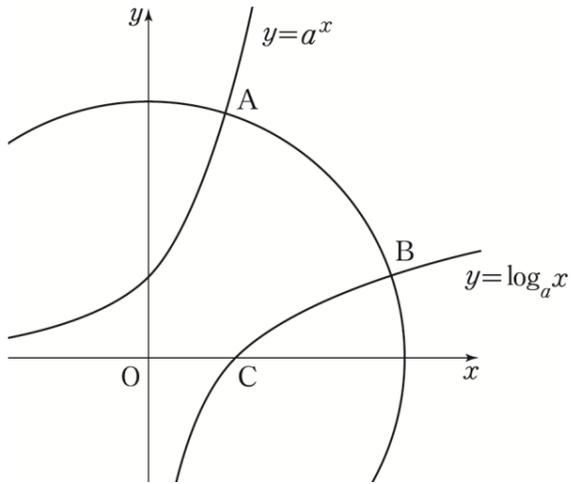
이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본의 표본평균을 \bar{X} 라 할 때, $E(\bar{X}) = -\frac{1}{5}$ 이다. $P(X \geq 0)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{n+2k}{nk}$ 의 값은? [3점]

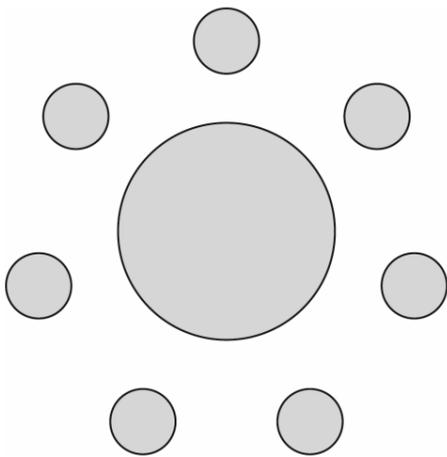
- ① $1+\ln 2$ ② $1+\ln 3$ ③ $2+\ln 2$ ④ $2+\ln 3$ ⑤ $3+\ln 2$

8. 그림과 같이 두 곡선 $y = a^x$, $y = \log_a x$ ($a > 1$)가 원 $x^2 + y^2 = 10$ 와 제1사분면에서 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 원점 O와 C(1, 0)에 대하여 삼각형 OCA의 넓이가 삼각형 OCB의 넓이의 3배일 때, 상수 a 의 값은? [3점]



- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

9. 그림과 같이 원탁에 7개의 자리가 일정한 간격으로 있다. 빈자리가 서로 이웃하지 않도록 5명의 학생이 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



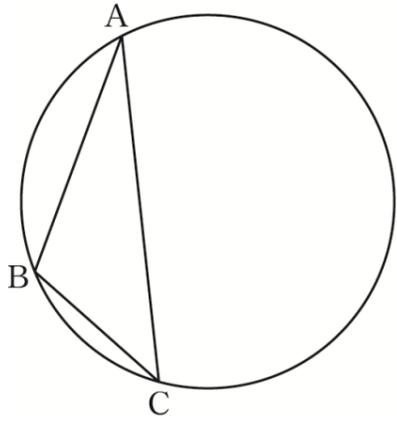
- ① 120
- ② 180
- ③ 240
- ④ 300
- ⑤ 360

10. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 방정식은 $y = 2x - 5$ 이다. 함수 $g(x) = \frac{f(2x)}{x}$ 에 대하여 $g'(1)$ 의 값은?

[3점]

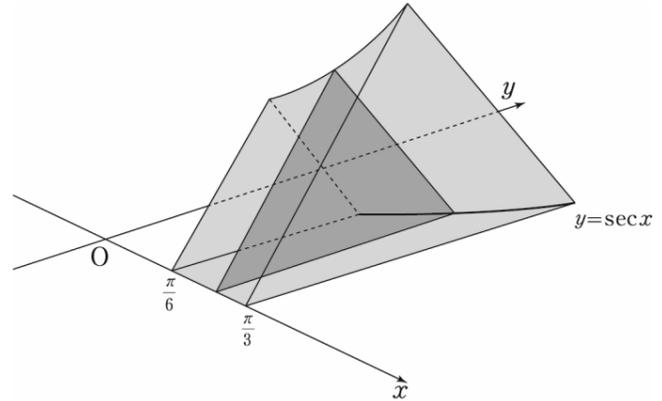
- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

11. 그림과 같이 넓이가 10π 인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$ 일 때, 선분 AC의 길이는?
(단, $\angle ABC > \frac{\pi}{2}$) [3점]



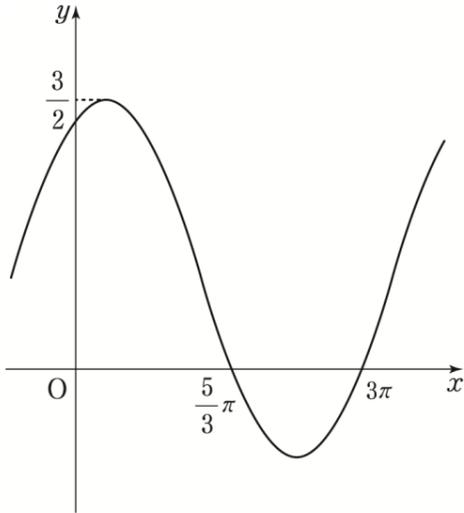
- ① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

12. 그림과 같이 곡선 $y = \sec x \left(\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \right)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

13. 그림은 함수 $y = \cos(ax - b) + c$ 의 그래프이다. 상수 a, b, c 에 대하여 abc 의 값은? (단, $a > 0, 0 < b < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [3점]



- ① $\frac{\pi}{24}$ ② $\frac{\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{6}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}\pi$

14. $a+b+c+3d=16$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 이 순서쌍 (a, b, c, d) 가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

$\frac{a+b+c}{d}$ 의 값은 자연수이다.

- ① $\frac{17}{24}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{19}{24}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

15. $0 \leq x < a$ 에서 정의된 함수 $f(x) = |\sin x| + \cos x$ 가 있다.

$\int_0^t f(x) dx = 6$ 을 만족시키는 모든 t 의 값의 합이 $\frac{11}{2}\pi$ 가 되도록 하는 상수 a 의 최댓값은? [4점]

- ① $\frac{5}{2}\pi$ ② 3π ③ $\frac{7}{2}\pi$ ④ 4π ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

16. 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 7$ 이고,

X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 와 닫힌구간 $[0, 6]$ 에서 정의된 함수 $g(x) = P(x \leq X \leq x+1)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 $f(x) = mx$ (m 은 상수)
 (나) 함수 $g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이다.

$g(3) = \frac{1}{7}$ 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

17. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \left(a_k + \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \dots\dots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때 (좌변) = $\frac{5}{6}$, (우변) = $\frac{5}{6}$ 이므로

(*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, (*)가 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m \left(a_k + \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{m+1} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k+2}$$

이다. $n=m+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m+1} \left(a_k + \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{m+1} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k+2} + a_{m+1} + \frac{1}{m+2} \\ &= 1 - \frac{1}{m+1} \times \left(1 - \boxed{\text{(가)}} \right) \\ & \quad + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k+2} + \frac{1}{m+2} \\ &= 1 - \frac{1}{m+1} + \frac{2}{\boxed{\text{(나)}} \times (m+2)} \\ & \quad - \frac{2}{\boxed{\text{(나)}} \times (m+3)} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k+2} + \frac{1}{m+2} \\ &= 1 - \frac{1}{m+2} + \boxed{\text{(다)}} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k+2} \\ &= 1 - \frac{1}{m+2} + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)가 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \left(a_k + \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$

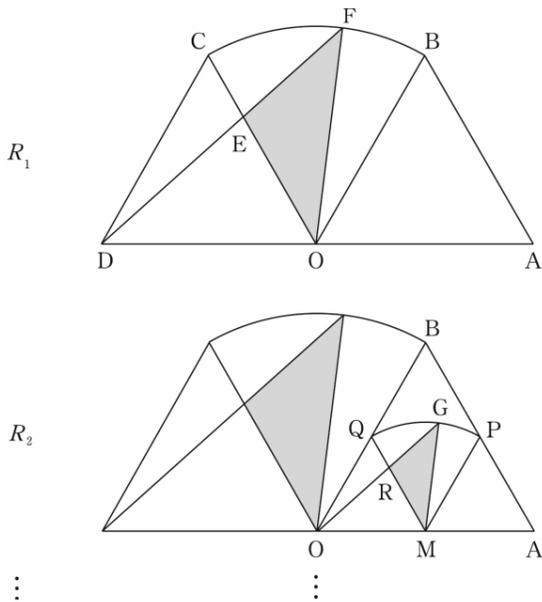
이라 할 때, $f(6) \times g(8) \times h(3)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{48}$ ② $\frac{1}{24}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{5}{48}$

18. 주머니에 1, 2, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 숫자를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 4번 반복할 때, 주머니에서 꺼낸 순서대로 공에 적혀 있는 수를 a, b, c, d 라 하자. $|a-b| \leq |c-d|$ 일 때, $|a-c|=3$ 일 확률은? [4점]

- ① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{2}{21}$ ③ $\frac{5}{42}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 두 정삼각형 OAB, OCD와 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴 OBC로 이루어진 도형이 있다. 선분 OC를 2:1로 내분하는 점을 E, 직선 DE가 호 BC와 만나는 점을 F라 하자. 삼각형 OEF의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 선분 OA의 중점을 M이라 하자. 두 선분 AB, OB 위의 점 P, Q를 두 삼각형 MAP, MQO가 정삼각형이 되도록 잡고 부채꼴 MPQ를 그린다. 선분 MQ를 2:1로 내분하는 점을 R라 할 때, 직선 MR이 호 PQ와 만나는 점을 G라 하자. 삼각형 MRG의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 방법을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{9\sqrt{3}}{7}$
- ② $\frac{19\sqrt{3}}{14}$
- ③ $\frac{10\sqrt{3}}{7}$
- ④ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{7}$

20. 함수 $f(x) = e^{(x-\pi)^2}$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \int_0^x \sin(x-t)f(t)dt$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(2\pi) = 0$

ㄴ. $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0$

ㄷ. 방정식 $g''(x) = 0$ 의 실근이 열린구간 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 에 존재한다.

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + a_{n+2} & (a_n \leq a_{n+2}) \\ a_{n+2}(a_n + 2) & (a_n > a_{n+2}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3 = -1$, $\sum_{k=1}^5 a_k = -5$ 일 때, $a_6 + a_7$ 의 값은? [4점]

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

단답형

22. $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^4$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x) = (4x^2 + 5)e^{3x}$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값을 구하시오.

[3점]

24. 부등식 $\log_3(x^2+x) > 1 + \log_{\sqrt{3}}(x-1)$ 의 해가 $a < x < b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 확률변수 X 는 평균이 $m(m > 0)$,

표준편차가 1인 정규분포를 따른다.

$$P(m \leq X \leq 2m) + P(X \leq m-2) = 0.5$$

일 때, $P(X \leq a) = 0.0401$ 을

만족시키는 상수 a 에 대하여

$100(m+a)$ 의 값을 오른쪽

표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599
2.00	0.4772

26. 첫째항과 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 자연수 m 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \sum_{n=1}^m a_{2n} = 72$$

$$(나) \sum_{n=1}^{m+1} a_{2n-1} = 84$$

a_{2m} 의 값을 구하시오. [4점]

27. $x \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \ln(x^2 + 1) + k$ 의 역함수를

$g(x)$ 라 하자. $\int_{k+\ln 2}^{k+\ln 10} \frac{e^x}{g(x)} dx = 4e^3$ 일 때, 상수 k 의 값을
구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 중심이 O 이고 길이가 2인 선분 AB 를

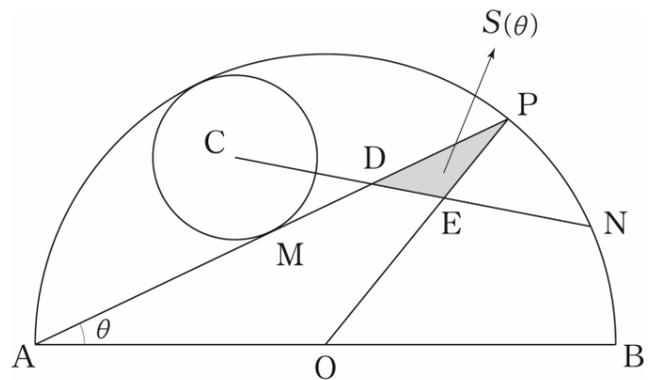
지름으로 하는 반원 위에 점 P 를 $\angle BAP = \theta$ 가 되도록 잡는다.

선분 AP 의 중점을 M , 호 PB 의 중점을 N 이라 하자. 선분

AP 와 점 M 에서 접하고 호 AP 와 접하는 원의 중심을 C 라 할
때, 선분 CN 이 선분 AP , OP 와 만나는 점을 각각 D , E 라

하자. 삼각형 PED 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값을

구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



29. 어느 축제에 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E가 참가하여 공연한다. 한 번에 최대 두 명까지 같이 공연할 수 있을 때, 다음 조건을 만족시키도록 다섯 명의 공연 순서를 정하는 경우의 수를 구하시오. (단, 모든 학생은 한 번씩만 공연한다.)

[4점]

- (가) A는 B보다 먼저 공연한다.
 (나) C와 D는 같이 공연하지 않는다.

30. 실수 t 에 대하여 x 축과 오직 한 점 $(t, 0)$ 에서만 만나고 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 넓이가 최대인 정사각형의 두 대각선의 교점을 $(f(t), g(t))$ 라 하자.

- (가) 정사각형의 한 변을 연장한 직선 중 곡선 $y=e^x$ 와 접하는 직선이 존재한다.
 (나) 정사각형과 곡선 $y=e^x$ 이 한 점에서만 만난다.

방정식 $f'(t)+g'(t)=\frac{4}{3}$ 의 모든 실근의 합은 $p-\ln q$ 이다. $4p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.