제 2 교시

2021학년도 KUME(쿠메) 모의고사 2회

# 수학 영역
# (가형)

| 성명 | |
|---|---|

| 수험번호 | | | | | | - | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

○ 자신이 선택한 유형(가 형/나 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

| 새로운 세상의 살을 에는 바람 속에서 |
|---|

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

# 2021학년도 KUME(쿠메) 모의고사 2회

시행 : 2020년 11월 22일 (일) 오후 7시 55분 ~ 오후 9시 40분

집필 : 고려대학교 수학교육과 소모임 KUME(쿠메) 20

김민석 김정훈 김차민 김현민 박민용 방민서 배동현 백진희 서현덕 양우석 우헌석 정상원 조동현 조영빈 최제현 황재민

손해설 : 손주영

검토 : 양우석



KUME(쿠메) 모의고사에 관한 문의사항은 'KUME 모의고사' 페이스북 페이지 또는 bang8999@naver.com으로 문의바랍니다.

제 2 교시

# 수학 영역(가 형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{4}\times 16^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$\sqrt[3]{4}\times 16^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}\times 4^{\frac{2}{3}} = 4$

$\therefore$ 4, ①

2. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3\times 2^{2n+2}+1}{4^n+3^n}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3\times 2^{2n+2}+1}{4^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{12\times 4^n+2}{4^n+3^n}$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{12+2\times(\frac{1}{4})^n}{1+(\frac{3}{4})^n}$

$= 12$

$\therefore$ 12, ③

3. 두 사건 $A$, $B$에 대하여 $A$와 $B^C$은 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C\cap B)$의 값은? (단, $B^C$은 $B$의 여사건이다.) [2점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

A와 $B^c$은 배반사건이므로

$P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B) = 0$ 이다.

$\therefore P(A) = P(A\cap B) = \frac{1}{3}$

$P(A^c\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\therefore P(A^c\cap B) = \frac{1}{6}$, ②

4. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n+1)=7$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+a_n-a_n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+a_n) - \sum_{n=1}^{\infty}a_n$

$= 7-3$

$= 4$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2 = 4$, ④

5. 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$를 따르는 확률변수 $X$에 대하여 $\mathrm{E}(6X+4)=140$일 때, $n$의 값은? [3점]

① 34 ② 36 ③ 38 ④ 40 ⑤ 42

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, \frac{2}{3})$를 따르므로

$E(X) = \frac{2}{3}n$ 이다.

$E(6X+4) = 6E(X)+4 = 6 \cdot \frac{2}{3}n + 4 = 140$

$\therefore n = 34$, ①

6. $\int_2^3 xe^{x-3}\,dx$의 값은? [3점]

① $1-\frac{1}{e}$ ② $2-\frac{1}{e}$ ③ $3-\frac{1}{e}$ ④ $1-\frac{2}{e}$ ⑤ $2-\frac{2}{e}$

$$\int_2^3 xe^{x-3}\,dx = \left[xe^{x-3}\right]_2^3 - \int_2^3 e^{x-3}\,dx$$
$$= 3 - \frac{2}{e} - \left[e^{x-3}\right]_2^3$$
$$= 3 - \frac{2}{e} - \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$
$$= 2 - \frac{1}{e}$$

$\therefore \int_2^3 xe^{x-3}\,dx = 2 - \frac{1}{e}$, ②

7. $0<a<b$인 두 실수 $a$, $b$에 대하여

$$1+\log_2(b-a)=\log_4(b^2-a^2)$$

일 때, $\frac{b}{a}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

(주어진 식) $\Leftrightarrow \log_2(2b-2a) = \log_4(b^2-a^2)$

$\Leftrightarrow \log_2(2b-2a)^2 = \log_2(b^2-a^2)$

따라서 $4b^2-8ab+4a^2 = b^2-a^2$ 이 성립한다.

$5a^2-8ab+3b^2=0$

$(a-b)(5a-3b)=0$

$\therefore a = \frac{3}{5}b$ $(\because a \neq b)$

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{5}{3}$, ①

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. 함수 $g(x)$가 함수 $f(2x+1)$의 역함수이고 $f(-1)=2$, $f'(-1)=3$일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

함수 $g(x)$가 함수 $f(2x+1)$의 역함수이므로

$g(f(2x+1))=x$

양변을 미분하면

$g'(f(2x+1))\times 2f'(2x+1)=1$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$g'(f(-1))\times 2f'(-1)=1$

$g'(-2)=\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{6}$

$\therefore g'(2)=\frac{1}{6}$, ⑤

9. 공차가 음수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2+a_8=12,\ a_4a_6=a_7a_9$$

일 때, $a_3$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

등차수열의 공차를 $d$라 하자.

등차중항에 의해

$\frac{a_2+a_8}{2}=a_5=6$ 이다.

$a_4a_6=a_7a_9$ 이므로

$(a_5-d)(a_5+d)=(a_5+2d)(a_5+4d)$

$a_5^2-d^2=a_5^2+6a_5\cdot d+8d^2$

$36-d^2=36+36d+8d^2$

$9d^2+36d=0$

$9d(d+4)=0$

$\therefore d=-4$ ($\because d<0$)

$\therefore a_3=a_5-2d=14$

$\therefore a_3=14$, ④

10. 매개변수 $t$로 나타내어진 곡선

$$x=e^t(2t-1),\ y=e^t(3t^2-4t+11)$$

이 있다. 곡선 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 4일 때, $ab$의 값은? [3점]

① $10e^2$ ② $15e^2$ ③ $20e^2$ ④ $25e^2$ ⑤ $30e^2$

$\frac{dx}{dt}=e^t(2t-1)+e^t\cdot 2=e^t(2t+1)$

$\frac{dy}{dt}=e^t(3t^2-4t+11)+e^t(6t-4)=e^t(3t^2+2t+7)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{e^t(3t^2+2t+7)}{e^t(2t+1)}=\frac{3t^2+2t+7}{2t+1}$

접선의 기울기가 4일 때의 $t$의 값을 $t_1$이라고 하자.

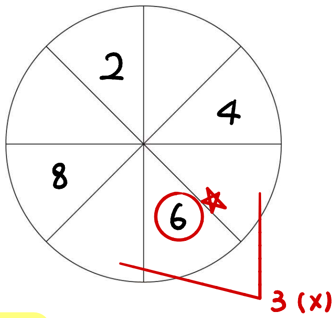
$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_1}=\frac{3t_1^2+2t_1+7}{2t_1+1}=4$

따라서 $3t_1^2-6t_1+3=0$, $\therefore t_1=1$ (중근)

$\therefore a=e\times 1=e$, $b=e\times 10=10e$

$\therefore ab=10e^2$, ①

11. 그림과 같이 원을 8등분한 도형이 있다. 8개의 영역에 1부터 8까지의 자연수를 각각 하나씩 적을 때, 이웃한 면에 적힌 두 수가 모두 서로소인 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]




① 48 ② 72 ③ 96 ④ 120 ⑤ 144

1) 2, 4, 6, 8은 서로소가 아니므로
네 수는 각각 이웃하지 않은 면에 적혀야 한다.
⇒ (4-1)! = 3!

2) 3과 6을 이웃하지 않은 면에 적어야 한다.
⇒ $_2C_1 = 2$

3) 남은 3개의 숫자를 나머지 면에 적는 경우의 수
⇒ 3!

∴ 3! × 2 × 3! = 72, ②

12. 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1} = 1 + (n+2) \times (-1)^{|a_n|}$$

을 만족시킨다. $|a_k| \le |a_{10}|$을 만족시키는 모든 자연수 $k$의 개수는? [3점]

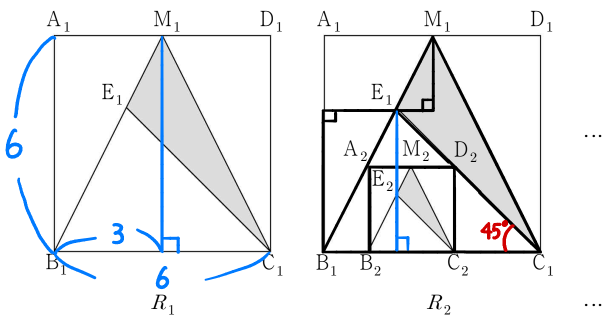
① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

$a_1 = 1$
$a_2 = 1 + 3 \times (-2)^{|1|} = -2$
$a_3 = 1 + 4 \times (-2)^{|-2|} = 5$
$a_4 = 1 + 5 \times (-2)^{|5|} = -4$
$a_5 = 1 + 6 \times (-2)^{|-4|} = 7$
$a_6 = 1 + 7 \times (-2)^{|7|} = -6$
$a_7 = 1 + 8 \times (-2)^{|-6|} = 9$
$a_8 = 1 + 9 \times (-2)^{|9|} = -8$
$a_9 = 1 + 10 \times (-2)^{|-8|} = 11$
$a_{10} = 1 + 11 \times (-2)^{|11|} = -10$ ⟶ $|a_{10}| = 10$
$a_{11} = 1 + 12 \times (-2)^{|-10|} = 13$
$a_{12} = 1 + 13 \times (-2)^{|13|} = -12$
⋮

$k > 10$일 경우 $|a_k| > |a_{10}|$이다.

∴ 9개, ③

13. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 $A_1D_1$의 중점을 $M_1$, 선분 $B_1M_1$을 2 : 1로 내분하는 점을 $E_1$이라 할 때, 삼각형 $E_1M_1C_1$에 색칠하여 얻은 그림을 $R_1$이라 하자.
그림 $R_1$에서 선분 $B_1E_1$ 위의 점 $A_2$와 선분 $E_1C_1$ 위의 점 $D_2$, 선분 $B_1C_1$ 위의 두 점 $B_2$, $C_2$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 $R_1$을 얻은 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에 ◺ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 $R_2$라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 그림 $R_n$에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



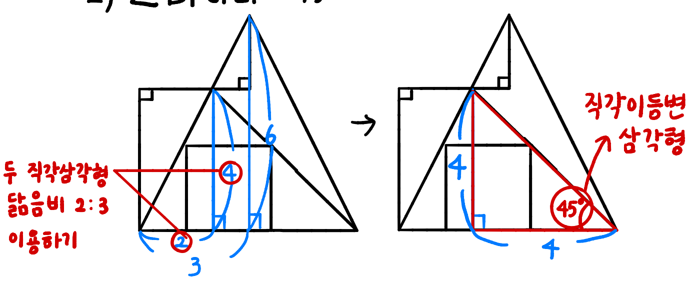
$R_1$ $R_2$ ...

① $\frac{48}{7}$ ② 7 ③ $\frac{50}{7}$ ④ $\frac{51}{7}$ ⑤ $\frac{52}{7}$

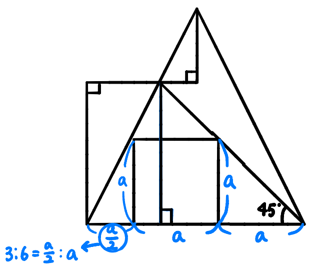
1) 점 $E_1$의 정의에 의해

$$S_1 = \frac{1}{3} \times \triangle B_1C_1M_1 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 6\right) = 6$$

2) $\angle B_1C_1E_1 = 45°$




3) 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 $a$라 하자.




$\frac{a}{2} + a + a = 6$

$\therefore a = \frac{12}{5}$

4) 닮음비는 $6 : a = 1 : \frac{2}{5}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{4}{25}$

$\therefore r = \frac{4}{25}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{6}{1-\frac{4}{25}} = \frac{50}{7}$, ③

14. 확률변수 $X$는 정규분포 $N(m,\ \sigma_1{}^2)$, 확률변수 $Y$는 정규분포 $N(m+4,\ \sigma_2{}^2)$을 따르고, 확률변수 $X$와 $Y$의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.

$$P(X \le m+1) + P(Y \ge m+3) = 1.3830$$

이고, 모든 실수 $x$에 대하여

$$f(16-x) = g(x)$$

일 때, $P(X \le 9)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

| $z$ | $P(0 \le Z \le z)$ |
|---|---|
| 0.5 | 0.1915 |
| 1.0 | 0.3413 |
| 1.5 | 0.4332 |
| 2.0 | 0.4772 |

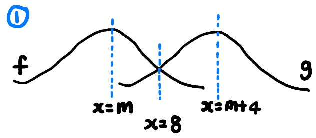
① 0.6915 ② 0.8413 ③ 0.9104 ④ 0.9332 ⑤ 0.9772

모든 실수 $x$에 대하여 $f(16-x) = g(x)$ 이므로

→ $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 $x=8$에 대하여 선대칭이다. …①

→ 확률변수 $X$와 $Y$의 표준편차가 동일하다. …②

①



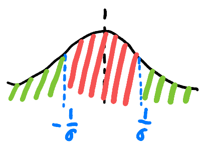

② $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ 라고 하자.

$\therefore \frac{m+(m+4)}{2} = 8$ $\therefore m = 6$

$\therefore X \sim N(6, \sigma^2)$, $Y \sim N(10, \sigma^2)$

$Z \sim N(0, 1^2)$ 이라하자.

$P(X \le m+1) + P(Y \ge m+3) = P(Z \le \frac{1}{\sigma}) + P(Z \ge -\frac{1}{\sigma}) = 1.3830$




$\begin{cases} /// \times 2 + /// \times 2 = 1.3830 \\ /// \times 1 + /// \times 2 = 1 \end{cases}$

$\therefore \boxed{/// \times 1 = 0.3830}$

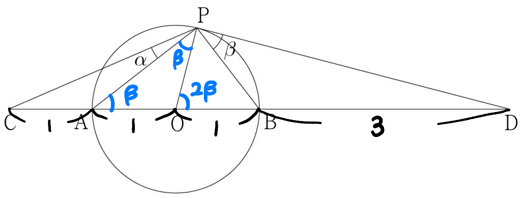
⇒ $P(-\frac{1}{\sigma} \le Z \le \frac{1}{\sigma}) = 0.3830$

$P(0 \le Z \le \frac{1}{\sigma}) = 0.1915$ $\therefore \sigma = 2$

$\therefore P(X \le 9) = P(Z \le \frac{9-m}{\sigma}) = P(Z \le 1.5) = 0.9332$

$\therefore P(X \le 9) = 0.9332$, ④

**15.** 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 선분 AB를 1 : 3으로 외분하는 점을 C라 하고, 선분 AB를 5 : 3으로 외분하는 점을 D라 하자. 점 D에서 이 원에 접선을 그었을 때 접점을 P라 하자. $\angle APC = \alpha$, $\angle DPB = \beta$라 할 때, 다음은 $\cos(\beta-\alpha)$의 값을 구하는 과정이다.




$\angle BPA = \angle DPO = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\angle OPA = \beta$이고, $\angle POB = 2\beta$이다.

삼각형 POD가 직각삼각형이므로

$\cos 2\beta = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OD}} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$ 이다.

삼각형 PCO와 삼각형 PAO에서 각각 코사인 법칙에 의하여

$\overline{PC}^2 = 2^2+1^2-2\times1\times1\times(-\cos 2\beta) = 6$ $(\overline{PC}=\sqrt{6})$

$\overline{PC}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{CO}\times\overline{OP}\times\cos(\pi-2\beta) = \boxed{6}$

$\overline{PA}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{AO}\times\overline{OP}\times\cos(\pi-2\beta) = \dfrac{5}{2}$

이다.

$\angle PAO = \beta$, $\angle PCA = \beta - \alpha$이므로 삼각형 PCA에서 코사인 법칙에 의하여

$\overline{AP}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{PC}\times\overline{CA}\times\cos(\beta-\alpha)$

이다. $\dfrac{5}{2} = 6+1-2\times\sqrt{6}\times1\times\cos(\beta-\alpha)$ $\therefore \cos(\beta-\alpha) = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

따라서 $\cos(\beta-\alpha) = \boxed{\dfrac{3\sqrt{6}}{8}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $p$, $q$, $r$라 할 때, $\dfrac{r^2}{pq}$ 의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{16}$ ② $\dfrac{3}{16}$ ③ $\dfrac{5}{16}$ ④ $\dfrac{7}{16}$ ⑤ $\dfrac{9}{16}$

$p = \dfrac{1}{4}$, $q = 6$, $r = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

$\therefore \dfrac{r^2}{pq} = \dfrac{9}{16}$, ⑤

**16.** 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$가

$$xf(x^2) = 2f(x) \quad \cdots (*)$$

을 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt \ (x>0), \quad F(e) = \frac{e}{2}$$

일 때, $F(e^4)$의 값은? [4점]

① $2e$ ② $4e$ ③ $8e$ ④ $16e$ ⑤ $32e$

1) $F(e) = \int_1^e f(t)\,dt = \dfrac{e}{2}$

이때, 모든 양의 실수 $x$에 대해 $xf(x^2) = 2f(x)$ 이므로

$\int_1^e 2f(x)\,dx = \boxed{\int_1^e xf(x^2)\,dx} = e$

2) $\int_1^e xf(x^2)\,dx = \dfrac{1}{2}\int_1^{e^2} f(t)\,dt = e$

$x^2 = t$
치환적분

$\therefore \int_1^{e^2} f(x)\,dx = 2e$

3) 같은 방법으로, $\int_1^{e^2} 2f(x)\,dx = \boxed{\int_1^{e^2} xf(x^2)\,dx} = 4e$

$\int_1^{e^2} xf(x^2)\,dx = \dfrac{1}{2}\int_1^{e^4} f(x)\,dx = 4e$

$\therefore \int_1^{e^4} f(x)\,dx = F(e^4) = 8e$

$\therefore F(e^4) = 8e$, ③

cf) $(*)$의 양변을 1부터 $S$까지 적분하면

$\int_1^S xf(x^2)\,dx = \int_1^S 2f(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_1^{S^2} f(x)\,dx = 4\int_1^S f(x)\,dx$, 즉 $F(S^2) = 4F(S)$가 되어

$\dfrac{F(S^2)}{F(S)} = 4$가 성립한다.

$\therefore \dfrac{F(e^2)}{F(e)} = \dfrac{F(e^4)}{F(e^2)} = 4$, $F(e^4) = 16F(e) = 8e$.

**17.** 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 $X$에서 $X$로의 모든 함수 $f$ 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

(가) $f(1)\times f(2)=f(3)\times f(4)$
(나) 어떤 자연수 $a$에 대하여 $f(a)>f(a+1)$이다. (단, $a\le 3$)

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{5}{64}$ ③ $\frac{3}{32}$ ④ $\frac{7}{64}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

(가), (나)를 만족하는 사건을 각각 A, B라 하자.

1) P(A)

두 함숫값의 곱으로 가능한 수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16

(1) 1, 9, 16 의 경우

→ 가능한 곱의 방법 : 1가지
ex. $1=1\times1$
→ 가능한 순열의 경우 : 1가지
ex. $f(1)\times f(2)=1 \Rightarrow f(1)=f(2)=1$
$\therefore 1\times1\times3=3$
$f(1)\times f(2)$ $f(3)\times f(4)$

(2) 2, 3, 6, 8, 12 의 경우

→ 가능한 곱의 방법 : 1가지
ex. $2=1\times2$
→ 가능한 순열의 경우 : 2가지
ex. $f(1)\times f(2)=2 \Rightarrow f(1)=1,\ f(2)=2$
$f(1)=2,\ f(2)=1$
$\therefore 2!\times2!\times5=20$

(3) 4 의 경우

→ 가능한 곱의 방법 : 2가지
→ $4=2\times2=4\times1$
→ 가능한 순열의 경우
→ $2\times2$ & $2\times2$ : $1\times1=1$
→ $4\times1$ & $2\times2$ : $2!\times1\times2=4$
→ $4\times1$ & $4\times1$ : $2!\times2!=4$
$\therefore 1+4+4=9$

$\therefore n(A)=20+3+9=32$, $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{32}{4^4}=\frac{1}{8}$

2) $P(A\cap B^c)$

$B^c$는 $a\le3$인 모든 자연수 $a$에 대하여 $f(a)\le f(a+1)$을 만족하는 사건이다.

A, $B^c$을 모두 만족하는 경우는 $(f(1), f(2), f(3), f(4))$라 할 때 (1,1,1,1), (2,2,2,2), (3,3,3,3), (4,4,4,4)

이므로 $P(A\cap B^c)=\frac{n(A\cap B^c)}{n(S)}=\frac{4}{4^4}=\frac{1}{64}$

3) $P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^c)=\frac{7}{64}$, ④

**18.** 함수 $f(x)=e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}-1$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $\int_{-8}^{8} f(x)\,dx=4\int_{0}^{4} f(x)\,dx$
ㄷ. $\int_{0}^{6} x|f'(x)|\,dx=12e-\frac{6}{e}-6$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ 에서

$f'(1)=0$ &

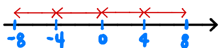
| $x$ | … | $-1$ | … | $1$ | … | $3$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | … | 0 | + | 0 | − | 0 | … |
| | | | ↗ | | ↘ | | |

$\therefore f(x)$는 $x=1$에서 극대.

ㄴ. $f(x+4)=e^{\sin\left\{\frac{\pi}{2}(x+4)\right\}}-1=e^{\sin\frac{\pi}{2}x}-1=f(x)$

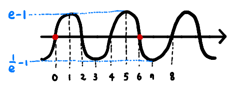
$\therefore f(x)$는 주기가 4인 함수이다.

$\therefore \int_{-8}^{8} f(x)\,dx=4\int_{0}^{4} f(x)\,dx$

(∵ 

)
각 구간의 적분값 모두 $\int_0^4 f(x)\,dx$로 동일

ㄷ. 함수 f(x)의 그래프를 개략적으로 그려보면




⇒ 함수 f(x)는 $x=1$, $x=3$, $x=5$에 대해 선대칭.

$$\int_0^6 x|f'(x)|\,dx=\left\{\int_0^1 xf'(x)\,dx+\int_3^5 xf'(x)\,dx\right\}-\left\{\int_1^3 xf'(x)\,dx+\int_5^6 xf'(x)\,dx\right\}$$
$$=\left\{[xf(x)]_0^1-\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx}+[xf(x)]_3^5-\boxed{\int_3^5 f(x)\,dx}\right\}$$
$$-\left\{[xf(x)]_1^3-\boxed{\int_1^3 f(x)\,dx}+[xf(x)]_5^6-\boxed{\int_5^6 f(x)\,dx}\right\}$$
각각 소거 가능
$$=f(1)+\{5f(5)-3f(3)\}-\{3f(3)-f(1)\}-\{6f(6)-5f(5)\}$$
$$=12f(1)-6f(3)$$ (∵주기함수)
$$=12e-\frac{6}{e}-6$$

19. 숫자 1이 적힌 카드 3장, 숫자 2가 적힌 카드 2장, 3이 적힌 카드 2장이 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 3번 반복할 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 수를 차례로 $a$, $b$, $c$라 하자. $a=b$ 또는 $b=c$일 때, $(a-3)(b-3)(c-3)=0$일 확률은? [4점]

① $\frac{26}{47}$ ② $\frac{27}{47}$ ③ $\frac{28}{47}$ ④ $\frac{29}{47}$ ⑤ $\frac{30}{47}$

$a=b$ or $b=c$ 인 사건을 A,

$(a-3)(b-3)(c-3)=0$ 인 사건을 B 라 하자.

1) $P(A)$

$A^c$는 $a\neq b$이고 $b\neq c$인 사건이다.

(1) $a=c$ 인 경우

$\rightarrow (1,2,1), (1,3,1), (2,1,2), (2,3,2), (3,1,3), (3,2,3)$

$\rightarrow {}_3P_2\times{}_2C_1\times 2+2!\times{}_3C_1+2!\times{}_2C_1+2!\times{}_3C_1+2!\times{}_2C_1=44$

(2) $a\neq c$ 인 경우 ($a, b, c$는 서로 다른 수 → $(1,2,3)$의 배열)

$\rightarrow 3!\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1=72$

$\therefore P(A^c)=\frac{n(A^c)}{n(S)}=\frac{44+72}{{}_7P_3}=\frac{116}{{}_7P_3}$

$\therefore P(A)=1-P(A^c)=\frac{94}{{}_7P_3}$

2) $P(A\cap B)$

$P(A\cap B)=P(B)-P(B\cap A^c)$

(1) $P(B)$

$B^c$는 $a\neq 3$, $b\neq 3$, $c\neq 3$ 인 사건이다.

→ 세 수 $a,b,c$가 $1,1,1$ / $1,1,2$ / $1,2,2$로 구성된 경우

→ $3!+{}_3C_2\times{}_2C_1\times 3!+{}_3C_1\times{}_2C_2\times 3!=60$

$\therefore n(B)=n(S)-n(B^c)={}_7P_3-60=150$

(2) $P(B\cap A^c)$

$B\cap A^c$는 $a\neq b, b\neq c$ 이고 $a,b,c$ 중 적어도 하나가 3인 사건이다.

$\rightarrow (1,3,1), (2,3,2), (3,1,3), (3,2,3)$

또는 $(1,2,3)$의 배열

$\rightarrow {}_3P_2\times{}_2C_1+2!\times{}_2C_1+2!\times{}_3C_1+2!\times{}_2C_1+\underbrace{72}_{1)\text{의 (2) 참고}}=98$

$\therefore n(B\cap A^c)=98$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{150-98}{{}_7P_3}=\frac{52}{{}_7P_3}$

3) $P(B|A)$

$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{52}{{}_7P_3}}{\frac{94}{{}_7P_3}}=\frac{26}{47}$

$\therefore P(B|A)=\frac{26}{47}$, ①

20. 좌표평면의 제1사분면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형의 개수가 16일 때, 양수 $k$의 최솟값은? [4점]

(가) 꼭짓점의 $x$좌표는 모두 100 이하이다.

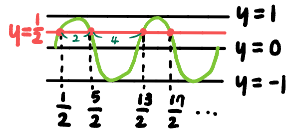
(나) 두 꼭짓점은 곡선 $y=7-5\cos(kx)$와 직선 $y=\frac{9}{2}$의 교점이다.

(다) 두 꼭짓점은 곡선 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점이다.

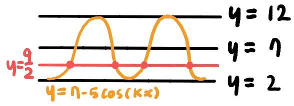
① $\frac{5\pi}{6}$ ② $\frac{2\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

1) (나), (다) 분석

(1) (다)



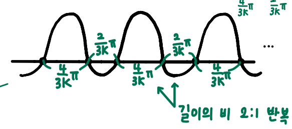

(2) (나)



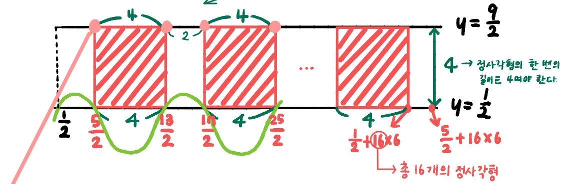

이때, $7-5\cos(kx)=\frac{9}{2} \Leftrightarrow \cos(kx)=\frac{1}{2}$에서

$kx=\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{11}{3}\pi, \cdots \Rightarrow x=\frac{\pi}{3k}, \frac{5}{3k}\pi, \frac{7}{3k}\pi, \frac{11}{3k}\pi, \cdots$

$\frac{4}{3k}\pi$ $\frac{2}{3k}\pi$ $\frac{4}{3k}\pi$ …




2) 정사각형

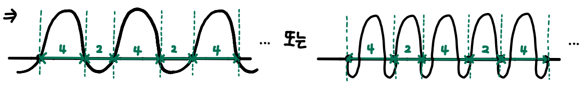



곡선 $y=7-5\cos(kx)$가 표시된 점들을 반드시 지나야 한다.

(1) $k$가 최소가 되기 위해서는 $y=7-5\cos(kx)$의 주기가 최대가 되도록 한다. … (*)

(2) $y=7-5\cos(kx)$와 $y=\frac{9}{2}$의 교점들 중 일부를 택하여 그 간격의 비가 2:1:2:1 … 이 되도록 한다.

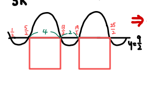
⇒




위와 같은 경우 등이 가능하다.

3) 조건에 부합하는 경우 찾기

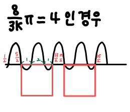
(1) $\frac{4}{3k}\pi=4$ 인 경우



⇒ 불가능

($\because y=7-5\cos(kx)=7-5\cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right)$가 두 점 $\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right), \left(\frac{13}{2},\frac{9}{2}\right)$를 동시에 지날 수 없음)

(2) $\frac{8}{3k}\pi=4$ 인 경우



⇒ 가능

($\because y=7-5\cos(kx)=7-5\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$가 두 점 $\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right), \left(\frac{13}{2},\frac{9}{2}\right)$를 동시에 지날 수 있음)

$\therefore$ (*) 조건에 의해 $k$의 최솟값은 $\frac{2}{3}\pi$이다.

$\therefore$ $k$의 최솟값 : $\frac{2}{3}\pi$, ②

*참고

「식으로 풀 경우」

$$\begin{cases} 7-5\cos(kx)=\frac{9}{2} \Leftrightarrow \cos(kx)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow kx=2n\pi\pm\frac{\pi}{3} \ (\text{단, } n=0,1,2,\cdots) & \cdots ① \\ \sin\frac{\pi}{3}x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}x=\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\frac{\pi}{3} \ (\text{단, } m=0,1,2,\cdots) & \cdots ② \end{cases}$$

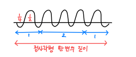
식①의 근이 식②의 근에 포함되는 경우를 고려한다.

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{k}\left(2n\pm\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{k}\cdot\frac{1}{3}, \frac{\pi}{k}\cdot\frac{5}{3}, \frac{\pi}{k}\cdot\frac{7}{3}, \frac{\pi}{k}\cdot\frac{11}{3}, \frac{\pi}{k}\cdot\frac{13}{3}, \cdots \\ x=3\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pm 1=\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{13}{2}, \frac{17}{2}, \frac{25}{2}, \cdots \end{cases}$$

$k=\frac{2}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \cdots$ 등이 가능하다.

따라서 양수 $k$의 최솟값은 $\frac{2}{3}\pi$ 이다.

cf) $k=\frac{8}{3}\pi$인 경우 아래의 형태가 됨.



21. 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_{20}-a_1$의 최댓값은? [4점]

(가) 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_{n+1}>a_n$이다.

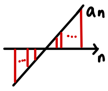
(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}(|a_n|-a_n)=152$

(다) $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}(|a_n|+a_n)=72$

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

(나), (다)에 의해 수열 $\{a_n\}$은 음수인 항과 양수인 항을 모두 가진다.

(가)를 참고하면



과 같이 나타낼 수 있다.

$a_k=0$ 인 k가 있다고 가정하자.

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}(|a_n|-a_n)=-2\sum_{n=1}^{k}a_n=152$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{k}a_n=-76$ ( 0 이하인 항들의 합이 $-76$ 이다.)

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}(|a_n|+a_n)=2\sum_{n=k}^{20}a_n=72$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=k}^{20}a_n=36$ ( 0 이상인 항들의 합이 36 이다)

$\Rightarrow$ $a_{20}-a_1$ 최대가 되려면

$a_{20}$은 최대, $a_1$은 최소 ($a_1$의 절댓값이 최대)

1) $a_{20}$ 최대

$\displaystyle\sum_{n=k}^{20}a_n=36$으로 정해져 있으므로 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{19}$는 최대한 작은 값을 부여

↳ $a_k=0,\ a_{k+1}=1,\ a_{k+2}=2,\ \cdots\ a_{19}=19-k$ 부여하면

$\displaystyle a_{20}=\sum_{n=k}^{20}a_n-\sum_{n=k}^{19}a_n=36-\frac{(19-k)(20-k)}{2}$ 이다.

2) $a_1$ 최소

$\displaystyle\sum_{n=1}^{k}a_n=-76$으로 정해져 있으므로 $a_2, a_3, \cdots, a_k$는 최대한 큰 값을 부여

↳ $a_k=0, a_{k-1}=-1, a_{k-2}=-2, \cdots\ a_2=2-k$ 부여하면

$\displaystyle a_1=\sum_{n=1}^{k}a_n-\sum_{n=2}^{k}a_n=-76-\{(-1)+(-2)+\cdots+(2-k)\}=-76+\frac{(k-2)(k-1)}{2}$ 이다.

3) $a_{20}-a_1$

$\displaystyle a_{20}-a_1=\left\{36-\frac{(19-k)(20-k)}{2}\right\}-\left\{-76+\frac{(k-2)(k-1)}{2}\right\}$

$=-k^2+21k+\sim$

$=-\left(k-\frac{21}{2}\right)^2+\sim$

따라서 $a_{20}-a_1$의 값을 $k=10$ or $k=11$, $k=9$ or $k=12$ ⋯의 순으로 점검할 수 있다.

4) $k=10$

$a_2=-8, a_3=-7, \cdots, a_{10}=0, \cdots, a_{19}=9$

$a_1=-76+\frac{8\cdot 9}{2}=-40$, $a_{20}=36-\frac{9\cdot 10}{2}=\boxed{-9}$ → 조건 (가)에 모순

5) $k=11$

$a_2=-9, a_3=-8, \cdots, a_{11}=0, \cdots, a_{19}=8$

$a_1=-76+\frac{9\cdot 10}{2}=-31$, $a_{20}=36-\frac{8\cdot 9}{2}=\boxed{0}$ → 조건 (가)에 모순

6) $k=9$

$a_2=-7, a_3=-6, \cdots, a_9=0, \cdots, a_{19}=10$

$a_1=-76+\frac{7\cdot 8}{2}=-48$, $a_{20}=36-\frac{10\cdot 11}{2}=\boxed{-19}$ → 조건 (가)에 모순

7) $k=12$

$a_2=-10, a_3=-9, \cdots, a_{12}=0, \cdots, a_{19}=7$

$a_1=-76+\frac{10\cdot 11}{2}=-21$, $a_{20}=36-\frac{7\cdot 8}{2}=8$

이 경우 조건 (가), (나), (다) 모두에 부합한다.

$\therefore$ $a_{20}-a_1$의 최댓값은 $8-(-21)=29$ 이다.

$\therefore$ $a_{20}-a_1\geq 29$, ⑤

**단답형**

22. $\left(\frac{x}{2}+1\right)^9$의 전개식에서 $x^2$의 계수를 구하시오. [3점]

${}_9C_2\times\left(\frac{x}{2}\right)^2\times 1^7=36\times\frac{1}{4}x^2\times 1=9x^2$

$\therefore$ 9

23. 함수 $f(x)=e^{3x^2-12}$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=e^{3x^2-12}$

$f'(x)=6x\,e^{3x^2-12}$

$\therefore f'(2)=6\cdot 2\cdot e^0=12$

$\therefore f'(2)=12$, 12

#21. 참고

cf) $a_k=0$ 인 k가 존재하지 않는다고 가정하자.

$a_k\cdot a_{k+1}<0$ 인 k가 반드시 존재한다.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{20}$의 경우) | $a_{k+1}$ | $a_{k+2}$ | ⋯ | $a_{19}$ | $a_{20}$ | |
| | 1 | 2 | ⋯ | $19-k$ | $36-\frac{(19-k)(20-k)}{2}$ | |
| $a_1$의 경우) | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | ⋯ | $a_k$ | |
| | $-76+\frac{(k-1)k}{2}$ | $1-k$ | $2-k$ | ⋯ | $-1$ | |

$a_{20}-a_1=-k^2+20k+\cdots$ ⇒ $k=10$ → $k=9$ or $k=11$ → ⋯ 순서

1) $k=10$

| $a_1$ | $a_2$ | … | $a_{10}$ | $a_{11}$ | … | $a_{19}$ | $a_{20}$ 모순 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-31$ | $-9$ | ⋯ | $-1$ | 1 | ⋯ | 9 | $-9$ |

2) $k=11$

| $a_1$ | $a_2$ | ⋯ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ⋯ | $a_{19}$ | $a_{20}$ 모순 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-21$ | $-10$ | ⋯ | $-1$ | 1 | ⋯ | 8 | 0 |

3) $k=12$ →

| $a_1$ 모순 | $a_2$ | ⋯ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | ⋯ | $a_{19}$ | $a_{20}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-10$ | $-11$ | ⋯ | $-1$ | 1 | ⋯ | 7 | 8 |

⋯

이처럼 $k=10$을 비롯하여 계속 모순이 발생하므로 $a_k\neq 0$ 인 경우는 불가하다.

**24.** 방정식 $2\cos^2 x+4\sin x+k=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 $k$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 하자. $M-m$의 값을 구하시오. [3점]

$2\cos^2 x+4\sin x+k=0$

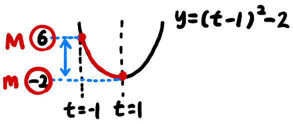
$2(1-\sin^2 x)+4\sin x+k=0$

이때, $\sin x=t$로 치환하자 $(-1\le t\le 1)$

$2(1-t^2)+4t+k=0$

$2t^2-4t=k+2$

$\underbrace{2(t-1)^2-2}_{=y}=k+2$




$-2\le k+2\le 6$

$\therefore -4\le k\le 4$

$\therefore M=4,\ m=-4$

$\therefore M-m=4-(-4)=8$, 8

**25.** 함수 $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)=a$일 때, $a^2$의 값을 구하시오. [3점]

$\frac{k}{n}=x_k$라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(1+x)f(x)\,dx$

$=\int_0^1(1+x)\sqrt{x^2+2x}\,dx$

$x^2+2x=t$라고 하자.

$(2x+2)\,dx=dt$

$\therefore$ (주어진 식) $=\int_0^3\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t\sqrt{t}\right]_0^3$

$=\sqrt{3}$

$=a$

$\therefore a^2=3$, 3

**26.** 어느 모집단의 확률변수 $X$의 확률분포가 다음 표와 같다.

| $X$ | $-1$ | $1$ | $3$ | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $a$ | $\frac{1}{3}$ | $b$ | 1 |

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{4}{3}$이다. $\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$는 상수이고 $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$a+b=\frac{2}{3}$ …①

$E(\overline{X})=E(X) \Rightarrow -a+\frac{1}{3}+3b=\frac{4}{3}$ …②

①과 ②를 연립하면 $a=\frac{1}{4},\ b=\frac{5}{12}$

$P(\overline{X}=1)=P(X=1)\cdot P(X=1)+P(X=-1)\cdot P(X=3)\cdot 2!$

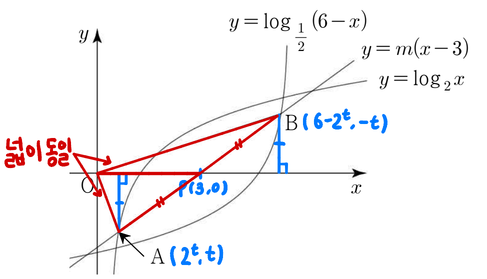
$=\frac{1}{9}+2ab$

$=\frac{23}{72}$

$=\frac{q}{p}$

$\therefore p=72,\ q=23,\ p+q=95$

**27.** 실수 $m$에 대하여 직선 $y=m(x-3)$이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점 중 제4사분면에 있는 점을 A, 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}(6-x)$와 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 6일 때, 실수 $m$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]




두 곡선 $y=\log_2 x$와 $y=\log_{\frac{1}{2}}(6-x)$는 점 $(3,0)$에 대하여 점대칭이다.
직선 $y=m(x-3)$이 점 $(3,0)$을 지나고 두 점 A, B는 각각 제4사분면, 제1사분면에 있으므로 두 점 A, B는 점 $(3,0)$에 대하여 대칭이다.

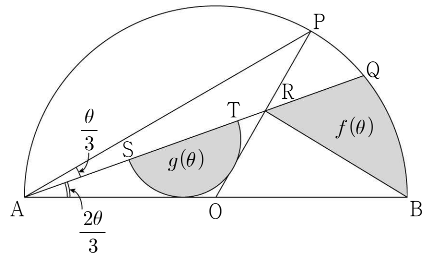
A$(2^t, t)$ 라 하면 B$(6-2^t, -t)$ 이다. (cf. 점 A와 점 B의 중점이 $(3,0)$이다)
점 $(3,0)$을 P라 하자.

$\overline{PA}=\overline{PB}$ 로부터 $\triangle OAB = 2\triangle OPB$ 이므로
$\triangle OPB = \frac{1}{2}\times 3\times(-t) = 3$ 이다. $\therefore t=-2$

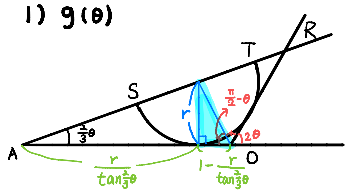
$\therefore A(\frac{1}{4},-2)$, $B(3,0)$, $m=\frac{0-(-2)}{3-\frac{1}{4}}=\frac{8}{11}=\frac{q}{p}$

$\therefore p=11, q=8$, $p+q=19$

**28.** 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P를 $\angle PAB=\theta$가 되도록 잡고, 호 PB의 삼등분점 중 점 P에 가까운 점을 Q라 하자. 선분 OP와 선분 AQ의 교점을 R라 할 때, 호 BQ, 선분 BR, 선분 RQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 선분 AR 위의 두 점 S, T를 지름의 양 끝점으로 하고 선분 OA와 선분 OR에 접하는 반원의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta\times f(\theta)}{g(\theta)}=a$이다. $20a\pi$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]




1) $g(\theta)$



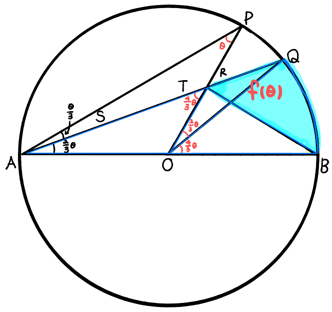

$\Rightarrow \tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \dfrac{r}{1-\frac{r}{\tan\frac{2}{3}\theta}}$

$\dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{r\tan\frac{2}{3}\theta}{\tan\frac{2}{3}\theta - r}$

$\therefore r = \dfrac{\tan\frac{2}{3}\theta}{1+\tan\theta\tan\frac{2}{3}\theta}$

$\therefore g(\theta)=\frac{1}{2}r^2\pi = \frac{1}{2}\left(\dfrac{\tan\frac{2}{3}\theta}{1+\tan\theta\tan\frac{2}{3}\theta}\right)^2\pi$

2) $f(\theta)$




원주각의 성질에 의해
$\angle POQ = 2\angle PAQ = \frac{2}{3}\theta$
$\angle QOP = 2\angle QAB = \frac{4}{3}\theta$
또한 $\angle ARO = \frac{4}{3}\theta$, $\angle APO = \theta$

$f(\theta) = \triangle AOQ + (\text{부채꼴 OBQ의 넓이}) - \triangle RAB$
$\triangle AOQ = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OQ}\cdot\sin(\pi-\frac{4}{3}\theta) = \frac{1}{2}\sin\frac{4}{3}\theta$
$(\text{부채꼴 OBQ의 넓이}) = \frac{1}{2}\cdot\overline{OB}^2\cdot\frac{4}{3}\theta = \frac{2}{3}\theta$
$\triangle RAB = 2\triangle RAO = 2\times\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OR}\cdot\sin(\pi-\frac{4}{3}\theta)\right) = \sin2\theta\cdot\dfrac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\sin\frac{4}{3}\theta}$

$\triangle RAO$에서 sin법칙에 의해
$\dfrac{1}{\sin\frac{4}{3}\theta} = \dfrac{\overline{OR}}{\sin\frac{2}{3}\theta}$ $\therefore \overline{OR} = \dfrac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\sin\frac{4}{3}\theta}$

$\therefore f(\theta) = \frac{1}{2}\sin\frac{4}{3}\theta + \frac{2}{3}\theta - \dfrac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\sin\frac{4}{3}\theta}\sin2\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to0+}\dfrac{\theta\times f(\theta)}{g(\theta)} = \lim_{\theta\to0+}\dfrac{\theta\cdot f(\theta)}{\frac{\pi}{2}\tan^2\frac{2}{3}\theta}\cdot(1+\tan\theta\tan\frac{2}{3}\theta)^2$

$= \lim_{\theta\to0+}\frac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\frac{\tan^2\frac{2}{3}\theta}{\theta^2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin\frac{4}{3}\theta}{\theta} + \dfrac{\frac{2}{3}\theta}{\theta} - \dfrac{\sin2\theta}{\theta}\cdot\dfrac{\frac{\sin\frac{2}{3}\theta}{\theta}}{\frac{\sin\frac{4}{3}\theta}{\theta}}\right)\cdot(1+\tan\theta\tan\frac{2}{3}\theta)^2$

$= \frac{3}{2\pi}$

$\therefore a = \frac{3}{2\pi}$, $20a\pi = 30$

**29.** 검은색 구슬 3개, 파란색 구슬 2개, 빨간색 구슬 1개를 서로 다른 상자 4개에 남김없이 나누어 넣을 때, 빈 상자의 개수가 1 이하가 되도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 구슬끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

상자에 들어가는 검은 구슬의 개수는 다음과 같이 구분할 수 있다.

$3=3+0+0+0=2+1+0+0=1+1+1+0$

이후 빨간 구슬의 위치에 따라 경우를 나눌 수 있다.

1) $3=3+0+0+0$ 검 빨 파

(1) 1 0 0 0 ; $\frac{4!}{3!}\cdot 1\cdot {}_3C_2=12$

(2) 0 1 0 0 ; $\frac{4!}{3!}\cdot {}_3C_1\cdot({}_4H_2-{}_2H_2)=84$

빈상자 1개 이하

2) $3=2+1+0+0$ 검 빨 파

(1) 1 0 0 0 ; $\frac{4!}{2!}\cdot 1\cdot({}_4H_2-{}_2H_2)=84$

(2) 0 1 0 0 ; $\frac{4!}{2!}\cdot 1\cdot({}_4H_2-{}_2H_2)=84$

(3) 0 0 1 0 ; $\frac{4!}{2!}\cdot {}_2C_1\cdot {}_4H_2=240$

3) $3=1+1+1+0$ 검 빨 파

(1) 1 0 0 0 ; $\frac{4!}{3!}\cdot {}_3C_1\cdot {}_4H_2=120$

(2) 0 0 0 1 ; $\frac{4!}{3!}\cdot 1\cdot {}_4H_2=40$

$\therefore$ 구슬을 상자에 나누어 넣는 경우의 수는 총 664 이다.

$\therefore$ 664

**30.** 자연수 $n$에 대하여 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 정수 $m$의 값의 합을 $a_n$이라 하자.

> 양의 실수 전체의 집합의 두 부분집합
> $A=\{x\,|\,x^2-m=2\ln x+n-8\}$,
> $B=\{x\,|\,x^2+m=2\ln x+3n-6\}$
> 에 대하여 $A=B$이다.

$\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

$A=\{x\,|\,x^2-2\ln x=m+n-8\}$

$B=\{x\,|\,x^2-2\ln x=-m+3n-6\}$

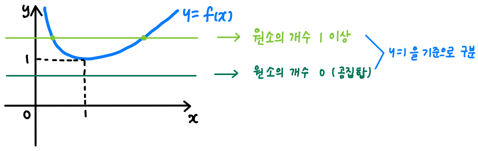
$f(x)=x^2-2\ln x\ (x>0)$ 이라 하자.

$f'(x)=2x-\frac{2}{x}$ , $f'(1)=0$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $\infty$ | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ | $\infty$ |

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.




① $A=B=\phi$이기 위해서는

$\begin{cases} m+n-8<1 \\ -m+3n-6<1 \end{cases}$ 이어야 한다. 즉, $\begin{cases} m<-n+9 \\ m>3n-7 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $3n-7<m<9-n$

② $A=B\neq\phi$ 이기 위해서는

$\begin{cases} m+n-8=-m+3n-6 \\ m+n-8=-m+3n-6\geq 1 \end{cases}$ 이어야 한다. 즉, $m=n+1$ 이고 $m+n-8=-m+3n-6=2n-7\geq 1$

1) $n\leq 3$

①의 경우 : $3n-7<9-n$ 이므로 성립가능

②의 경우 : $2n-7<1$ 이므로 성립 불가

$\therefore$ $A=B=\phi$ 인 경우만 가능

$\therefore$ ①에 의해 $\begin{cases} n=1\ ;\ -4<m<8 \Rightarrow a_1=(-3)+(-2)+\cdots+6+7=22 \\ n=2\ ;\ -1<m<7 \Rightarrow a_2=0+1+\cdots+5+6=21 \\ n=3\ ;\ 2<m<6 \Rightarrow a_3=3+4+5=12 \end{cases}$

2) $n>3\ (n\geq 4)$

①의 경우 : $3n-7\geq 9-n$ 이므로 성립 불가

②의 경우 : $2n-7\geq 1$ 이므로 성립 가능

$\therefore$ $A=B\neq\phi$ 인 경우만 가능, 이때 $A=B=\{x\,|\,x^2-2\ln x=2n-7\}$ 이다.

$\therefore$ ②에 의해 $a_n=n+1$ 이다.

↳ $m=n+1$로 단 하나 존재

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n=(22+21+12)+\sum_{n=4}^{10}(n+1)=55+(5+6+\cdots+11)=111$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n=111$

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.