

- ※ 최근 평가원. 특히 6월, 9월을 중심으로 짚어봐야 할 유형들을 모은 것입니다.
- ※ 대부분의 문항은 [/한성은 모의고사]에 수록되었던 문항입니다. 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- ※ 제 예상은 거의 맞지 않습니다.

[2020년, 학생들을 털었던 문항들]

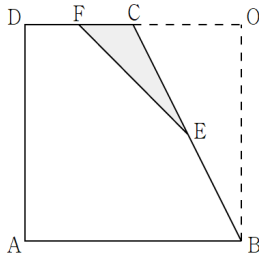
1. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$ 인 정사각형 $ABOD$ 가 있다.

선분 OD 의 중점을 C , 선분 BC 의 중점을 E , 선분 CD 의 중점을 F 라 하고 삼각형 CEF 에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

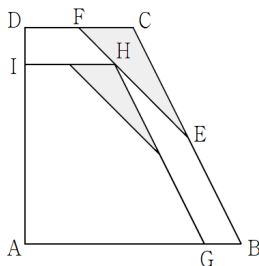
선분 AB 위의 점 G , 선분 EF 위의 점 H , 선분 DA 위의 점 I 를 꼭짓점으로 하고 사각형 $ABCD$ 와 닮음인 사각형 $AGHI$ 를 그리고 사각형 $ABCD$ 에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? ¹⁾

[4점]



R_1



R_2

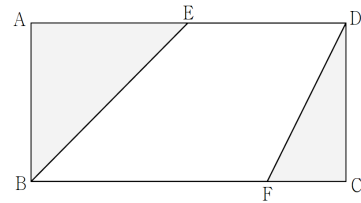
- ① $\frac{32}{11}$ ② $\frac{34}{11}$ ③ $\frac{36}{11}$
 ④ $\frac{38}{11}$ ⑤ $\frac{40}{11}$

2. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$ 인 직사각형 $ABCD$ 가

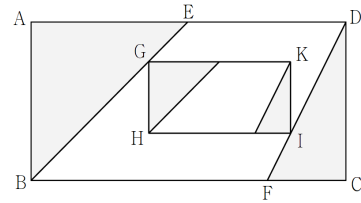
있다. 선분 AD 의 중점을 E , 선분 BC 를 3:1로 내분하는 점을 F 라 하고, 두 삼각형 ABE , CDF 에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 선분 BE 를 3:1로 내분하는 점 G , 선분 DF 위의 점 I 에 대하여 가로와 세로의 길이의 비가 2:1이고 가로가 선분 BC 와 평행한 직사각형 $GHIK$ 를 그리고 직사각형 $GHIK$ 에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 두 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? ²⁾

[4점]



R_1



R_2

- ① $\frac{260}{319}$ ② $\frac{280}{319}$ ③ $\frac{300}{319}$
 ④ $\frac{320}{319}$ ⑤ $\frac{340}{319}$

⇒ 4월 모의고사인지?에 답을 강조한
 등비급수와 도형 문제가 나오니까 털리더라.

3. 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

일 때, 다음은 2 이상인 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = n(a_n - 1) \quad \cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=2$ 일 때 (좌변) $= a_1 = 1$,
 (우변) $= 2(a_2 - 1) = 1$ 이므로 (*)이 성립한다.
 (ii) $n=k$ 일 때 (*)이 성립한다고 가정하면
 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} = k(a_k - 1)$
 이다. $n=k+1$ 일 때
 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k = k(a_k - 1) + a_k$
 $= \boxed{(\text{가})} a_k - k$
 $= \boxed{(\text{가})} (a_{k+1} - \boxed{(\text{나})}) - k$
 $= \boxed{(\text{가})} \{a_{k+1} - 1\}$
 이다. 따라서 $n=k+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 이라

할 때, $\frac{f(5)}{g(4)}$ 의 값은? ³⁾ [4점]

- ① 22 ② 24 ③ 26
 ④ 28 ⑤ 30

⇒ 6월 빈칸이 확통에서 출제되지 않아서 깜짝.

어렵지는 않았지만, 9월에는 [수열 문항 풀이과정]이었음.

내년 생각해서 수열로 가져간 것 아닌가 싶기도 함.

4. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}, \quad b_n = 2 + \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$$

이다. $100b_m$ 의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는

모든 자연수 m 의 값의 합은? ⁴⁾ [4점]

- ① 180 ② 170 ③ 160
 ④ 150 ⑤ 140

⇒ 미적분으로 예상했던 6월 21번 자리였는데 수1.
 9월에도 수1이었으니 수능도 수1 아닐까 싶다.

5. 자연수 n 이 $2 \leq n \leq 10$ 일 때, x 에 대한 방정식

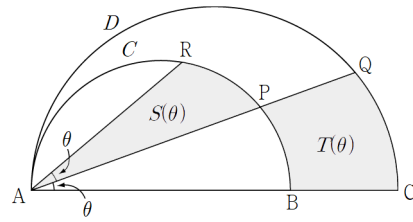
$$x^n = -n^2 + 15n - 50$$

이 적어도 하나의 실근을 갖고, 모든 실근의 합이 0 이하가 되도록 하는 모든 n 의 값의 합은?5) [3점]

- ① 32 ② 30 ③ 28
④ 26 ⑤ 24

⇒ 오답률 높았던 6월 12번, 기본개념이 중요하다고.

6. 그림과 같이 $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$ 인 선분 위의 점 B는 $\overline{AB} = 2$ 를 만족시키고, 선분 AB를 지름으로 하는 반원 C와 선분 AC를 지름으로 하는 반원 D가 있다. 반원 C 위의 두 점 P, R은 $\angle PAB = \angle RAP$ 이고, 직선 AP와 반원 D가 만나는 점 중 A가 아닌 것을 Q라 하자. $\angle PAB = \theta$ 라 할 때, 두 선분 AP, AR과 호 PR로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$, 두 선분 BC, PQ와 두 호 BP, CQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $T(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta) - T(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은?6) [4점]



- ① -8 ② -4 ③ -2
④ 4 ⑤ 8

⇒ 6월 28번, 영역 겹친 부분을 고려해야 했던 문항. 수준 떨어진 평가원의 자기복제.

7. 두 곡선 $y = \log_2 x$ 과 $y = 2^{-x}$ 이 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?⁷⁾ [4점]

————<보 기>————

- ㉠. $2y_2 < 1 < 2y_1$
 ㉡. $x_2 < x_1 + 1$
 ㉢. $\sqrt{2} < 8y_1y_2 < 3$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

⇒ 6월 18번에 출제된 지수로그함수와 크기비교 합답형.
 올드한 느낌을 주더라고.

8. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프와 함수 $y = |x - n|$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 a_n , b_n 이라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?⁸⁾ (단, $a_n < b_n$ 이다.) [4점]

————<보 기>————

- ㉠. $b_6 - a_6 < 5$
 ㉡. 모든 자연수 n 에 대하여
 $2n < a_n + b_n$ 이다.
 ㉢. 모든 자연수 n 에 대하여
 $(a_n + b_n - n)^2 < a_n b_n$ 이다.

- ① ㉡ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

9. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 1이 적혀 있는 카드와 2가 적혀 있는 카드가 이웃하거나 2가 적혀 있는 카드와 3이 적혀 있는 카드가 이웃할 확률은?⁹⁾ [4점]

- ① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{17}{30}$ ③ $\frac{3}{5}$
 ④ $\frac{19}{30}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

⇒ 6월 17번, 9월 17번에 모두

[독립인 두 사건의 합사건의 확률]

이 출제되었다. 이 문항은 종속.

10. 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 임의로 일렬로 나열할 때, 짝수가 적혀 있는 카드는 작은 수부터 크기 순서로 왼쪽부터 나열되거나 어느 두 장도 이웃하지 않을 확률은?¹⁰⁾ [4점]

- ① $\frac{5}{14}$ ② $\frac{17}{42}$ ③ $\frac{19}{42}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{23}{42}$

⇒ 이 문항은 독립.

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

임을 이용해서 풀어보자.

11. 공차가 -2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자, 자연수 k 에 대하여

$$a_k = -5, \quad S_2 = S_k - S_{k+2}$$

가 성립할 때, a_1 의 값은?¹¹⁾ [4점]

- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

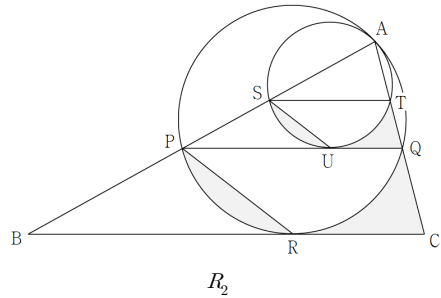
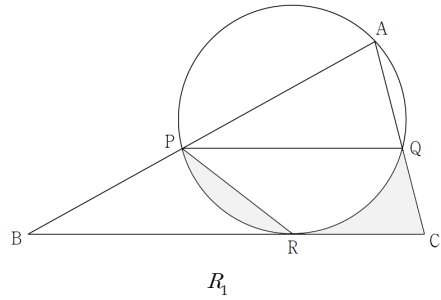
⇒ 6월 26번. 살짝 까탈스러운 등차수열 문항.

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=2$ 이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{4}$ 인

삼각형 ABC 가 있다. 선분 AB 위의 점 P , 선분 AC 위의 점 Q 에 대하여 직선 PQ 는 직선 BC 와 평행하며 세 점 A , P , Q 를 지나는 원이 직선 BC 와 점 R 에서 접한다. 두 선분 CQ , CR 과 호 QR 로 둘러싸인 부분과 선분 PR 과 호 PR 로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 AP 위의 점 S , 선분 AQ 위의 점 T 에 대하여 직선 ST 는 직선 PQ 와 평행하며 세 점 A , S , T 를 지나는 원이 직선 PQ 와 점 U 에서 접한다. 두 선분 QT , QU 와 호 TU 로 둘러싸인 부분과 선분 SU 와 호 SU 로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은?¹²⁾ [4점]



- ① $\frac{\sqrt{15}}{14}$ ② $\frac{\sqrt{15}}{7}$ ③ $\frac{3\sqrt{15}}{14}$
④ $\frac{2\sqrt{15}}{7}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{15}}{14}$

⇒ 6월 20번. 성은도르 올해 최고 이슈. 사인 코사인법칙이 기존의 [등비급수와 도형]이나 [극한과 도형]에 침투 가능. 방역정리 등의 원에 관련된 내용들도 정리해둘 것.

13. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 31개 중에서 임의로 서로 다른 두 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고 나열된 순서대로 A, B 라 할 때, A, B 가 다음 조건을 만족시킬 확률은?¹³⁾ [4점]

$$n(A \cap B) = 2 \text{이고 } A \cup B = U \text{이다.}$$

- ① $\frac{2}{31}$ ② $\frac{7}{93}$ ③ $\frac{8}{93}$
 ④ $\frac{3}{31}$ ⑤ $\frac{10}{93}$

⇒ 6월 19번, 6월 17번하고 같이 확통이 어렵다는 말이 있었다. 지금 보니 그냥 그때 병신이어서 그랬던 듯.

14. 검은색 볼펜 3자루, 파란색 볼펜 1자루, 빨간색 볼펜 1자루, 노란색 볼펜 1자루가 있다. 이 6자루의 볼펜을 4명의 회사원에게 남김없이 나누어줄 때 각 회사원이 적어도 1개의 볼펜을 받는 경우의 수를 구하여라.¹⁴⁾ (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

⇒ 6월 29번, 9월 29번과 같이 [나눠주는 경우의 수] 문항. 아무래도 두 번 반복되니까 이쪽으로 마음이 간다.

15. 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \frac{\ln 2}{\ln(1+x^4)} - 1 \quad (x \geq 1)$$

이고 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) + f(2-x) = 0$ 을 만족시킨다. 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? ¹⁵⁾
[4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여 $g''(x) \leq 0$ 이다.

ㄴ. $g(a) \geq 1$ 인 실수 a 가 존재한다.

ㄷ. $\int_0^2 g(x) dx \leq 1$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

⇒ 9월 18번. 기존 평가원에 잘 보이지 않던 패턴.
대칭성의 표현, 넓이 비교 등이 눈썰 문항같은 느낌.
보기 구성도 살짝 이상했고.. 뭐 별로였음.

16. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 의
도함수 $g'(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$g'(x) = \int_0^1 x^3 \sqrt{t} \sin(x\sqrt{t}) dt$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 극대인
모든 양수 a 를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때,
 n 번째 수를 a_n 이라 하자. $k\pi < a_6 < (k+1)\pi$ 인
자연수 k 의 값은? ¹⁶⁾ [4점]

- ① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

⇒ 9월 19번. 어렵게 느꼈는데 정답률은 높았던 문항.
직관적으로 그럴 듯한데 엄밀하게 판단하기가 어려웠다.

17. 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} 2a_n + a_{n+1} & (a_n \leq a_{n+1}) \\ a_n + 2a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3 = 2$, $a_6 = 6$ 가 되도록 하는 a_1 의 값은?¹⁷⁾

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

⇒ 9월 나형 21번. 나한테 21번으로 하나 예측하라고 하면 애.
9월 가형 21번은 뒤에 갈라파고스 문항으로 설명될 듯.

18. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는

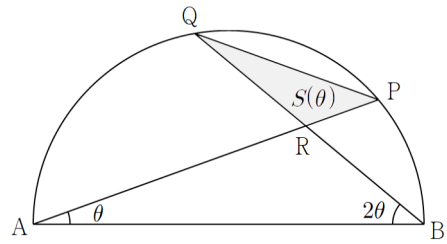
반원 위의 두 점 P, Q는 $\angle PAB = \theta$, $\angle QBA = 2\theta$ 를

만족시킨다. 두 선분 AP, BQ의 교점을 R, 삼각형

PQR의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{q}{p}$ 일 때,

$p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라.¹⁸⁾ (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 이고, p 와 q 는

서로소인 자연수이다.) [4점]



⇒ 9월 28번. 사인법칙이 활용되기 좋은 문항.

19. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ f(x) \geq 0$$

$$(나) \ \{f(x)\}^2 = (x-1)^2(x-3)^2$$

$\int_0^4 f(x)dx$ 의 값은? ¹⁹⁾ [4점]

① $\frac{4}{3}$

② 2

③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{10}{3}$

⑤ 4

⇒ 9월 나형 20번에 [함수를 갈아타는] 문항이 출제됨.

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 모든 실수 x 에 대하여 두 수

$$x, f(x)$$

중 크지 않은 것을 $g(x)$ 라 하자. 함수 $g(x)$ 가

$x=1, x=3$ 에서 미분가능하지 않을 때, $\int_0^4 g(x)dx$ 의

값은? ²⁰⁾ [4점]

① $\frac{16}{3}$

② 6

③ $\frac{20}{3}$

④ $\frac{22}{3}$

⑤ 8

21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n+k}$ 의 값은? ²¹⁾ [3점]

- ① 1 ② $\ln 2$ ③ $\ln 3$
 ④ $2\ln 2$ ⑤ $\ln 5$

⇒ 9월 25번. 탈리더라구?

22. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_2^x f(t) dt$$

와 실수 a 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $|g(x+a)|$ 는 오직 $x=4$ 에서만 미분가능하지 않다.
 (나) 함수 $|g(x)g(2a-x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$|f(a)|$ 의 값을 구하여라. ²²⁾ [4점]

⇒ 9월 나형 30번에 [대칭시킨 함수표현]이 등장함.
 9월 가형 18번에도 보임. 대부분 알고 있는 표현이지만
 평가원에서 직접 사용한 것은 이례적.

[아무거나 설명하고 싶은 것들]

23. 한 개의 주사위를 네 번 던져서 나오는 눈의 수 중
최대인 것을 m , 최소인 것을 n 이라 할 때, $m-n=3$ 일
확률은?²³⁾ [4점]

① $\frac{55}{216}$

② $\frac{5}{18}$

③ $\frac{65}{216}$

④ $\frac{35}{108}$

⑤ $\frac{25}{72}$

⇒ 경우의 수, 확률 연습 문항.

24. $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 6$ 을 만족시키는 정수 a, b, c, d 의
모든 순서쌍 (a, b, c, d) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때,
선택한 순서쌍 (a, b, c, d) 가 $(a-b)(b-c)(c-d)=0$ 을
만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라.²⁴⁾ [4점]

25. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ 에 대하여 집합 A 에서 집합 B 로의 모든 일대일 대응 중 하나를 선택할 때, 이 일대일 대응이 다음 조건을 모두 만족시킬 확률은? ²⁵⁾ [4점]

(가) $f(2) < f(3)$
 (나) 임의의 $x \in A$, $y \in A$ 에 대하여
 $|f(x) - f(y)| \geq 2$ 이다.

- ① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{7}{60}$ ③ $\frac{1}{10}$
 ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{15}$

26. A, B 두 선수가 탁구 시합을 할 때, 다음 조건을 만족시키면 시합에서 승리한다.

네 세트를 먼저 이기거나 이긴 세트의 수가
 진 세트의 수보다 2만큼 크다.

첫 세트에서 A가 이겼을 때, 이 시합에서 A가 승리할 확률은? ²⁶⁾ (단, 각 세트에서 A가 이길 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.)

[4점]

- ① $\frac{13}{16}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{11}{16}$
 ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

27. 어느 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게는 평균이 m , 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 초콜릿 16개를 임의추출하여 얻은 표본평균은 $\bar{x}$ 이고, 이를 이용하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰구간은 $a \leq m \leq b$ 이다. 이 회사에서 생산하는 초콜릿 64개를 다시 임의추출하여 얻은 표본평균은 $\bar{x}+4$ 이고, 이를 이용하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰구간은 $c \leq m \leq d$ 이다. $d=b$ 일 때, σ 의 값을 구하여라.²⁷⁾ (단, $P(-2 \leq Z \leq 2) = 0.95$ 로 계산한다.) [4점]

⇒ 통계적 추정 문항. 요즘 추정은 두 번 한다구.

28. 성은이와 세빈이는 카레에 들어 있는 당근을 싫어한다. 어느 농장에서 생산하는 당근 한 개의 무게는 평균이 m , 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다고 한다. 성은이와 세빈이가 각각 이 농장에서 생산하는 당근 중 표본을 임의추출하여 조사한 당근 무게의 표본평균과 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 다음 표와 같다.

	성은	세빈
표본의 크기	16	9
표본평균	c	$c-4$
신뢰구간	$111 \leq m \leq a$	$b \leq m \leq 128$

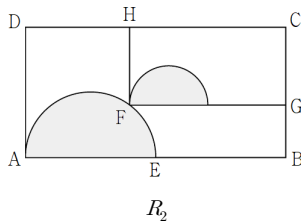
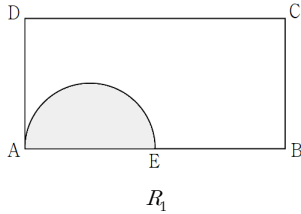
$c+\sigma$ 의 값을 구하여라.²⁸⁾ (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.475$ 로 계산한다.) [4점]

29. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2$ 인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 AB의 중점을 E라 하고, 직사각형 ABCD의 내부에 선분 AE를 지름으로 하는 반원을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

선분 BC 위의 점 G, 선분 CD 위의 점 H, 호 AE 위의 점 F를 꼭짓점으로 하고 $\overline{FG}:\overline{GC}=2:1$ 인 직사각형 FGCH를 그리고 직사각형 FGCH에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 반원을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은?²⁹⁾

[4점]

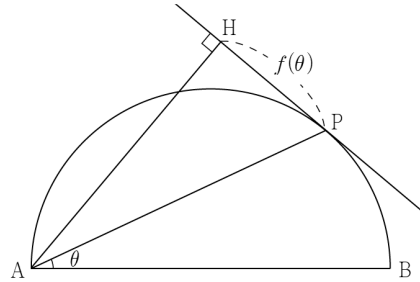


- ① $\frac{21}{32}\pi$ ② $\frac{23}{32}\pi$ ③ $\frac{25}{32}\pi$
 ④ $\frac{27}{32}\pi$ ⑤ $\frac{29}{32}\pi$

⇒ 티피컬 등비급수와 도형. 중심과 연결, 피타고라스.

30. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 O 위에 점 P를 잡고 $\angle PAB=\theta$ 라 하자. 점 P에서 원 O에 접하는 직선을 l , 점 A에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\overline{PH}=f(\theta)$ 이다. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta}$ 의 값은?³⁰⁾

[3점]



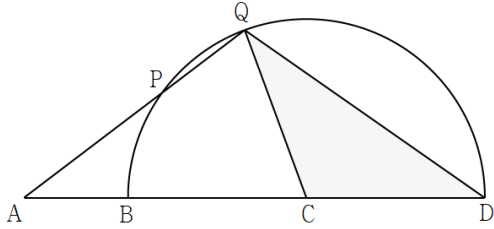
- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

⇒ 티피컬 도형과 극한. 직각삼각형 찾기.

31. 한 직선 위의 네 점 A, B, C, D와 선분 BD를 지름으로 하는 반원 C 위의 점 P가

$$\overline{AC}=5, \quad \overline{BC}=\overline{CD}=\sqrt{10}, \quad \overline{AP}=3$$

를 만족시킨다. 직선 AP와 반원 C가 만나는 점 중 P가 아닌 것을 Q라고 할 때, 삼각형 CDQ의 넓이는? ³¹⁾ [4점]



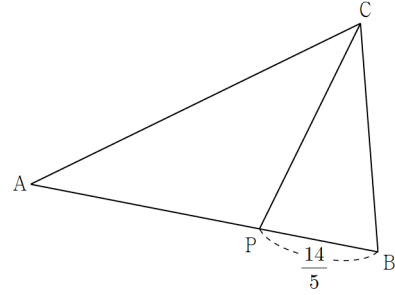
- ① $\sqrt{10}$ ② $\frac{5\sqrt{10}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$
 ④ $\frac{7\sqrt{10}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

⇒ 요즘 애들.

32. 그림과 같이 삼각형 ABC와 선분 AB 위의 점 P는

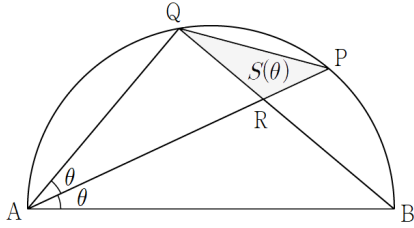
$$\overline{AP}=\overline{CP}=\overline{BC}, \quad \overline{PB}=\frac{14}{5}, \quad \cos(\angle PAC)=\frac{4}{5}$$

를 만족시킨다. 선분 AC의 길이는? ³²⁾ [4점]

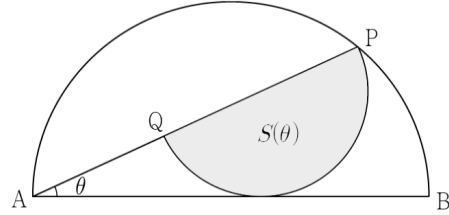


- ① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8
 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

33. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는
반원 C의 호 위의 두 점 P가 Q가 $\widehat{BP}=\widehat{PQ}$ 를 만족시킨다.
두 선분 AP와 BQ의 교점을 R, $\angle PAB=\theta$ 라 할 때,
삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값을
구하여라.³³⁾ [4점]



34. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는
반원 위에 점 P를 잡고 $\angle PAB=\theta$ 라 하자. 선분 AP 위의
점 Q에 대하여 선분 PQ를 지름으로 하고 선분 AB에
접하는 반원의 넓이는 $S(\theta)$ 이다. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은?³⁴⁾
[4점]



- ① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π
④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

35. 양수 t 와 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x - 1$ 에 대하여 원점을

지나고 기울기가 t 인 직선과 곡선 $y = f(x)$ 가
제1사분면에서 만나는 점을 P , 곡선 $y = f(x)$ 위의
점 P 에서 접하는 직선의 기울기를 $g(t)$ 라 하자.
 $g(a) = 5$ 일 때, $a \times g'(a)$ 의 값은?³⁵⁾ [4점]

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1
④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

⇒ 음함수의 기울기.

36. 양의 실수 t 와 함수

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 1) \\ x^2 \ln x & (x > 1) \end{cases}$$

에 대하여 부등식

$$mx \leq f(x) + t$$

가 항상 성립하는 m 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 실수 a 에

대하여 $g(a) \times e = f(e) + a$ 가 성립할 때, $\frac{a}{g'(a)} \times g\left(\frac{6}{e^3}\right)$ 의

값을 구하여라.³⁶⁾ [4점]

⇒ 음함수의 기울기. 킬러급.

37. $1 \leq x \leq e$ 인 모든 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(ex) = f(x) + e$$

를 만족시킨다. $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2}$ 일 때, $\int_1^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx$ 의

값은? ³⁷⁾ [3점]

- ① $e-2$ ② $e-1$ ③ e
 ④ $e+1$ ⑤ $e+2$

⇒ 정적분과 구간.

38. $0 \leq x \leq e$ 인 모든 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x+e) = \frac{1}{e} f(x)$$

를 만족시킨다. $\int_0^{2e} f(x) dx = 4$ 일 때, $\int_0^e f(x) dx$ 의

값은? ³⁸⁾ [4점]

- ① $\frac{e}{1+e}$ ② $\frac{2e}{1+e}$ ③ $\frac{3e}{1+e}$
 ④ $\frac{4e}{1+e}$ ⑤ $\frac{5e}{1+e}$

39. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여
함수 $f(f(x))$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 갖고, $x=2$ 에서
극댓값을 갖는다.

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

일 때, 함수 $g(f(x))$ 의 최솟값은? ³⁹⁾ [4점]

- ① -6 ② -9 ③ -12
④ -15 ⑤ -18

⇒ 아주 약한 합성함수의 그래프.

40. 등차수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{3n} a_k = 9n^2$$

일 때, $\sum_{k=1}^6 a_{3k}$ 의 값을 구하여라. ⁴⁰⁾ [4점]

⇒ 합과 일반항.

41. 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{S_n}{(n+c)a_n} \quad (\text{단, } c \text{는 상수})$$

이 일정한 값을 가질 때, $c + \frac{a_8}{a_2}$ 의 값을 구하여라.⁴¹⁾ [4점]

⇒ 등차수열의 일반항.

42. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 m 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \sum_{k=1}^m a_k = 9(m+1) \\ \text{(나)} \quad & \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \sum_{i=k+1}^m a_i a_k \right\} = \frac{15(m^3 - m)}{2} \end{aligned}$$

a_{m+1} 의 값을 구하여라.⁴²⁾ [4점]

43. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^8 \frac{a_k}{a_k + a_{k+1}} = 2$$

이다. $\sum_{k=1}^8 \frac{a_k \times a_{k+2}}{a_1 \times a_{k+1}}$ 의 값은? ⁴³⁾ [3점]

① $\frac{3^8 - 1}{2}$

② $\frac{3^8 - 2}{2}$

③ $\frac{3^8 - 3}{2}$

④ $\frac{3^9 - 2}{2}$

⑤ $\frac{3^9 - 3}{2}$

⇒ 등비수열의 구조.

44. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_1^9 f(x) dx = 6, \quad \int_1^9 \sqrt{1 + \{f(x)\}^2} dx = 10$$

일 때, $\int_1^5 xf(x) dx$ 의 값을 구하여라. ⁴⁴⁾ [4점]

⇒ []

45. $x \geq 1$ 에서 정의된 함수 $f(x) = x \ln x$ 의 역함수를

$g(x)$ 라 할 때, $\int_0^{2e^2} \frac{1}{g(x)} dx$ 의 값은? ⁴⁵⁾

- ① $e^2 - 1$ ② $2e^2 - 1$ ③ $3e^2 - 1$
 ④ $4e^2 - 1$ ⑤ $5e^2 - 1$

⇒ 역함수를 이용한 치환적분.

46. 열린 구간 $(-\pi, \pi)$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가
 $-\pi < x < \pi$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$2f(x) = e^{\int_0^x (x-t)f(t)dt}$$

를 만족시킨다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른
 것은? ⁴⁶⁾

—<보 기>—

ㄱ. $0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

ㄷ. $-\pi < a < \pi$ 인 실수 a 에 대하여

$$\int_0^a f(x)dx = 1 \text{ 이면 } f(a) = 1 \text{ 이다.}$$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

⇒ 그거 임마.

47. 두 집합

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$Y = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 자연수}\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하여라.⁴⁷⁾ [4점]

(가) $f(1) = 1, f(6) = 12$

(나) $i = 1, 2, \dots, 5$ 에 대하여

$$f(i+1) - f(i) \text{는 모두 홀수인 자연수이다.}$$

⇒ 29번 고난도 경우의 수/확률 씹가능.

48. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 집합 A 에서 집합 A 로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라.⁴⁸⁾ (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$$f(1)f(2) \leq f(4) \text{이거나 함수 } f \text{의 치역이 } A \text{이다.}$$

49. 수직선 위의 점 P는 점 A(1)에서 출발하고, 주사위를 던져 다음 규칙에 따라 움직이는 시행을 반복한다.

[규칙]

- (i) 점 P의 위치가 홀수일 때, 주사위의 눈이
 - 1 또는 2이면 양의 방향으로 1만큼 움직인다.
 - 3 또는 4이면 양의 방향으로 2만큼 움직인다.
 - 5 또는 6이면 제자리에서 움직이지 않는다.
- (ii) 점 P의 위치가 짝수일 때, 주사위의 눈이
 - 3 이하이면 음의 방향으로 1만큼 움직인다.
 - 4 이상이면 제자리에서 움직이지 않는다.

점 P가 주사위를 5번 던져 처음으로 점 B(7)에 도착할 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라.⁴⁹⁾ (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

50. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 이 있다. X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 조건

‘ $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.’

를 만족시키는 X 에서 Y 로의 함수 f 의 집합을 P 라 하자. 집합 $\{(g, h) | g, h \in P\}$ 의 원소 중 임의로 한 개를 택할 때, X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $g(x_1) \leq h(x_2)$ 일

확률이 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라.⁵⁰⁾ (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

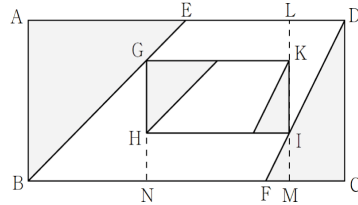
1) ③

답음비는 6:5이다. 첫째항은 1, 공비는 $\frac{25}{36}$ 인 등비급수.

2) ③

$\overline{GH} = a$ 라 하자. 아래 그림에서 $\overline{IL} = a + \frac{1}{4}$ 이므로 $\overline{MC} = \overline{LD} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{8}$ 이다. $\overline{NM} = 2a$, $\overline{BN} = \frac{3}{4}$ 이므로

$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{8}\right) + 2a + \frac{3}{4} = 2$ 이다. $a = \frac{9}{20}$, 답음비는 20:9, 공비는 $\frac{81}{400}$ 이다. 첫째항은 $\frac{3}{4}$ 이다.



3) ⑤

$$f(k) = k + 1, \quad g(k) = \frac{1}{k + 1}$$

4) ①

$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ 이고 b_n 은 $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{7}, \frac{7}{8}, \dots$ 이다.

$100b_m$ 이 100 이하의 자연수가 되려면 분모가 짝수인 100의 약수가 되어야 한다.

가능한 분모는 2, 4, 10, 20, 50, 100이고 m 은 1, 3, 9, 19, 49, 99이다.

5) ①

6) ②

$$S(\theta) - T(\theta) = (\cos 2\theta \sin 2\theta + 2\theta) - (2\cos \theta \sin \theta + 2\theta)$$

7) ⑤

기역 : 곡선 $y = 2^{-x}$ 가 $x = 1$ 과 만나는 점의 y 좌표가 $\frac{1}{2}$ 이다.

니은 : 점 (x_1, y_1) 은 직선 $y = x$ 위의 점이다. 점 (x_2, y_2) 는 $(x_1 + 1, y_1)$ 의 왼쪽의 왼쪽 아래에 있다.

디귤 : 직선 $y = x$ 와 점 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 과 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 를 지나는 직선의 교점이 $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ 이므로 $x_1 = y_1 < \frac{3}{4}$ 이다.

왼쪽 : $2^{-\frac{5}{2}} < 2^{-x_1} \times 2^{-x_2}$ 에서 $x_1 + x_2 < \frac{5}{2}$ 이다. $x_2 < x_1 + 1$ 이므로 $x_1 < \frac{3}{4}$ 이면 각이다. $\circ \Rightarrow$

오른쪽 : $y_2 < \frac{1}{2}$ 이므로 $y_1 < \frac{3}{4}$ 이면 각이다. $\circ \Rightarrow$

8) ①

기역 : $a_6 = 4$ 이고 곡선 $y = \log_2 x$ 는 두 점 $(9, 3), (10, 4)$ 사이를 지나기에 $9 < b_6 < 10$ 이다.

니은 : $\log_2 a_n = n - a_n$, $\log_2 b_n = b_n - n$ 이고 $\log_2 a_n < \log_2 b_n$ 이므로 $n - a_n < b_n - n$ 이다.

디귤 : 두 교점의 중점의 y 좌표는 $\frac{\log_2 a_n + \log_2 b_n}{2} = \log_2 \sqrt{a_n b_n}$ 이다.

점 $(n, 0)$ 을 직선 $x = \frac{a_n + b_n}{2}$ 에 대하여 대칭이동시킨 점은 $(a_n + b_n - n, 0)$ 이다.

여기서 위로 그으면 $\log_2(a_n + b_n - n)$ 의 값이 $\log_2 \sqrt{a_n b_n}$ 보다 크다.

9) ③

10) ②

11) ①

등차수열의 합은 '상수항이 없는 이차식'이다. $S_2 - S_0 = S_k - S_{k+2}$ 를 잘 살펴보면 $S_{k+2} = 0$ 각이 뜬다.

$a_k = -5$, $a_{k+1} = -7$, $a_{k+2} = -9$ 에서 $S_{k+1} = S_{k+2} - a_{k+2} = 9$ 이다. 이 값이 $S_1 = a_1$ 이다.

※ 물론 정상적으로 풀어도 좋다. 두 개의 식을 연립하여 a_1 과 k 를 구하면 된다. $k = 8$ 이다.

12) ③

삼각형 ABC에서 코사인 돌리면 $\overline{BC} = 4$ 이다.

$\overline{BP} = 4t$, $\overline{CQ} = 2t$ 라 두자. 방면 돌리면 $\overline{BR} = 4\sqrt{t}$, $\overline{CR} = 2\sqrt{t}$ 이므로 $t = \frac{4}{9}$ 이다.

$\overline{BR} : \overline{CR} = 2 : 1$ 이므로 AR은 각 BAC의 이등분선이다. $\overline{PR} = \overline{QR}$ 이고 R_1 의 색칠한 도형의 넓이는 $\frac{4\sqrt{15}}{27}$ 이다.

답음비는 $1 : (1 - t)$ 이므로 9:5, 넓이비는 81:25, 공비는 $\frac{25}{81}$ 이다.

13) ③

전체 경우의 수는 31×30 이고, 사건의 경우의 수는 80이다.

벤 다이어그램에서 $A \cap B$ 영역에 오는 원소를 선택하는 경우의 수 ${}_5C_2$ 와,

나머지 원소를 $A-B$ 영역 또는 $B-A$ 영역에 넣는 경우의 수 2^3 의 곱이다.

14) 388

검은색이 아닌 색 볼펜을 몇 명에게 나눠주는지로 분류하자.

Case1) 모든 색 볼펜을 한 명에게 줄 때 : 회사원 선택 4가지, 검은색 나눠주는 방법 $1(={}_4H_0)$ 가지.

Case2) 색 볼펜을 두 명에게 줄 때 : 색 볼펜 분할 3가지, 회사원 선택 4×3 가지, 검은색 나눠주는 방법 $4(={}_4H_1)$ 가지.

Case2) 색 볼펜을 세 명에게 줄 때 : 회사원 선택 $4 \times 3 \times 2$ 가지, 검은색 나눠주는 방법 $10(={}_4H_2)$ 가지.

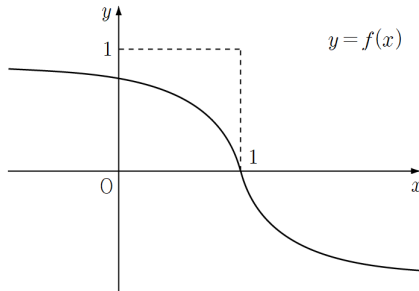
15) ③

니은 : $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값을 가진다. $g(1)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축, y 축으로 둘러싸인

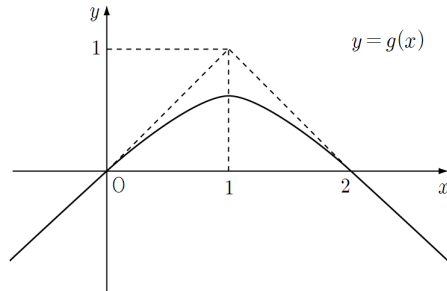
도형의 넓이인데, $f(0)=1-\ln 2$ 의 값이 1보다 작으므로 도형의 넓이 또한 1보다 작다.

디근 : 곡선 $y=g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 위로 볼록이다. $g'(0)=f(0)$ 은 1보다 작다.

그래프를 켜려보면 $\int_0^2 g(x)dx$ 는 점 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ 을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이보다 작다.



[그림1] $y=f(x)$ 의 그래프



[그림2] $y=g(x)$ 의 그래프

16) ①

$g'(x) = \int_0^1 x^3 \sqrt{t} \sin(x\sqrt{t}) dt$ 에서 $x\sqrt{t}=u$ 로 치환하면

$$g'(x) = \int_0^x 2u^2 \sin u du$$

이다. $g''(x)=2x^2 \sin x$ 는 $x=\pi$, $x=2\pi$, $x=3\pi$, ...에서 0이고 사이사이의 넓이를 켜려보면

$g'(x)=0$ 의 근이 구간 $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$, ...에 각각 하나씩 존재한다.

이 중 $g(x)$ 가 극대가 되는 x 값은 구간 $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$, $(5\pi, 6\pi)$, ...에 있는 것들이다.

17) ⑤

18) 25

삼각형 ABR에서 사인법칙 쓰고 싶은 각이다. $\overline{PR} = \overline{AP} - \overline{AR} = 2\cos\theta - \frac{2\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$ 이다.

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \left(2\cos\theta - \frac{2\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \right) \times \left(2\cos 2\theta - \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} \right) \times \sin 3\theta \text{이고 } \frac{q}{p} = \frac{4}{3} \text{이다.}$$

19) ⑤

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-3) & (x < 1 \text{ 또는 } 3 < x) \\ -(x-1)(x-3) & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

20) ③

직선 $y=x$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=1$, $x=3$ 에서 서로 만나야 한다.

$$f(x) = (x-1)(x-3) + x \text{이고 } g(x) = \begin{cases} x & (x < 1 \text{ 또는 } 3 \leq x) \\ f(x) & (1 \leq x < 3) \end{cases} \text{이다.}$$

21) ②

22) 32

(가)에서 함수 $g(a+4)=0$ 이고 $g'(a+4) \neq 0$ 이다.

$$g(2)=0, g'(2)=0 \text{이므로 } g(x) = \frac{1}{4}(x-2)^3(x-a-4) \text{가 되겠군.}$$

곡선 $y=g(2a-x)$ 는 곡선 $y=g(x)$ 를 직선 $x=a$ 에 대하여 대칭이동 시킨 것이다.

$|g(x)g(2a-x)|$ 가 미분가능하려면 a 가 2와 $a+4$ 의 가운데 놓여야겠다. $2a=2+(a+4)$ 에서 $a=6$ 이다.

$$g(x) = \frac{1}{4}(x-2)^3(x-10) \text{이고 } f(x) = (x-2)^2(x-8) \text{이다.}$$

23) ①

$$3 \times \left\{ \left(\frac{4}{6} \right)^4 - \left(\frac{3}{6} \right)^4 - \left(\frac{3}{6} \right)^4 + \left(\frac{2}{6} \right)^4 \right\}$$

24) 79

여사건은 $a < b < c < d$ 인 사건이므로 답은 $1 - \frac{{}_6C_4}{{}_6H_4} = \frac{37}{42}$ 이다.

25) ④

전체 경우의 수는 $10 \times 9 \times 8 \times 7$ 이다. 사건의 경우의 수는
지역의 원소 4개를 선택하는 경우의 수 ${}_7C_3$ 에 대응시키는 경우의 수 $4!/2!$ 의 곱이다.
※ 지역의 원소 4개를 선택하는 경우의 수는 [2020학년도 6월 19번]와 같은 문제가 된다.

26) ②

경우를 모두 나열하면
승, 패승승, 패승패승승, 패패승승승, 패승패승패승, 패승패패승승, 패패승승패승, 패패승패승승
이다. 음.. 이진 좀 명칭해 보이죠? 4×4 타일에서 길찾기로 생각해 보면 조아요.

27) 16

28) 138

$$111 + \frac{\sigma}{2} = c, \quad (c-4) + \frac{2\sigma}{3} = 128$$

에서 $c=120, \sigma=18$ 이다.

29) ③

선분 AE의 중점을 O, 점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하자.
 $\overline{HF}=a$ 이면, $\overline{OM}=3-2a, \overline{FM}=1-a$ 이다. 삼각형 OMF에서 피타고라스를 치면 $a=\frac{6}{5}$ 이다.

답음비는 $5:3$ 이다. 첫째항은 $\frac{\pi}{2}$, 공비는 $\frac{9}{25}$ 인 등비급수.

30) ③

31) ③

삼각형 ACP에서 코사인을 돌리면 $\cos(\angle PAC) = \frac{4}{5}$ 이다.
삼각형 ACQ에서 코사인을 돌리면 $\overline{AQ}=5$ 이고, $\sin(\angle QCA) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 이다.
삼각형 CDQ의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{CQ} \times \sin(\angle QCD) = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ 이다.

※ 점 C에서 현 PQ에 수선의 발, 점 Q에서 선분 BD에 수선의 발 내려서 풀어도 좋다.

32) ③

$\overline{AP}=\overline{CP}=\overline{BC}=a$ 라 하자. 이등변삼각형 PAC에서 바로 그 수선을 내리면, $\overline{AC}=\frac{8}{5}a$ 이다.
이등변삼각형 CPB에서 바로 그 수선을 내려 수선의 발을 M이라 하면
 $\overline{AM}=\overline{AC} \times \cos(\angle CAM)$ 이므로 $\frac{32}{25}a$ 이다. 이 값이 $a+\frac{7}{5}$ 이므로 $a=5$ 이당.

33) 2

$\angle QRP = \frac{\pi}{2} + \theta$ 이고 $\overline{AQ}=2\cos 2\theta, \overline{QR}=2\cos 2\theta \tan \theta$ 이다.
삼각형 ABR에서 사인법칙을 돌리면 $\overline{PR} = \frac{2\cos 2\theta}{\cos \theta}$ 이므로 $\overline{AP} = 2\cos \theta - \frac{2\cos 2\theta}{\cos \theta}$ 이다.
삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2\cos 2\theta \tan \theta \times \left(2\cos \theta - \frac{2\cos 2\theta}{\cos \theta}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ 이다.
 $2\cos \theta - \frac{2\cos 2\theta}{\cos \theta} = \frac{2(\cos^2 \theta - \cos 2\theta)}{\cos \theta} = \frac{2(1 - \cos 2\theta - \sin^2 \theta)}{\cos \theta}$ 이므로 대충 $2\theta^2$ 이다.

※ 풀이는 [사인법칙]과 [직각삼각형] 중 어느 쪽을 중심으로 가져가도 좋다. 의도적으로 반쯤 걸친 문항.

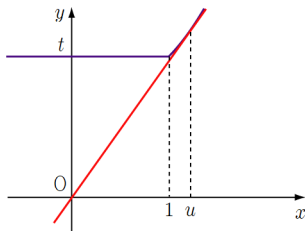
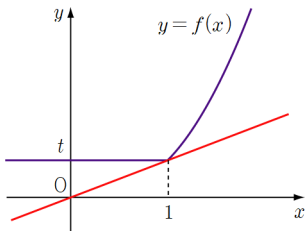
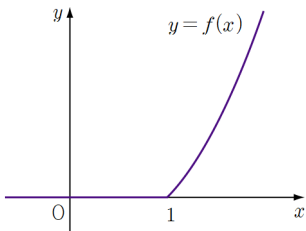
34) ③

35) ⑤

점 P의 x좌표를 u라 하면 $\frac{1}{2}u^3 - u - 1 = tu$ 이고 $g(t) = \frac{3}{2}u^2 - 1$ 이다.
 $\Rightarrow g(a) = 5$ 일 때, $u=2$ 이고 $t = \frac{1}{2}(=a)$ 이다.
 $\Rightarrow \left(\frac{3}{2}u^2 - 1\right) \frac{du}{dt} = t \times \frac{du}{dt} + u$ 에서 $\frac{du}{dt} \Big|_{t=a} = \frac{4}{9}$ 이고 $g'(t) = 3u \times \frac{du}{dt}$ 에서 $g'(a) = \frac{8}{3}$ 이다.

36) 12

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림1]과 같다. $x=1$ 에서의 우접선(?)의 기울기는 1이다.



$t \leq 1$ 일 때, $g(t) = t$ 이다. 따라서 $g\left(\frac{6}{e^3}\right) = \frac{6}{e^3}$ 이다. [그림2] 참고.

$t > 1$ 일 때, $g(t)$ 는 직선 $y = mx$ 가 곡선 $y = f(x) + t$ 에 접할 때 얻어진다. [그림3] 참고.

접점의 x 좌표를 u 라 하면 $mu = u^2 \ln u + t$ 이고 $m = 2u \ln u + u$ 이다. 연립하면 $u^2 \ln u + u^2 = t$ 이다.

$g(a) \times e = f(e) + a$ 에서 직선 $y = g(a) \times x$ 가 곡선 $y = f(x) + a$ 이 $x = e$ 에서 서로 만나므로 $t = a$ 일 때 직선 $y = mx$ 와 곡선 $y = f(x) + t$ 는 $x = e$ 에서 서로 접한다.
따라서 $t = a$ 일 때 $u = e$ 이므로 $a = 2e^2$, $g(a) = 3e$ 이다.

$u^2 \ln u + u^2 = t$ 를 미분하면 $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2u \ln u + 3u}$ 이고

$m = 2u \ln u + u$ 를 미분하면 $\frac{dm}{dt} = (2 \ln u + 3) \times \frac{du}{dt} = \frac{1}{u}$ 이다.

$t = a$ 일 때 $\frac{dm}{dt}$ 의 값은 $\frac{1}{e}$ 이다.

37) ④

$\int_1^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx + \int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx$ 이다. $\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx$ 에서 $x = et$ 로 치환적분.

38) ④

39) ⑤

함수 $f(f(x))$ 의 도함수 $f'(f(x))f'(x)$ 가 0일 때는 $f'(f(x)) = 0$ 또는 $f'(x) = 0$ 일 때이다.
 $f'(f(x)) = 0$ 는 2개의 근을 가지고 대칭성을 살펴보면 $x = 1$ 과 $x = 3$ 을 근으로 갖는다.
 $x = 2$ 가 방정식 $f'(x) = 0$ 의 근이므로 $f(x) = 3(x-2)^2 + b$ 이고 $f(1) = 2$ 이므로 $b = -1$ 이다.

함수 $g(x)$ 의 도함수는 $f(x)$ 이다. 개형이 증감증이긴 한데 $g(f(x))$ 의 최솟값은 $f(x)$ 가 최솟값 -1 을 가질 때겠다.

(대충 봐도 차이가 많이 나지만, 엄밀하게는 $g(x)$ 의 극솟값과 비교해 줘야 한다.) 최솟값은 $\int_0^{-1} f(t) dt = -18$ 이다.

40) 120

$a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 9n^2 - 9(n-1)^2$ 에서

$a_n = an + b$ 라 놓고 살펴해보면 $a_n = 2n - 1$ 이다.

41) 5

$S_n = an^2 + bn$ 이라 하자. $a_n = 2an - a + b$ 이므로 $\frac{S_n}{(n+c)a_n} = \frac{an^2 + bn}{(n+c)(2an - a + b)}$ 이다.

이 값을 p 라 하면 $an^2 + bn = p(n+c)(2an - a + b)$ 이다. 양 변의 계수를 비교하면 $p = \frac{1}{2}$, $a = b$, $c = 1$ 이다.

($a + b = 0$ 은 $a_1 = 0$ 이라 가능하지 않다.) $S_n = an^2 + an$ 이고 $a_n = 2an$ 이다.

42) 21

$a_n = dn$ 이다. (가)에서 $d \times \frac{m(m+1)}{2} = 9(m+1)$ 이므로 $d \times m = 18$ 이다.

(나)의 좌변은 '모든 서로 다른 두 항의 곱의 합'이다. $\frac{(\text{합의 제곱}) - (\text{제곱의 합})}{2}$ 로 계산되는거 인정?

(합의 제곱)은 $d^2 \times \frac{m^2(m+1)^2}{4}$ 이고 (제곱의 합)은 $d^2 \times \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ 이므로

$\frac{(\text{합의 제곱}) - (\text{제곱의 합})}{2} = \frac{d^2(m-1)m(m+1)(3m+2)}{24} = \frac{15(m-1)m(m+1)}{2}$

이다. $d^2(3m+2) = 180$, $d \times m = 18$ 과 연립하면 $d = 3$, $m = 6$ 이다. $a_{m+1} = d(m+1) = 21$ 이다.

※ (합의 제곱)을 $\{9(m+1)\}^2$ 으로 계산해도 좋다. 계산이 살짝 더 돈다.

43) ⑤

44) 9

$F(x) = \int_1^x f(t) dt$ 라 하면 $F(1) = 0$, $F(9) = 6$ 이고, $x = 1$ 부터 $x = 9$ 까지 곡선 $y = F(x)$ 의 길이가 10이다.

$y = F(x)$ 는 직선각. $F(x) = \frac{3}{4}(x-1)$ 이므로 $\int_1^5 xf(x) dx = \int_1^5 \frac{3}{4}x dx = 9$ 이다.

※ $\int_1^5 xf(x) dx$ 는 부분적분법에 의해 $[xF(x)]_1^5 - \int_1^5 F(x) dx$ 이다.

이쪽이 의도였는데 직선이 방정식으로 딱 나오는 것을 간과했지 뭐야.

45) ⑤

역함수 미분법에 의해 $\frac{1}{g'(x)} = f'(g(x))$ 이다. 준 식은 $\int_0^{2e^2} f'(g(x)) dx$ 이다.

$g(x)=t$ 로 치환하자. 구간은 $[1, e^2]$ 이 되고 $x=f(t)$ 에서 $dx=f'(t)dt$ 이므로 $\int_1^{e^2} \{f'(t)\}^2 dt$ 가 된다.

$\int_1^{e^2} (\ln x + 1)^2 dx$ 이다. 전개하자. $\int (\ln x)^2 dx$ 는 $\int 1 \times (\ln x)^2 dx$ 에서 부분적분. 답은 $5e^2 - 1$ 이다.

46) ⑤

기역 : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 라 하자. 양 변을 미분하면 $f'(x) = f(x)F(x)$ 이다.

$f(x) > 0$ 이므로 $F(x)$ 는 $x > 0$ 에서 $F(x) > 0$, $x < 0$ 에서 $F(x) < 0$ 이다.

따라서 $x > 0$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가한다.

니은 : 마찬가지로 $x < 0$ 일 때 $f(x)$ 는 감소하므로 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(0) = \frac{1}{2}$ 이다.

디귤 : $f'(x) = f(x)F(x)$ 의 양 변을 적분하면 $f(x) = \frac{1}{2} \{F(x)\}^2 + C$ 에서 $f(x) = \frac{1}{2} \{F(x)\}^2 + \frac{1}{2}$ 이다.

$F(a) = 1$ 이므로 $f(a) = 1$ 이다.

47) 35

$f(1)$ 과 $f(2)$ 사이에 놓인 자연수의 개수를 a , $f(2)$ 와 $f(3)$ 사이에 놓인 자연수의 개수를 b ,

$f(3)$ 와 $f(4)$ 사이에 놓인 자연수의 개수를 c , $f(4)$ 와 $f(5)$ 사이에 놓인 자연수의 개수를 d ,

$f(5)$ 와 $f(6)$ 사이에 놓인 자연수의 개수를 e 라 하면 $a+b+c+d+e=6$ 이고 a, b, c, d, e 는 0 또는 짝수이다.

$\Rightarrow k+l+m+n+o=3$ 에서 ${}_5H_3$

※ 소위 [간격]으로 만든 문항. 그냥 [짝홀짝홀을 선택해야 한다.]에서 대충 노가다 뛰는 것도 좋다.

$f(3)$ 을 기준으로 분류하면, $f(3)=3$ 일 때 10개, $f(3)=5$ 일 때 12개, $f(3)=7$ 일 때 9개, $f(3)=9$ 일 때 4개다.

48) 171

풀이1) 포함배제를 이용하여

$f(1)f(2) \leq f(4)$ 인 사건의 확률은 $\frac{17}{64}$, 치역이 A 일 확률은 $\frac{3}{32}$, 두 사건의 곱사건의 확률은 $\frac{3}{128}$ 이다.

구하는 확률은 $\frac{17}{64} + \frac{3}{32} - \frac{3}{128} = \frac{43}{128}$ 이다.

풀이2) 여사건을 이용하여(어떻게 세더라도 심한 삽질 필요한 듯.)

$f(1)f(2) > f(4)$ 이며 함수 f 의 치역이 A 가 아닌 사건이다. 경우의 수를 $f(4)$ 에 의해 분류하면

$f(4)=1$ 일 때 54, $f(4)=2$ 일 때 46, $f(4)=3$ 일 때 40, $f(4)=4$ 일 때 30

이므로 답은 $1 - \frac{54+46+40+30}{4^4}$ 이다. 여사건 많이 떠올 것 같아서 한 번 해봤는데, 일일이 다 셀 수준.

49) 169

홀수 위치에서 다음 홀수 위치로 넘어갈 때,

1번의 시행으로 넘어갈 확률 : $\frac{1}{3}$

2번의 시행으로 넘어갈 확률 : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

3번의 시행으로 넘어갈 확률 : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{54}$

이다. 5번째에 B(7)에 위치하려면, {1번, 1번, 3번} 또는 {1번, 2번, 2번}으로 넘어가야 한다.

${}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{5}{54}\right) + {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{7}{162}$

50) 179

전체 경우의 수는 ${}_7P_3 \times {}_7P_3$ 이다.

사건의 경우는 두 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 의 치역의 원소가 하나 겹칠 때와 그렇지 않을 때로 나눌 수 있다.

Case1) 치역의 원소가 하나 겹칠 때,

치역 선택 ${}_7C_5$ 가지, 대응시키는 방법 $(3!)^2$ 가지.

Case2) 치역이 따로 놀 때

치역 선택 ${}_7C_6$ 가지, 대응시키는 방법 $(3!)^2$ 가지.