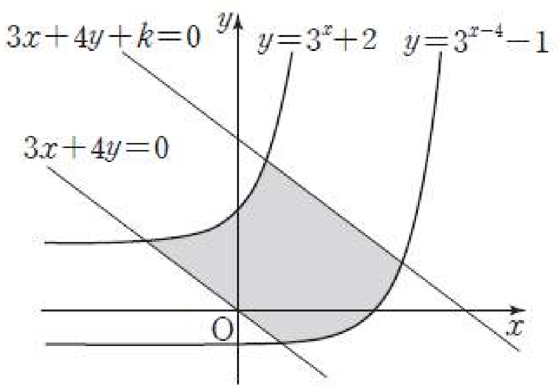
제 2 교시 수능완성 나형 (유형편+실전편) 홀수형

5지선다형

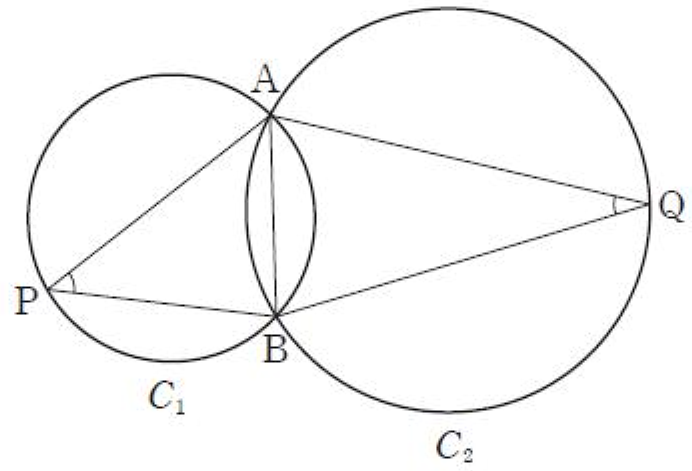
1. 그림과 같이 두 곡선 $y=3^x+2$, $y=3^{x-4}-1$과 두 직선 $3x+4y=0$, $3x+4y+k=0$ $(k<0)$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 20일 때, 상수 k의 값은? [2점]



① -25 ② -20 ③ -15 ④ -10 ⑤ -5

중요도	★★★★	쪽 번	012 005	문항코드	20051-0015

2. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2인 두 원 C_1, C_2가 두 점 A, B에서 만난다. 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\sin(\angle \mathrm{APB})=\sqrt{2}\sin(\angle \mathrm{AQB})$이고, 두 원 C_1, C_2의 넓이의 합이 9π일 때, r_1r_2의 값은? [2점]



① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{14}$ ③ 4 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

중요도	★★★★★	쪽 번	025 017	문항코드	20051-0047

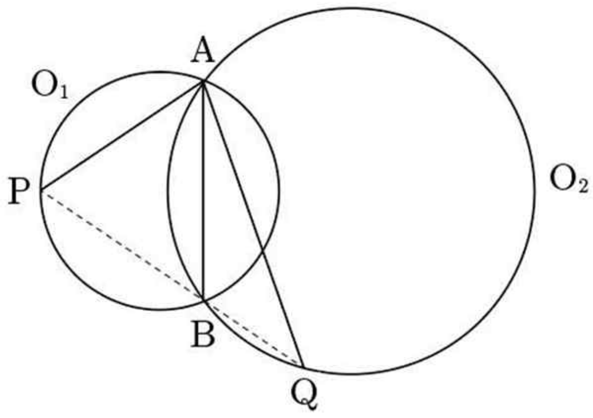
기대T Comment

Final 준비 관계로 수완 나형 파일에 한해서 Comment 미아핑이 찍힐 예정이다. 나형러들에게 미안하다 ㅠㅠ 하지만, 꼭 필요한 문제들에 대한 Comment는 적을 것이다. 바로 이 문제처럼.

올해 5월에 평가원에서 배포한 2022 수능 예비문항을 닮은 문항인데, 이는 2018 기대모의고사 문제와 상당히 흡사하다. 그 문제가 기대모 나형에서 난이도의 이유로 빠졌는데, 구경하고 가자. 상당히 어렵다는 것만 알자.

<기대모 미공개문항>

그림과 같이 지름의 길이가 각각 $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$인 두 원 O_1, O_2의 두 교점 A, B에 대하여 $\overline{AB}=\sqrt{2}$이다. 서로 다른 세 점 B, P, Q 가 한 직선 위에 있도록 원 O_1 위의 점 P와 원 O_2 위의 점 Q를 잡을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



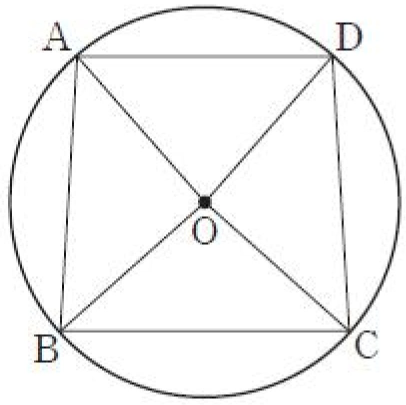
<보 기>

ㄱ. 두 점 P, Q의 위치에 상관없이 $\angle PAQ$는 일정하다.
ㄴ. $\overline{AB}\perp\overline{PQ}$이면 $\overline{PQ}=4$이다.
ㄷ. 삼각형 APQ의 넓이가 $\sqrt{2}$일 때, 삼각형 APQ의 외접원의 넓이는 2π이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

<해설은 다음 페이지에>

3. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 등변사다리꼴 ABCD가 있다. $\overline{AB}=\overline{CD}=2\sqrt{2}$, $\overline{AD}=\sqrt{7}$일 때, 삼각형 OBC의 외접원의 반지름의 길이는? [2점]



① $\frac{5\sqrt{7}}{14}$ ② $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ④ $\frac{4\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{7}}{14}$

중요도	★★★★	쪽번	026 018	문항코드	20051-0048

<해설>

정답 : ②

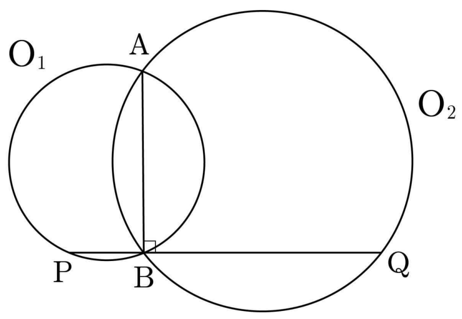
평가원의 ㄱㄴㄷ문제는 무조건 ㄱㄴㄷ 사이의 유기성이 있을 것을 기대하고 풀 것.
기대모의고사도 이러한 유기성을 기대하고 풀어도 좋다.

참고로 이 문제가 2022 수능 예비문항과 비슷하다고 생각할 수 있는데, 2018년 기대모의고사에서 출제한 벡터 문제를 수학1 문항으로 재구성한 것이다.

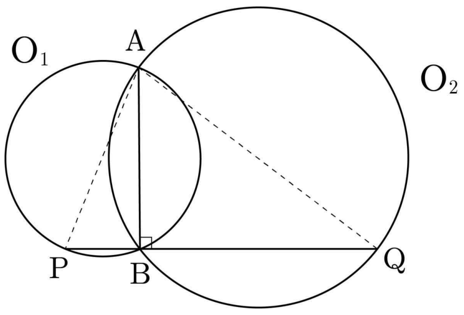
ㄱ.
$\angle$APB는 호 AB에 대한 원주각이다.
또한, $\angle$AQB도 호 AB에 대한 원주각이다.
따라서, $\angle$APB와 $\angle$AQB는 항상 일정하다.

삼각형 APQ의 내각의 크기의 합은 일정하므로,
자연스럽게 $\angle$PAQ도 일정하다. (참)
(즉, 어떻게 선분 PQ를 그어도 세 각의 구성이 같은 삼각형이 나옴을 알 수 있다. ㄷ을 풀기 위한 핵심 아이디어!)

ㄴ.
선분 AB에 선분 PQ가 수직인 상황을 생각해 보도록 하자.



점 B, P, Q는 일직선상에 있어야 하므로 다음과 같은 상황이다.



그런데 호 AP에 대한 원주각 $\angle$ABP는 직각이므로, 선분 AP는 원 O_1의 지름이다. 마찬가지로 선분 AQ도 원 O_2의 지름이다.

선분 PQ의 길이를 구하기 위해 선분 PB와 선분 BQ의 길이를 각각 구해보자.
선분 AP의 길이는 $\sqrt{3}$이고, 선분 AB의 길이는 $\sqrt{2}$이므로, 피타고라스 정리에 의하여 선분 PB의 길이는 1이다.
마찬가지 논리로 선분 AQ의 길이는 $\sqrt{11}$이고 선분 AB의 길이는 $\sqrt{2}$이므로, 피타고라스 정리에 의하여 선분 BQ의 길이는 3이다.

따라서, 선분 PQ의 길이는 $1+3=4$이다. (참)

ㄷ.
앞서 푼 ㄱ, ㄴ을 연관시켜 보도록 하자.
ㄱ에서 알 수 있는 사실은 $\angle$APB와 $\angle$AQP의 크기가 항상 일정하다는 점을 밝혔고, 이를 이용하여 특수한 상황이었던 ㄴ의 상황에서 점 P나 Q의 위치가 달라져도, 삼각형 APQ의 모양이 달라지지 않을 것이라는 것을 알 수 있다. (삼각형이 닮은 삼각형이기 때문에)

다시 말하면 넓이가 $\sqrt{2}$인 삼각형을 삼각형 K라 하고, 보기 ㄴ의 선분 AB와 선분 PQ가 수직일 때의 삼각형 APQ를 삼각형 T라 할 때, ㄱ. 보기에 의하여 삼각형 K와 삼각형 T는 AA 닮음이다.

따라서 닮음비의 제곱이 넓이비임을 이용하면 삼각형 T의 넓이는 $2\sqrt{2}$이므로 K, T의 넓이비는 $1:2$, 닮음비는 $1:\sqrt{2}$이다. 즉, 두 삼각형 K, T의 외접원의 넓이비 역시 $1:2$임을 알 수 있다.

이제 삼각형 T의 외접원의 넓이를 구한 후 나누기 2를 하여 정답을 구하자.

삼각형 T에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle \mathrm{PAQ})=\frac{3+11-16}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{11}}=-\frac{1}{\sqrt{33}}$$

에서

$$\sin(\angle \mathrm{PAQ})=\sqrt{1-\cos^2(\angle \mathrm{PAQ})}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{33}}\quad (\because \sin(\angle \mathrm{PAQ})>0)$$

이고, 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{4}{\sin(\angle \mathrm{PAQ})}=\sqrt{\frac{33}{2}},\ R=\frac{\sqrt{33}}{2\sqrt{2}}$$

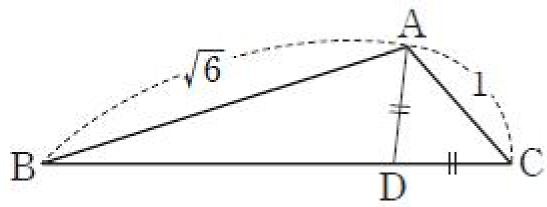
이다. 따라서 삼각형 T의 외접원의 넓이는 $\frac{33}{8}\pi$이고 이를 절반으로 나누면 $\frac{33}{16}\pi$가 삼각형 K의 외접원의 넓이가 된다. 따라서 ㄷ.은 (거짓)

4. 예각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=\sqrt{5}$, $\sin B=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

중요도	★★	쪽 번	026 019	문항코드	20051-0049

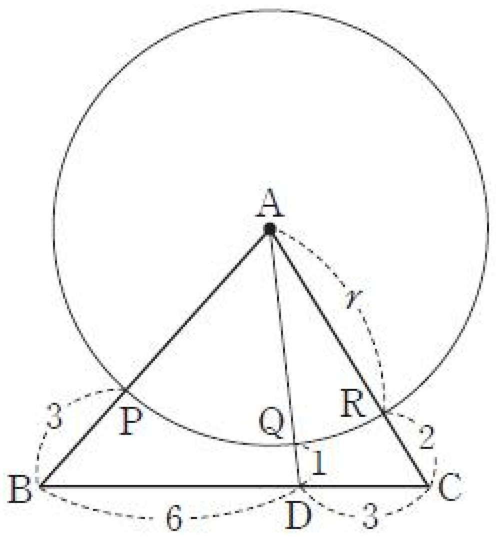
5. 그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{6}$, $\overline{AC}=1$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점을 D라 하자. $\overline{AD}=\overline{CD}$일 때, 선분 BC의 길이는? [3점]



① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ 3 ④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

중요도	★★★	쪽 번	026 020	문항코드	20051-0050

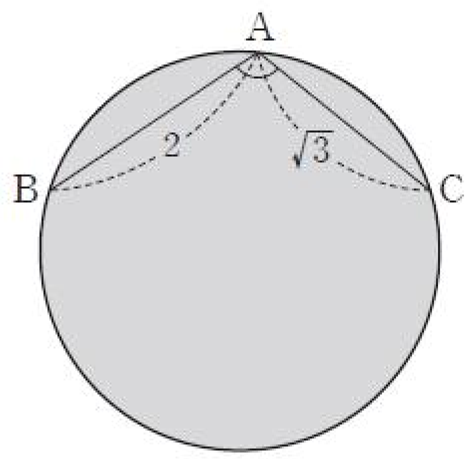
6. 그림과 같은 삼각형 ABC에서 선분 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{BD}=6$, $\overline{CD}=3$이다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 세 선분 AB, AD, AC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 할 때, $\overline{PB}=3$, $\overline{QD}=1$, $\overline{RC}=2$이다. r의 값은? [3점]



① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

중요도	★★★★	쪽 번	026 021	문항코드	20051-0051

7. 그림과 같이 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=\sqrt{3}$, $\cos(\angle\text{BAC})=-\frac{\sqrt{3}}{4}$일 때, 이 원의 넓이는? [3점]



① $\frac{32}{13}\pi$ ② $\frac{34}{13}\pi$ ③ $\frac{36}{13}\pi$ ④ $\frac{38}{13}\pi$ ⑤ $\frac{40}{13}\pi$

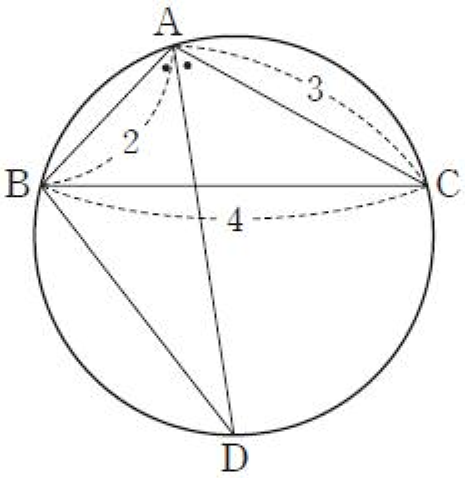
중요도	★★★	쪽 번	027 022	문항코드	20051-0005

8. 삼각형 ABC에서

$4\sin A=3\sin B=2\sin(A+B)$일 때, $\cos B=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

중요도	★★	쪽 번	027 023	문항코드	20051-0053

9. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=3$인 삼각형 ABC가 원에 내접하고 있다. 원 위의 한 점 D가 ∠BAD=∠DAC를 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]



<보 기>

ㄱ. $\cos(\angle BAC)=-\frac{1}{4}$

ㄴ. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{8\sqrt{15}}{15}$이다.

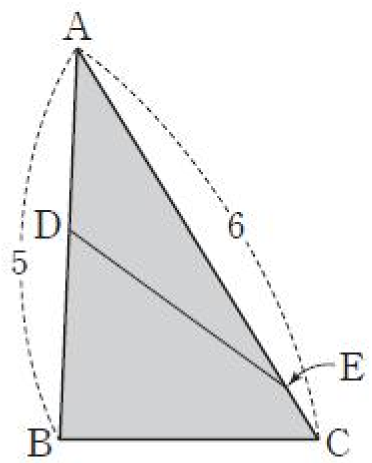
ㄷ. $\overline{BD}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★★	쪽 번	028 026	문항코드	20051-0056

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D, 선분 AC 위의 점 E가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [3점]

> (가) $\overline{AD}+\overline{AE}=8$
> (나) 삼각형 ADE의 넓이와 사각형 DBCE의 넓이는 같다.
> (다) $\overline{DE}=\sqrt{14}$



① $5\sqrt{3}$ ② 10 ③ $5\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $5\sqrt{7}$

중요도	★★★★	쪽 번	029 029	문항코드	20051-0059

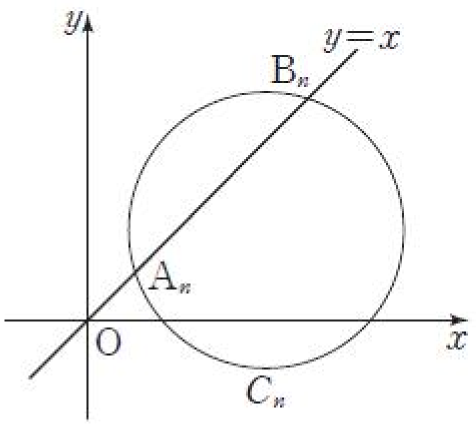
11. 첫째항이 모두 1이고 공차가 각각 l, m인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) l, m은 모두 0이 아닌 정수이다.
> (나) $|a_5|=|b_8|$, $|a_7|=|b_{11}|$

$|a_5|+|b_{11}|$의 값을 구하시오. [3점]

중요도	★★★★	쪽 번	032 003	문항코드	20051-0063

12. 좌표평면에서 모든 자연수 n에 대하여 직선 $y=x$와 원 $C_n : (x-2n)^2+(y-n)^2=2n(n+1)$은 서로 다른 두 점에서 만난다. 자연수 n에 대하여 직선 $y=x$와 원 C_n의 교점을 A_n, B_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{8}(\overline{OA_k}\times\overline{OB_k})$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [3점]



중요도	★★★	쪽 번	039 024	문항코드	20051-0084

기대T Comment
이번 6평 가형 20번에, 할선정리가 나왔었다. 중학교과정이니 나와도 무죄지만 '이건 너무한거 아니냐고 식빵~' 이라는 의견이 지배적이었다. 할선정리를 이용하면, $\overline{OA_k}\times\overline{OB_k}$의 값은 원이 x축과 만나는 두 점과 원점사이의 거리의 곱이 된다. $y=x$와 원을 연립하는 것 보다, $y=0$과 원을 연립하는게 훨씬 편하겠죠?

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2)f(x)}{x^3+x}=4$

(나) $\frac{f(2)}{2}=\frac{f(5)}{5}$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

중요도	★★★★★	쪽 번	051 017	문항코드	20051-0111

기대T Comment
(나) 조건에서, $\frac{f(2)}{2}=\frac{f(5)}{5}=a$ 라 하면 $f(x)-ax=(x-2)(x-5)(x-b)$로 둘 수 있다. (가)에서 $f(0)=0$임을 알 수 있으므로 $b=0$임을 알 수 있고, 이후는 흐름대로 풀면 된다.

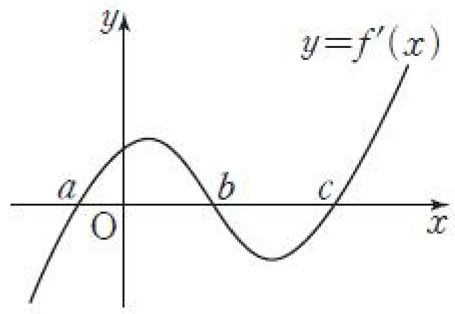
14. 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+3x-2$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

> 함수 $f(x)$는 열린구간 $(a, a+1)$에서 증가하다가 감소하거나 감소하다가 증가한다.

중요도	★★★★	쪽 번	066 018	문항코드	20051-0150

기대T Comment
표현이 어색할 수 있는데, 당황하지 말자.

15. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f'(a)=f'(b)=f'(c)=0$이고 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0, b]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 5이다.
> (나) 닫힌구간 $[0, c]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 7이다.
> (다) 닫힌구간 $[a, c]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 9이다.

$|f(c)-f(a)|$의 값을 구하시오. (단, $a<0<b<c$) [4점]

중요도	★★★★	쪽 번	069 028	문항코드	20051-0160

기대T Comment
재작년 EBS 공모에서 뽑힌 문항. 당시 반응이 좋았다. 어떻게 아냐고? 비밀이다 ㅎㅎ

16. 사차방정식 $x^4 - 4x^3 + 16 = 0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 n보다 클 때, 자연수 n의 최댓값을 구하시오. [4점]

중요도	★★★★	쪽 번	071 040	문항코드	20051-0172

기대T Comment
근과 계수의 관계를 오용하지 말 것. 네 근의 합은 알 수 있지만, 그 네 근이 모두 실수라는 보장은 없다.

17. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$ 중에서 $f(1)$의 값이 최소인 함수를 $g(x)$라 하자.

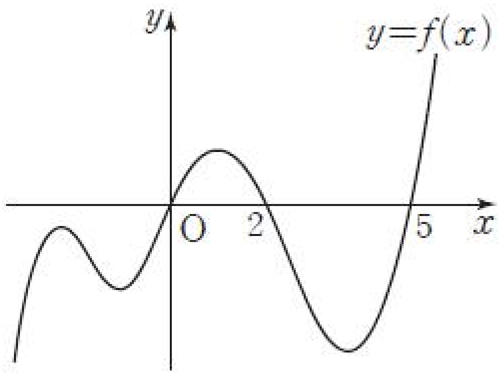
> (가) 함수 $y = f(x)$의 그래프는 원점을 지난다.
> (나) 방정식 $f'(x) = 0$의 서로 다른 두 실근의 차는 2이다.

방정식 $g(x) = a$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(a)$라 하자. $h(1) + h\left(\frac{1}{3}\right) + h(-1)$의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

중요도	★★★	쪽 번	071 042	문항코드	20051-0174

18. 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



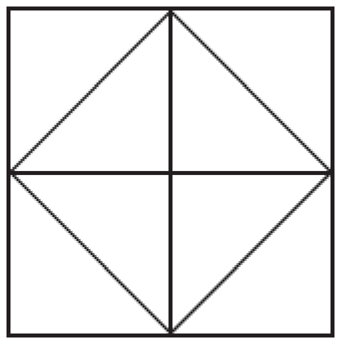
함수 $F(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, $x<0$, $x>5$일 때, $f(x)\neq 0$이고 $f(0)=f(2)=f(5)=0$이다.) [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이다.
(나) $F(2)-F(0)=4$, $F(5)-F(0)=-8$

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

중요도	★★★★	쪽 번	084 025	문항코드	20051-0205

19. 그림과 같이 8개의 합동인 직각이등변삼각형으로 이루어진 도형이 있다. 8개의 영역에 빨간색과 파란색을 포함한 서로 다른 8가지 색을 모두 사용하여 각 영역에 1가지 색만을 칠하려고 한다. 이때 빨간색을 칠한 도형과 파란색을 칠한 도형이 변을 공유하지 않도록 칠하는 경우의 수는 k×6!이다. k의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



중요도	★★	쪽 번	089 005	문항코드	20051-0218

20. 한 개의 주사위를 5번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5라 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 주사위의 눈이 나오는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) a_1은 4의 약수이다.
(나) $a_2 < a_1 \leq a_3$
(다) $a_4 < a_1 \leq a_5$

중요도	★★★★	쪽 번	090 007	문항코드	20051-0220

21. 다음 조건을 만족시키는 집합 X= {1, 2, 3, 4, 5 }에서 X로의 함수 f의 개수는? [4점]

(가) $f(1) \geq 4$
(나) $a \times f(a)$의 값이 홀수인 $a\,(a \in X)$가 존재한다.

① 1050 ② 1075 ③ 1100 ④ 1125 ⑤ 1150

중요도	★★★★	쪽 번	090 008	문항코드	20051-0221

22. 다음 조건을 만족시키는 네 자리의 자연수 N의 개수는? [3점]

(가) 각 자리의 수의 합은 11이다.
(나) 5로 나누어떨어지지 않는다.

① 191 ② 193 ③ 195 ④ 197 ⑤ 199

중요도	★★★★★	쪽 번	008 005	문항코드	20051-0005

23. 전체집합 U= {1, 2, 3}의 모든 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 부분집합을 택할 때, 택한 두 집합의 합집합이 집합 U와 같고 교집합이 공집합일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

중요도	★★★★★	쪽 번	100 003	문항코드	20051-0251

24. 주머니에 숫자 1, 2, 3이 각각 하나씩 적힌 공 3개와 문자 A, B가 각각 하나씩 적힌 공 2개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 공을 1개씩 모두 꺼내어 꺼낸 순서대로 왼쪽부터 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 공은 2가 적힌 공보다 왼쪽에 놓이고 3이 적힌 공은 2가 적힌 공보다 오른쪽에 놓이며, A가 적힌 공은 B가 적힌 공보다 왼쪽에 놓일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

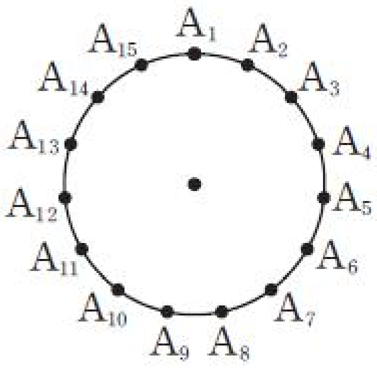
중요도	★★★	쪽 번	101 004	문항코드	20051-0252

25. 주머니에 흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

중요도	★★★	쪽 번	102 007	문항코드	20051-0255

26. 그림과 같이 원 둘레에 15개의 점 A_1, A_2, $\cdots$, A_{15}가 일정한 간격으로 있다. 이 15개의 점에서 임의로 3개를 동시에 선택할 때, 선택한 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 내부에 원의 중심이 존재할 확률은? [4점]



중요도	★★★	쪽 번	103 012	문항코드	20051-0260

27. 확률변수 X가 이항분포 $B\left(n,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르고 $\frac{P(X=1)}{P(X=2)}=\frac{1}{3}$ 일 때, n의 값을 구하시오. (단, $n\geq2$) [4점]

중요도	★★★	쪽 번	118 014	문항코드	20051-0301

28. 이산확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이고

$P(X=r)={}_3C_r\times\frac{2^r}{27}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ 이 성립한다. $E(3X^2)$의 값을 구하시오. [4점]

중요도	★★★★	쪽 번	118 017	문항코드	20051-0304

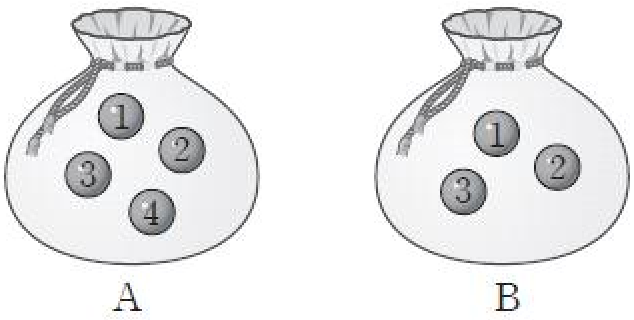
29. 전구 2개와 스위치 1개가 있다. 모든 전구가 꺼져 있는 상태에서 스위치를 한 번 누르면 전구 1개가 켜고 한 번 더 누르면 나머지 1개의 전구도 켜지며 한 번 더 누르면 모든 전구가 꺼진다고 한다. 주사위 한 개를 던질 때마다 다음과 같은 시행을 한다.

> 모든 전구를 끈 상태에서 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 k(k=1, 2, 3, 4, 5, 6)이면 스위치를 k번 누르고 마지막에 켜져 있는 전구의 개수를 조사한다.

이와 같은 시행을 10회 반복하였을 때, 2개의 전구가 모두 켜진 결과가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $V(X)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

중요도	★★	쪽 번	118 018	문항코드	20051-0305

30. 주머니 A에는 1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 1, 2, 3의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 동시에 2개의 공을 꺼내고, 나머지 주머니에서 1개의 공을 꺼낸다. 처음 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 나중에 꺼낸 1개의 공에 적힌 수와 같을 때, 나중에 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 2일 확률은? [4점]



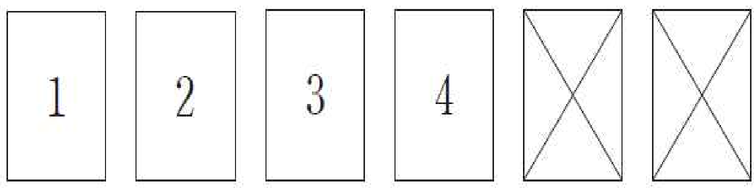
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

중요도	★★★★	쪽 번	134 018	문항코드	20051-0344

31. 10 이하의 자연수 n에 대하여 주머니에 1부터 $3n$까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 $3n$개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼냈을 때, 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

중요도	★★★★	쪽 번	137 028	문항코드	20051-0354

32. 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 한 면에만 각각 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 숫자가 적혀 있는 면을 앞면, 적혀 있지 않은 면을 뒷면이라 할 때, 그림과 같이 1, 2, 3, 4의 숫자가 적혀 있는 카드는 앞면, 5, 6의 숫자가 적혀 있는 카드는 뒷면이 보이게 놓여있다. 이 6장의 카드 중에서 1장의 카드를 임의로 택하여 한 번 뒤집는 시행을 반복한다. 6장의 카드가 모두 앞면이거나 모두 뒷면인 사건을 A라 하자. 이 시행을 4번 반복할 때, 네 번째 시행에서 처음으로 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



중요도	★★★★	쪽 번	137 029	문항코드	20051-0355

33. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 양의 실수 α에 대하여 $f(\alpha)=0$이다.
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다

실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_t^x f(s)ds$라 하고, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$의 치역의 모든 원소의 합을 S, 함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수를 m이라 할 때, $S+m$의 값을 구하시오. [4점]

중요도	★★★	쪽 번	137 030	문항코드	20051-0365

34. 사차함수 f(x)의 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)=f'(b)=f'(c)=0$
(나) $f'(p)>0$, $f'(2)<0$, $f'(6)>0$, $f'(11)<0$
(다) $\int_p^2 f'(x)dx=\int_2^6 f'(x)dx=\int_6^{11} f'(x)dx=0$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

(단, $p<0<a<2<b<6<c<11$)

<보 기>

ㄱ. $f(a)>f(p)$
ㄴ. $f(p)=0$이면 $f(a)f(b)f(c)<0$이다.
ㄷ. $f(p)=0$이고 $f(3)=f(5)$이면 부등식 $f(x)>0$을 만족시키는 모든 정수 x의 합은 32이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★	쪽 번	143 020	문항코드	20051-0376

35. 두 함수 $f(x)=2(x+1)(x-3)$, $g(x)=x(x^2-3)$에 대하여 함수 $\sum_{k=1}^{10}|f(x)-kg(x)|$가 $x=l$에서 미분가능하지 않은 모든 실수 l의 개수는? [4점]

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

중요도	★★★★★ ★★★★★ ★★★★★	쪽 번	143 021	문항코드	20051-0377

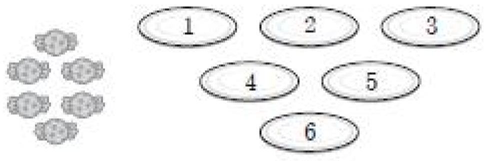
36. 두 실수 a, b에 대하여 $8^a = 9^b$, $\log_6 2^a + \log_6 3^b = 10$ 일 때, $\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} = \frac{1}{p}$이다. p의 값을 구하시오. [4점]

중요도	★★★	쪽 번	145 027	문항코드	20051-0383

37. 각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자가 있다. 이 정사면체 모양의 상자를 96회 던질 때, 3이 적혀 있는 면이 바닥에 놓인 횟수가 k (k=0, 1, 2, ⋯, 96)일 확률을 $P(k)$라 하자. $\sum_{k=0}^{96}(k+1)(k+2)P(k)$의 값을 구하시오. [4점]

중요도	★★★	쪽 번	145 028	문항코드	20051-0384

38. 같은 종류의 사탕 6개를 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 6개의 빈 접시에 남김없이 나누어 담으려고 한다. 사탕이 담겨진 접시에 적힌 수의 합이 7 이상 17 이하가 되도록 사탕을 접시에 나누어 담는 경우의 수를 구하시오. (단, 사탕을 하나도 담지 않은 접시가 있을 수 있다.) [4점]



중요도	★★★	쪽번	145 029	문항코드	20051-0385

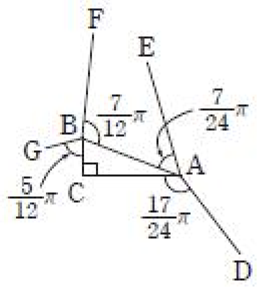
39. 그림과 같이 $\angle C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC와 두 꼭짓점 A, B에서 그은 네 선분 AD, AE, BF, BG가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}=\overline{AE}=\overline{BF}$, $\overline{BC}=\overline{BG}$, $\overline{AC}=\overline{AD}$

(나) $\angle BAE=\frac{7}{24}\pi$, $\angle DAC=\frac{17}{24}\pi$, $\angle FBA=\frac{7}{12}\pi$,

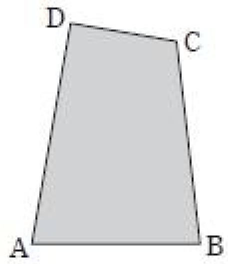
$\angle CBG=\frac{5}{12}\pi$

$\overline{FG}^2+\overline{DE}^2=720$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, 모든 점은 한 평면 위에 있다.) [4점]



중요도	★★★	쪽번	145 030	문항코드	20051-0386

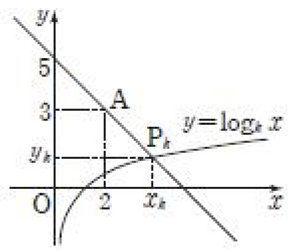
40. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=4$, $\angle C=120^\circ$ 인 사각형 ABCD가 있다. $\cos A=\frac{1}{6}$, $\overline{BC}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\sqrt{35}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
② $\sqrt{35}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$
③ $2\sqrt{35}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $2\sqrt{35}+\sqrt{3}$
⑤ $2\sqrt{35}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

중요도	★★★	쪽 번	150 017	문항코드	20051-0403

41. 그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 점 A(2, 3)을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_k x$와 만나는 점을 $P_k(x_k, y_k)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $x_4=4$
ㄴ. $1\le y_k\le 2$를 만족시키는 실수 k의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.
ㄷ. $\overline{AP_k}=\frac{7}{5}$을 만족시키는 1보다 큰 실수 k의 개수는 2이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★★★	쪽 번	151 020	문항코드	20051-0406

42. 주머니 A에는 1, 2, 3의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 구슬이 들어 있고, 주머니 B에는 2, 3, 4의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 3개의 구슬이 들어 있다. 갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서 각자 구슬을 임의로 한 개씩 꺼내어 두 구슬에 적혀 있는 숫자를 비교하는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 다르고, 두 번째 시행에서 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 같을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않으며 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

중요도	★★★★	쪽 번	152 028	문항코드	20051-0414

43. 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 $A_t=\{x \mid |x-t|=f(x)+t,\ x\text{는 실수}\}$의 원소의 개수를 $g(t)$라 할 때, 집합 A_t와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

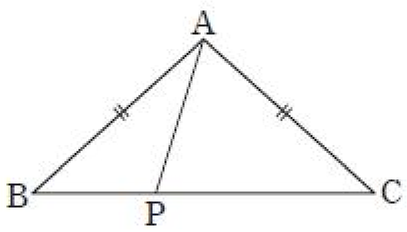
(가) $A_{\frac{1}{3}}=\{0,\ a,\ 2\}$, $A_{\frac{5}{12}}=\{0,\ b,\ c\}$ (단, $0<a<b<2<c$)
(나) 방정식 $g(t)-3=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\int_{a+\frac{1}{2}}^{c+\frac{1}{2}}\{f(x)+x\}dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

중요도	★★★★★	쪽 번	153 030	문항코드	20051-0416

44. $\overline{AB}=\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

> 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여
> $$\frac{\overline{BP}}{\sin(\angle BAP)}+\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)}$$ 는 $\overline{AP}=4$일 때 최솟값 12를 갖는다.



ab의 값은? (단, 점 P는 두 점 B, C가 아니고, a, b는 상수이다.) [4점]

① $16\sqrt{5}$ ② $18\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{5}$ ④ $22\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{5}$

중요도	★★★★★ ★★★★★	쪽 번	159 019	문항코드	20051-0435

45. $\alpha<a<\beta$인 실수 a에 대하여

함수 $f(x)=x^3-3(a+1)x^2+12ax-3a-5$가 다음 조건을 만족시킨다. [4점]

> (가) 함수 $f(x)$는 극솟값 p를 가지고, $p<0$이다.
> (나) $\lim\limits_{x\to k+}\frac{|f(x)|-|f(k)|}{x-k}\neq\lim\limits_{x\to k-}\frac{|f(x)|-|f(k)|}{x-k}$를 만족시키는 실수 k의 개수는 1이다.

α의 최솟값을 m, β의 최댓값을 M이라 할 때, M+m의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

중요도	★★★★★	쪽 번	159 021	문항코드	20051-0437

46. 집합 X= {1, 2, 3, 4, 5}에 대하여 X에서 X로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(x)=5$인 집합 X의 원소 x가 존재한다.

(나) $\sum_{k=1}^{5} f(k)=14$

중요도	★★★★★	쪽 번	161 029	문항코드	20051-0445

47. 최고차항의 계수가 양수이고, $f(3)<0$, $f'(0)=-28$삼차

함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ -f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 집합

$$A=\left\{x \,\middle|\, \left|\int_{2}^{x} g(t)dt\right|=144,\ x\text{는 실수}\right\}$$

에 대하여 $3\in A$, $n(A)=7$일 때, $|f'(1)|$의 값을 구하시오 [4점]

중요도	★★★★★	쪽 번	161 030	문항코드	20051-0446

48. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에 대하여 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 $g(x)=f(|x|)$, $h(x)=|f(x)|$이다. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 갖는 실수 α의 개수를 m, 함수 $h(x)$가 $x=b$에서 극값을 갖는 실수 b의 개수를 n이라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $1\le m\le 5$

ㄴ. n의 값은 2도 아니고 4도 아니다.

ㄷ. $b=0$, $m+n=4$일 때, $a>0$이고 cz의 값의 범위는 $c\ge 0$ 또는 $c\le -\frac{4}{27}a^3$이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★	쪽 번	167 020	문항코드	20051-0466

49. 두 함수 $f(x)=x^2-1$, $g(x)=xf(x)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $h(x)$의 개수는? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$\{h(x)-f(x)\}\{h(x)-g(x)\}=0$이다.
(나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(다) 함수 $h(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a가 존재한다.

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

중요도	★★★★★	쪽 번	167 021	문항코드	20051-0467

50. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{S_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $S_1 = 1,\ S_2 = 3,\ S_{10} = 10,\ S_{12} = 13$
> (나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+2} - a_k}{a_k a_{k+2}} = -\frac{5}{2}$

$100 \times a_{11} \times a_{12}$의 값을 구하시오. [4점]

중요도	★★★★★	쪽 번	168 027	문항코드	20051-0473

정답과 해설

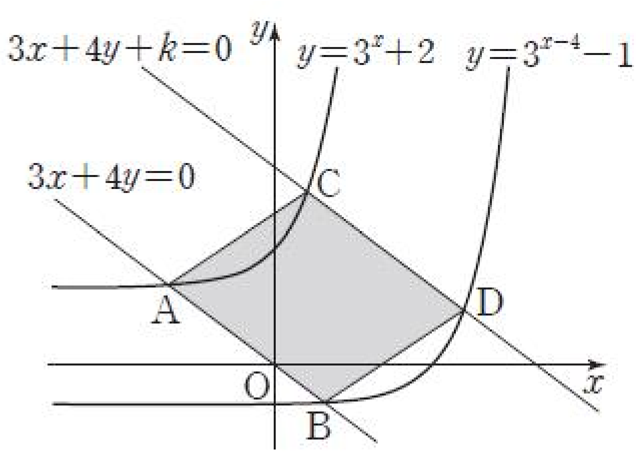
1)

[정답/모범답안]

2

[해설]

곡선 $y=3^{x-4}-1$은 곡선 $y=3^x+2$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=3^x+2$ 위의 점 (a, b)를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점 $(a+4, b-3)$은 곡선 $y=3^{x-4}-1$ 위의 점이다.
이 두 점 (a, b), $(a+4, b-3)$을 지나는 직선의 기울기가 $\frac{(b-3)-b}{(a+4)-a}=-\frac{3}{4}$이고, 두 직선 $3x+4y=0$, $3x+4y+k=0$의 기울기도 모두 $-\frac{3}{4}$이므로 그림과 같이 직선 $3x+4y=0$이 두 곡선 $y=3^x+2$, $y=3^{x-4}-1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $3x+4y+k=0$이 두 곡선 $y=3^x+2$, $y=3^{x-4}-1$과 만나는 점을 각각 C, D라 하면 두 점 A, C를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점이 각각 두 점 B, D와 같다.



그러므로 $\overline{AB}=\overline{CD}=5$이고, 곡선 $y=3^x+2$ 중 두 점 A, C를 이은 부분을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 곡선 $y=3^{x-4}-1$ 중 두 점 B, D를 이은 부분과 같다.
따라서 두 곡선 $y=3^x+2$, $y=3^{x-4}-1$과 두 직선 $3x+4y=0$, $3x+4y+k=0$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 평행사변형 ABDC의 넓이와 같다.
선분 AB를 밑변으로 하는 평행사변형 ABDC의 높이는 직선 $3x+4y=0$ 위의 점 (0, 0)과 직선 $3x+4y+k=0$ 사이의 거리와 같고 $k<0$이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{-k}{5}$

이때 $\overline{AB}=5$이고, 평행사변형 ABDC의 넓이가 20이므로 평행사변형 ABDC의 높이는 4이다.
따라서 $-\frac{k}{5}=4$이므로 $k=-20$

2)

[정답/모범답안]

4

[해설]

삼각형 APB에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle APB)}=2r_1$ …… ㉠

삼각형 ABQ에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle AQB)}=2r_2$ …… ㉡

$\sin(\angle APB)=2\sin(\angle AQB)$이므로 ㉠, ㉡에서 $\sqrt{2}r_1=r_2$
두 원의 넓이의 합이 9π이므로
$9\pi=\pi{r_1}^2+\pi{r_2}^2=\pi{r_1}^2+\pi\left(\sqrt{2}r_1\right)^2=3\pi{r_1}^2$
즉, ${r_1}^2=3$이므로 $r_1=\sqrt{3}$, $r_2=\sqrt{6}$
따라서 $r_1r_2=\sqrt{3}\times\sqrt{6}=3\sqrt{2}$

3)

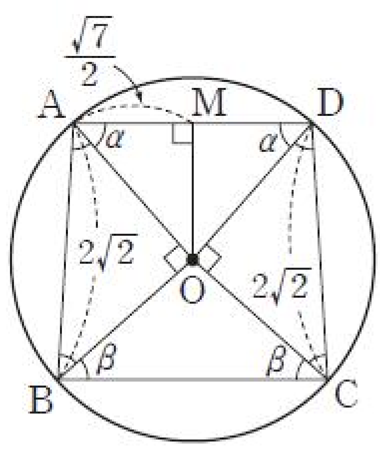
4)

[정답/모범답안]

4

[해설]

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=2$, $\overline{AB}=\overline{CD}=2\sqrt{2}$이므로
$\angle AOB=\angle COD=90^\circ$이고
$\angle OAB=\angle OBA=\angle ODC=\angle OCD=45^\circ$



그림과 같이 ∠OAD=∠ODA=α, ∠OBC=∠OCB=β라 하면 사각형 ABCD의 내각의 크기의 합은 360 °이므로
$2\alpha+2\beta+4\times45^\circ=360^\circ$, 즉 $\alpha+\beta=90^\circ$

한편, 선분 AD의 중점을 M이라 하면 $\overline{AM}=\frac{\sqrt{7}}{2}$이고 삼각형 OAD는 이등변삼각형이므로 ∠OMA=90 °이다.

즉, $\cos\alpha=\frac{\overline{AM}}{\overline{OA}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\beta=90^\circ-\alpha$이므로 $\sin\beta=\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$

즉, 삼각형 OBC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의해

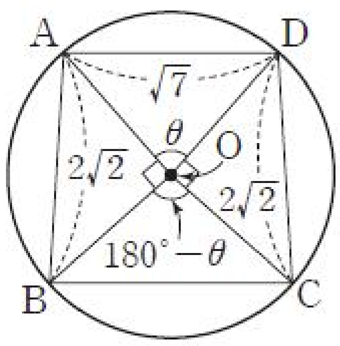
$\frac{\overline{OC}}{\sin\beta}=\frac{2}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=2R$

따라서 $R=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$

{다른 풀이}

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=2$, $\overline{AB}=\overline{CD}=2\sqrt{2}$이므로

$\angle AOB=\angle COD=90^\circ$이다.



∠AOD=θ라 하면 삼각형 AOD에서 코사인법칙에 의해

$\cos\theta=\frac{2^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\times2\times2}=\frac{1}{8}$ …… ㉠

즉, $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta=-\frac{1}{8}$이고 삼각형 OBC에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BC}^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos(180^\circ-\theta)$

$=8-8\times\left(-\frac{1}{8}\right)=9$

이므로 $\overline{BC}=3$

한편, ㉠에서 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$이므로

삼각형 OBC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의해

$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{3}{\sin\theta}=\frac{3}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$

따라서 $R=\frac{4\sqrt{7}}{7}$

5)

[정답/모범답안]

4

[해설]

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로

$\cos B=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$

$=8+5-2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}$

$=9$

따라서 $\overline{AC}=3$

6)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$\overline{AD}=\overline{CD}=a$라 하면 $\overline{BC}=4a$이다.

삼각형 ADC는 이등변삼각형이므로

$\cos(\angle ACD)=\frac{\frac{1}{2}}{a}=\frac{1}{2a}$ …… ㉠

한편 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$\cos(\angle ACD)=\frac{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{BC}}$

$=\frac{1^2+(4a)^2-(\sqrt{6})^2}{2\times1\times4a}=\frac{16a^2-5}{8a}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{2a}=\frac{16a^2-5}{8a}$

$a>0$이므로 $a=\frac{3}{4}$

따라서 $\overline{BC}=4a=3$

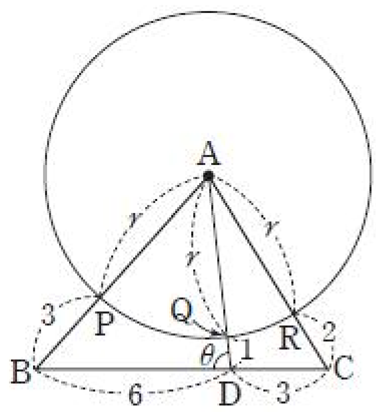
7)

[정답/모범답안]

4

[해설]

$\overline{AP}=\overline{AQ}=\overline{AR}=r$이고, $\angle ADB=\theta$라 하면 $\angle ADC=180^\circ-\theta$이다.



삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$\cos\theta=\frac{\overline{BD}^2+\overline{AD}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{BD}\times\overline{AD}}$

$=\frac{6^2+(r+1)^2-(r+3)^2}{2\times6\times(r+1)}$

$= \frac{7-r}{3(r+1)}$ …… ㉠
삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의해
$\cos(180-\theta°) = \frac{\overline{DC}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{DC} \times \overline{AD}}$
$= \frac{3^2 + (r+1)^2 - (r+2)^2}{2 \times 3 \times (r+1)}$
$= \frac{3-r}{3(r+1)}$
즉, $\cos\theta = \frac{r-3}{3(r+1)}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $7-r = r-3$
따라서 $r=5$

8)
[정답/모범답안]
5

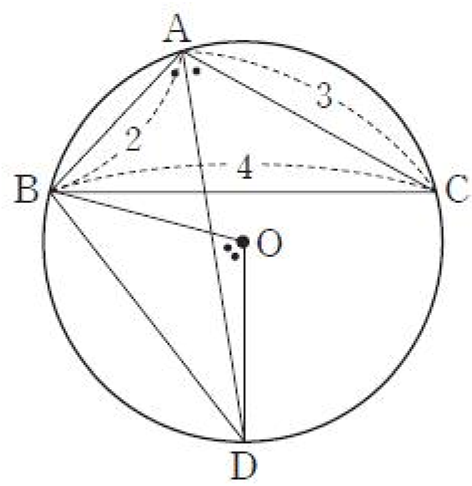
[해설]
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해
$\overline{BC}^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 10$
이므로 $\overline{BC} = \sqrt{10}$
원의 반지름의 길이를 R라 하면
$\sin(\angle BAC) = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$이므로
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해
$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 2R, \ \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{13}}{4}} = 2R, \ R = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{13}}$
따라서 원의 넓이는
$\pi \times \left(\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{40}{13}\pi$

9)
[정답/모범답안]
65

[해설]
삼각형 ABC에서 A+B+C=180°이므로 A+B=180°−C
즉, sin(A+B)=sin(180°−C)=sin C
이때 $4\sin A = 3\sin B = 2\sin(A+B)$에서
$4\sin A = 3\sin B = 2\sin C$이므로
$\frac{3}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{6}{\sin C}$ …… ㉠
한편, 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$라 할 때, 사인법칙에 의해
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $a : b : c = 3 : 4 : 6$이므로 양수 k에 대하여
$a = 3k$, $b = 4k$, $c = 6k$이다.
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해
$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(6k)^2 + (3k)^2 - (4k)^2}{2 \times 6k \times 3k}$
$= \frac{29k^2}{36k^2} = \frac{29}{36}$
따라서 $p+q = 36+29 = 65$
{참고}
문제의 조건을 만족시키는 삼각형으로는 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{CA} = 4$인 삼각형 ABC가 있다.

10)
[정답/모범답안]
5

[해설]
ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해
$\cos(\angle BAC) = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 3} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$ (참)
ㄴ. ㄱ에서 $\cos(\angle BAC) = -\frac{1}{4}$이므로
$\sin(\angle BAC) = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의해
$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 2R, \ \frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = 2R, \ R = \frac{8\sqrt{15}}{15}$ (참)
ㄷ. 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하자.



원주각과 중심각의 관계에 의해 ∠BOD=2∠BAD이므로
∠BOD=∠BAC
즉, $\cos(\angle BOD) = -\frac{1}{4}$
ㄴ에서 $\overline{OB} = \overline{OD} = \frac{8\sqrt{15}}{15}$이므로 삼각형 OBD에서 코사인법칙에 의해
$\overline{BD}^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{15}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{15}}{15}\right)^2 - 2 \times \frac{8\sqrt{15}}{15} \times \frac{8\sqrt{15}}{15} \times \left(-\frac{1}{4}\right)$
$= \frac{64}{15} + \frac{64}{15} + \frac{32}{15} = \frac{160}{15} = \frac{32}{3}$
따라서 $\overline{BD} = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$\overline{AD}=a$, $\overline{AE}=b$, $\angle BAC=\theta$라 하자.

조건 (가)에서 $a+b=8$

조건 (나)에서 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ADE의 넓이의 2배 이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\theta=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\sin\theta\right)$

$15\sin\theta = ab\sin\theta$, $ab=15$

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의해

$\overline{DE}^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

$=(a+b)^2-2ab-2ab\cos\theta$

조건 (다)에서 $\overline{DE}^2=14$이므로

$14=8^2-30-30\cos\theta$, $\cos\theta=\frac{2}{3}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{\sqrt{5}}{3}=5\sqrt{5}$

12)

[정답/모범답안]

32

[해설]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항이 모두 1이고, l, m은 각각 0이 아닌 정수이므로 $l\neq0$, $m\neq0$이다.

(ⅰ) l, m의 부호가 같은 경우

a_5와 b_8의 부호가 같으므로 $1+4l=1+7m$ …… ㉠

a_7과 b_{11}의 부호가 같으므로 $1+6l=1+10m$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 0이 아닌 정수 l, m은 존재하지 않는다.

(ⅱ) l, m의 부호가 서로 반대인 경우

a_5와 b_8의 부호가 서로 반대이므로

$1+4l=-1-7m$ …… ㉢

a_7과 b_{11}의 부호가 서로 반대이므로

$1+6l=-1-10m$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $l=3$, $m=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $l=3$, $m=-2$이므로

$|a_5|+|b_{11}|=|1+4\times3|+|1+10\times(-2)|$

=13+19

=32

13)

[정답/모범답안]

540

[해설]

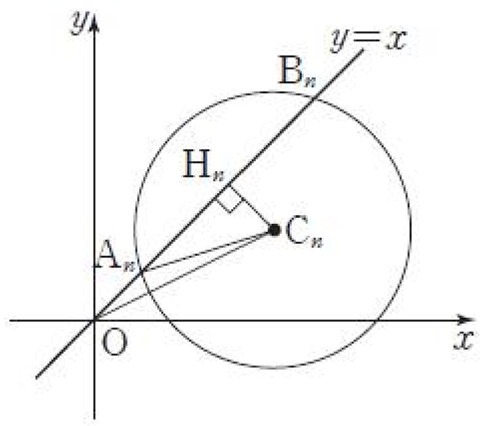
원 $(x-2n)^2+(y-n)^2=2n(n+1)$의 중심을 $C_n(2n,n)$이라 하자.

$\overline{OC_n}=\sqrt{(2n)^2+n^2}=\sqrt{5}n$이고 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2n(n+1)}$이다. 이때 자연수 n에 대하여

$5n^2-2n(n+1)=3n^2-2n=n(3n-2)>0$이므로

$\sqrt{5}n>\sqrt{2n(n+1)}$이다.

즉, 점 O는 원의 외부에 있다.



그림과 같이 점 C_n에서 직선 $y=x$, 즉 직선 $x-y=0$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면

$\overline{C_nH_n}=\frac{|2n-n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{n}{\sqrt{2}}$

$\overline{A_nH_n}=\overline{B_nH_n}=\sqrt{2n(n+1)-\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}n^2+2n}$

또한 삼각형 OC_nH_n에서

$\overline{OH_n}=\sqrt{\overline{OC_n}^2-\overline{C_nH_n}^2}=\sqrt{\{(2n)^2+n^2\}-\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}n$

이므로

$\overline{OA_n}\times\overline{OB_n}=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}n-\sqrt{\frac{3}{2}n^2+2n}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{2}}n+\sqrt{\frac{3}{2}n^2+2n}\right)$

$=\frac{9}{2}n^2-\left(\frac{3}{2}n^2+2n\right)$

$=3n^2-2n$

따라서

$\sum_{k=1}^{8}\left(\overline{OA_k}\times\overline{OB_k}\right)=\sum_{k=1}^{8}(3k^2-2k)$

$=3\sum_{k=1}^{8}k^2-2\sum_{k=1}^{8}k$

$=3\times\frac{8\times9\times17}{6}-2\times\frac{8\times9}{2}$

$=612-72=540$

{다른 풀이}

두 식 $(x-2n)^2+(y-n)^2=2n(n+1)$, $y=x$를 연립하여 정리하면

$2x^2-6nx+n(3n-2)=0$㉠

㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9n^2-2\times n(3n-2)$

$=3n^2+4n>0$

이므로 ㉠은 항상 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는다.

㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3n>0$

$\alpha\beta=\frac{n(3n-2)}{2}>0$이므로 $\alpha>0$, $\beta>0$이다.

$A_n(\alpha, \alpha)$, $B_n(\beta, \beta)$에서

$\overline{OA_n} = \sqrt{(\alpha-0)^2+(\alpha-0)^2} = \sqrt{2}|\alpha| = \sqrt{2}\alpha$

$\overline{OB_n} = \sqrt{(\beta-0)^2+(\beta-0)^2} = \sqrt{2}|\beta| = \sqrt{2}\beta$

이므로 $\overline{OA_n} \times \overline{OB_n} = 2\alpha\beta = n(3n-2) = 3n^2-2n$

따라서

$$\sum_{k=1}^{8}\left(\overline{OA_k} \times \overline{OB_k}\right) = \sum_{k=1}^{8}(3k^2-2k)$$

$$= 3\sum_{k=1}^{8}k^2 - 2\sum_{k=1}^{8}k$$

$$= 3 \times \frac{8\times9\times17}{6} - 2\times\frac{8\times9}{2}$$

$$= 612-72 = 540$$

14)

[정답/모범답안]

4

[해설]

조건 (가)에서 $x \to 0$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $2f(0)=0$에서 $f(0)=0$이므로 $f(x)$는 x를 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2+2)f(x)}{x^3+x} = \lim_{x\to0}\frac{(x^2+2)\{x(x^2+ax+b)\}}{x(x^2+1)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(x^2+2)(x^2+ax+b)}{x^2+1} = 2b$$

이므로 $2b=4$에서 $b=2$

$f(x)=x(x^2+ax+2)$이므로 조건 (나)에서

$$\frac{2(6+2a)}{2} = \frac{5(27+5a)}{5}$$

$3a=-21$, $a=-7$

따라서 $f(x)=x(x^2-7x+2)$이므로

$f(1)=1\times(1-7+2)=-4$

{참고}

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$라 하면 $g(x)=x^2+ax+b$이고

조건 (나)에서 $g(2)=g(5)$이므로 이차함수 $g(x)$의 그래프의 대칭축은 $x=\dfrac{2+5}{2}=\dfrac{7}{2}$이다.

즉, $-\dfrac{a}{2}=\dfrac{7}{2}$에서 $a=-7$

15)

[정답/모범답안]

2

[해설]

$f'(x)=x^3-3x^2+3$

$g(x)=x^3-3x^2+3$이라 하면

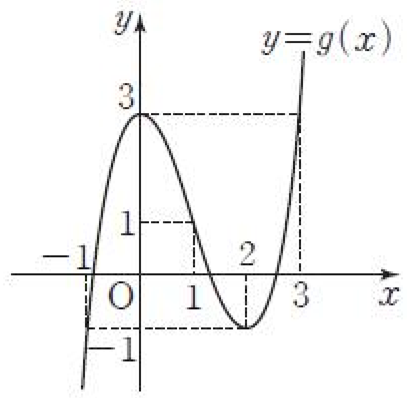
$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	3	↘	-1	↗

이때 $g(3)=3$이고, $g(1)=1$, $g(-1)=-1$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $g(x)$의 값의 부호가 열린구간 (-1, 0), (1, 2), (2, 3)에서 바뀌므로 구하는 모든 정수 a의 값의 합은 $-1+1+2=2$

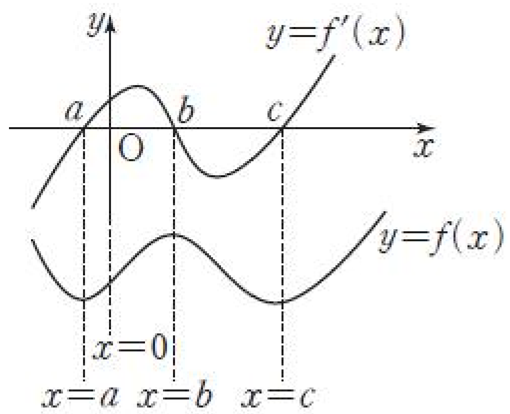
16)

[정답/모범답안]

2

[해설]

함수 $y=f'(x)$의 그래프로부터 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



조건 (가)에 의해 닫힌구간 [0, b]에서 최댓값은 $f(b)$, 최솟값은 $f(0)$이므로

$f(b)-f(0)=5$ …… ㉠

조건 (나)에 의해 닫힌구간 [0, c]에서 최댓값은 $f(b)$, 최솟값은 $f(0)$, $f(c)$ 중 작은 값이다.

$f(0)\le f(c)$이면 $f(b)-f(0)=7$ (㉠에 모순)

따라서 $f(0)>f(c)$이고, $f(b)-f(c)=7$ …… ㉡

조건 (다)에 의해 닫힌구간 [a, c]에서 최댓값은 $f(b)$, 최솟값은 $f(a)$, $f(c)$ 중 작은 값이다.

$f(a)\ge f(c)$이면 $f(b)-f(c)=9$ (㉡에 모순)

따라서 $f(a)<f(c)$이고, $f(b)-f(a)=9$ …… ㉢

㉢-㉡을 하면 $f(c)-f(a)=9-7=2$

따라서 $|f(c)-f(a)|=2$

17)

[정답/모범답안]

5

[해설]

$f(x)=x^4-4x^3+16$이라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이다.

$f(0)=-16$, $f(3)=-11$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $0<x<3$일 때와 $x>3$일 때 x축과 만난다. 즉, 방정식 $x^4-4x^3+16=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

그런데 $f(2)=0$이고 $f(3)=-11<0$, $f(4)=16>0$

이므로 한 근은 2이고 다른 한 근은 3과 4 사이에 있다.

그러므로 방정식 $x^4-4x^3+16=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은 5와 6 사이의 값이다.

따라서 구하는 자연수 n의 최댓값은 5이다.

18)

[정답/모범답안]

1

[해설]

최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$이고 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+px^2+qx$ (p, q는 상수)라 하자.

조건 (나)에 의하여 $f'(x)=x^2+2px+q=0$을 만족시키는 서로 다른 두 실근을 α, $\alpha+2$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\alpha+2=-2p$, $\alpha(\alpha+2)=q$

즉, $a+1=-p$ …… ㉠

$\alpha^2+2\alpha=q$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha=-p-1$이므로 이 식을 ㉡에 대입하면

$(-p-1)^2+2(-p-1)=q$

즉, $p^2-1=q$ …… ㉢

$f(1)=\frac{1}{3}+p+q=\frac{1}{3}+p+(p^2-1)$

$=p^2+p-\frac{2}{3}$

$=\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{11}{12}$

$f(1)$의 값은 $p=-\frac{1}{2}$일 때 최소이므로 ㉢에서 $q=-\frac{3}{4}$

$g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x$

$g'(x)=x^2-x-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(4x^2-4x-3)$

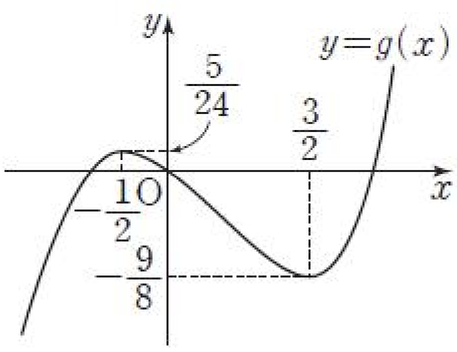
$=\frac{1}{4}(2x+1)(2x-3)=0$

에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$\frac{5}{24}$	↘	$-\frac{9}{8}$	↗

그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $g(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 개수이므로

$h(1)+h\left(\frac{1}{3}\right)+h(-1)=1+1+3=5$

19)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$F(2)-F(0)=4$ …… ㉠

$F(5)-F(0)=-8$ …… ㉡

㉡-㉠을 하면 $F(5)-F(2)=-12$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^5 |f(x)|dx=\int_0^2 f(x)dx-\int_2^5 f(x)dx$

$=[F(x)]_0^2-[F(x)]_2^5$

$=F(2)-F(0)-\{F(5)-F(2)\}$

$=4-(-12)=16$

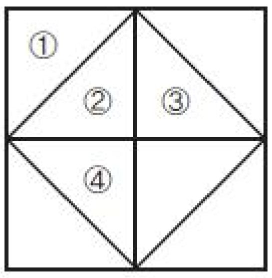
20)

[정답/모범답안]

10

[해설]

그림과 같이 8개의 영역의 일부에 번호를 부여하자.



빨간색과 파란색을 서로 이웃하지 않게 칠하는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 빨간색을 ①번 영역에 칠하는 경우

파란색은 ①번, ②번을 제외한 나머지 영역에 칠할 수 있으므로 파란색을 칠하는 경우의 수는 6

나머지 6개의 색을 칠하는 경우의 수는 6!

따라서 구하는 경우의 수는

6×6!

(ii) 빨간색을 ②번 영역에 칠하는 경우

파란색은 ①번, ②번, ③번, ④번 영역을 제외한 나머지 영역에 칠할 수 있으므로 파란색을 칠하는 경우의 수는 4

나머지 6개의 색을 칠하는 경우의 수는 6!

따라서 구하는 경우의 수는

4×6!

(i), (ii)에서 빨간색과 파란색이 서로 이웃하지 않게 칠하는 경우의 수는

6×6!+4×6!=10×6!

이므로 $k=10$

{다른 풀이}

전체 경우의 수에서 빨간색과 파란색이 서로 이웃하는 경우의 수를 빼서 구하자.

8개의 색 중 4가지를 선택하는 경우의 수는 ${}_8C_4$

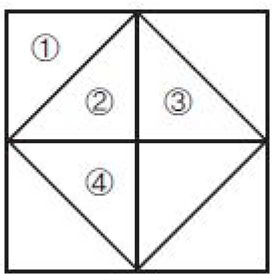
선택한 4가지 색을 내부의 4개의 영역에 칠하는 경우의 수는 (4-1)!

나머지 4가지 색을 외부의 4개의 영역에 칠하는 경우의 수는 4!

따라서 구하는 전체 경우의 수는

${}_8C_4$×3!×4!

그림과 같이 8개의 영역의 일부에 번호를 부여하자.



빨간색과 파란색을 서로 이웃하게 칠하는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 빨간색을 ①번 영역에 칠하는 경우

파란색을 ②번 영역에 칠해야 서로 이웃하므로 구하는 경우의 수는 빨간색과 파란색을 제외한 나머지 6가지 색을 6개의 영역에 칠하는 경우의 수인 6!

(ii) 빨간색을 ②번 영역에 칠하는 경우

파란색을 ①번 또는 ③번 또는 ④번 영역에 칠해야 서로 이웃하므로 파란색을 칠하는 경우의 수는 3

나머지 6가지 색을 6개의 영역에 칠하는 경우의 수는 6!

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 3×6!

(i), (ii)에서 빨간색과 파란색이 서로 이웃하게 칠하는 경우의 수는

6!+3×6!=4×6!

따라서 빨간색과 파란색이 서로 이웃하지 않도록 칠하는 경우의 수는

$${}_8C_4 \times 3! \times 4! - 4 \times 6! = \frac{8!}{(8-4)!\,4!} \times 3! \times 4! - 4 \times 6!$$

$$= \frac{8!}{4} - 4 \times 6!$$

$$= 2 \times 7 \times 6! - 4 \times 6!$$

$$= 10 \times 6!$$

따라서 $k = 10$

21)

[정답/모범답안]

106

[해설]

조건 (가)에서 $a_1 = 1$ 또는 $a_1 = 2$ 또는 $a_1 = 4$이다.

이때 조건 (나)에서 $a_2 < a_1$이고 a_2는 1 이상 6 이하의 자연수이므로 $a_1 = 1$이면 $a_2 < a_1$인 자연수 a_2는 존재하지 않는다.

따라서 $a_1 = 2$ 또는 $a_1 = 4$이다.

(i) $a_1 = 2$일 때

조건 (나)에서 $a_2 < 2 \le a_3$이고 조건 (다)에서 $a_4 < 2 \le a_5$이므로 $a_2 = a_4 = 1$이고 a_3과 a_5의 값은 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이다. 따라서 구하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6 중 중복을 허락하여 2개를 택해 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$

(ii) $a_1 = 4$일 때

조건 (나)에서 $a_2 < 4 \le a_3$이고 조건 (다)에서 $a_4 < 4 \le a_5$이므로 aª와 a¢의 값은 1, 2, 3 중 하나이고 a_3과 a_5의 값은 4, 5, 6 중 하나이다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개 중 중복을 허락하여 2개를 택해 나열하는 중복순열의 수의 제곱과 같으므로

$({}_3\Pi_2)^2 = (3^2)^2 = 3^4 = 81$

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

25+81=106

22)

[정답/모범답안]

5

[해설]

조건 (가)에서 $f(1) = 4$ 또는 $f(1) = 5$이다.

(i) $f(1) = 4$일 때

$1 \times f(1) = 1 \times 4 = 4$

이므로 조건 (나)를 만족시키는 1이 아닌 정의역의 원소가 있어

야한다. 즉, 2, 3, 4, 5 중 적어도 하나의 원소 a에 대하여 $a\times f(a)$의 값이 홀수이어야 한다. 이 경우의 수는 $f(1)=4$를 만족시키는 모든 함수 f의 개수에서 $f(1)=4$이고 모든 정의역의 원소 x에 대하여 $x\times f(x)$의 값이 짝수인 함수 f의 개수를 뺀 것과 같다. 정의역의 원소 2, 3, 4, 5를 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 하나에 대응시키는 경우의 수는 5개의 수 1, 2, 3, 4, 5 중 중복을 허락하여 4개를 택해 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_4=5^4=625$

한편, $f(1)=4$이고 모든 정의역의 원소 x에 대하여 $x\times f(x)$의 값이 짝수인 함수 f의 개수는 정의역의 원소 2, 4는 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 하나에 대응시키고 정의역의 원소 3, 5는 공역의 원소 중 짝수인 2 또는 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$_5\Pi_2\times{}_2\Pi_2=5^2\times2^2=10^2=100$

따라서 구하는 함수 f의 개수는 625-100=525

(ⅱ) $f(1)=5$일 때

$1\times f(1)=1\times5=5$이므로 조건 (나)를 만족시키는 정의역의 원소 1이 존재한다. 따라서 정의역의 원소 2, 3, 4, 5를 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 하나에 대응시킬 수 있으므로 구하는 함수 f의 개수는 5개의 수 1, 2, 3, 4, 5 중 중복을 허락하여 4개를 택해 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_4=5^4=625$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는 합의 법칙에 의하여

525+625=1150

{다른 풀이}

(ⅰ) $f(1)=4$일 때

$1\times f(1)=1\times4=4$

이므로 조건 (나)를 만족시키는 1이 아닌 정의역의 원소가 있어야 한다. 즉, 2, 3, 4, 5 중 적어도 하나의 원소 a에 대하여 $a\times f(a)$의 값이 홀수이어야 하므로 a와 $f(a)$의 값이 모두 홀수이어야 한다.

따라서 이를 만족시키는 함수 f의 개수는 $f(3)$의 값이 홀수인 함수 f의 개수와 $f(5)$의 값이 홀수인 함수 f의 개수의 합에서 $f(3)$의 값과 $f(5)$의 값이 모두 홀수인 함수 f의 개수를 뺀 것과 같다.

$f(3)$의 값이 홀수이려면 $f(3)=1$ 또는 $f(3)=3$ 또는 $f(3)=5$이어야 하므로 $f(3)$의 값이 홀수인 함수 f의 개수는

$_5\Pi_3\times3=5^3\times3=375$

$f(5)$의 값이 홀수인 함수 f의 개수도 위와 마찬가지로

$_5\Pi_3\times3=5^3\times3=375$

$f(3)$의 값과 $f(5)$의 값이 모두 홀수인 함수 f의 개수는

$_5\Pi_2\times{}_3\Pi_2=5^2\times3^2=225$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$375+375-225=525$

(ⅱ) $f(1)=5$일 때

$1\times f(1)=1\times5=5$이므로 조건 (나)를 만족시키는 정의역의 원소 1이 존재한다. 따라서 정의역의 원소 2, 3, 4, 5를 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 하나에 대응시킬 수 있으므로 구하는 함수 f의 개수는 5개의 수 1, 2, 3, 4, 5 중 중복을 허락하여 4개를 택해 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_4=5^4=625$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는 합의 법칙에 의하여

$525+625=1150$

23)

[정답/모범답안]

4

[해설]

$N=a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$라 하면

a는 1 이상 9 이하의 자연수이고 b, c, d는 0 이상 9 이하의 정수이다.

조건 (가)에서

$a+b+c+d=11$ …… ㉠

조건 (나)에서 $d\neq0$, $d\neq5$이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 N의 개수는 방정식 ㉠을 만족시키는

$1\le a\le9$, $0\le b\le9$, $0\le c\le9$, $0\le d\le9$

인 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수에서 $d=0$, $d=5$인 경우의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 빼서 구한다.

$a=a'+1$이라 하면 $1\le a\le9$에서 $0\le a'\le8$이고 ㉠에서

$a'+b+c+d=10$ …… ㉡

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a',b,c,d의 순서쌍 (a',b,c,d)의 개수는

$_4H_{10}={}_{4+10-1}C_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=286$

이때 $0\le a'\le8$이고 b, c, d는 0 이상 9 이하이어야 하므로 위의 경우에서 $a'=9$ 또는 $a'=10$ 또는 $b=10$ 또는 $c=10$ 또는 $d=10$인 경우를 제외해야 한다.

즉, $a'=9$인 경우

(9, 1, 0, 0), (9, 0, 1, 0), (9, 0, 0, 1)

의 3가지와 $a'=10$ 또는 $b=10$ 또는 $c=10$ 또는 $d=10$인 경우

(10, 0, 0, 0), (0, 10, 0, 0), (0, 0, 10, 0), (0, 0, 0, 10)

의 4가지를 제외해야 한다. 즉, 방정식 ㉠을 만족시키는

1≤a≤9, 0≤b≤9, 0≤c≤9, 0≤d≤9

인 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$286-7=279$

(ⅰ) $d=0$인 경우

㉡에서 $a'+b+c=10$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a',b,c의 순서쌍 (a',b,c)의 개수는

$_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$

이때 위와 마찬가지로

(9, 1, 0), (9, 0, 1), (10, 0, 0), (0, 10, 0), (0, 0, 10)

인 경우를 제외해야 하므로 구하는 순서쌍의 개수는

$66-5=61$

(ⅱ) $d=5$인 경우

㉡에서 $a'+b+c=5$

위의 방정식을 만족시키는 $0\le a'\le8$이고 b, c는 0 이상 9 이하인 정수 a',b,c의 순서쌍 (a',b,c)의 개수는

$_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $d=0$ 또는 $d=5$인 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$61+21=82$
따라서 조건을 만족시키는 네 자리의 자연수 N의 개수는
$279-82=197$

24)

[정답/모범답안]
3

[해설]
전체집합 U의 모든 부분집합의 개수는
$2^3=8$
전체집합 U의 부분집합 중에서 서로 다른 두 부분집합을 택하는 경우의 수는
${}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$
택한 두 부분집합의 합집합이 집합 U와 같고 교집합이 공집합이려면 택한 집합 중 하나를 P라 하면 다른 하나의 집합은 P^C이어야 한다.
이때 집합 P가 될 수 있는 것은 집합 U의 모든 부분집합이고, 두 집합 P, P^C을 순서쌍 (P, P^C)으로 나타내면
($\varnothing$, {1, 2, 3}), ({1}, {2, 3}), ({2}, {1, 3}), ({3}, {1, 2}), ({1, 2}, {3}), ({1, 3}, {2}), ({2, 3}, {1}), ({1, 2, 3} , $\varnothing$)
이며 2개씩 중복되므로 택한 두 집합의 합집합이 집합 U와 같고 교집합이 공집합인 경우의 수는 4이다.
따라서 구하는 확률은
$\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$

25)

[정답/모범답안]
1

[해설]
주머니에서 공을 1개씩 모두 꺼내어 나열하는 경우의 수는
5!=120
1이 적힌 공은 2가 적힌 공보다 왼쪽에 놓이고 3이 적힌 공은 2가 적힌 공보다 오른쪽에 놓이며, A가 적힌 공은 B가 적힌 공보다 왼쪽에 놓이는 사건은 숫자가 적힌 3개의 공과 문자가 적힌 2개의 공을 각각 같은 종류의 공이라 가정하고 일렬로 나열하는 사건과 같다. 즉, 이 사건의 경우의 수는 1, 1, 1, A, A를 일렬로 나열하는 같은 것이 있는 순열의 수와 같으므로
$\frac{5!}{3!\times2!}=10$
따라서 구하는 확률은
$\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

26)

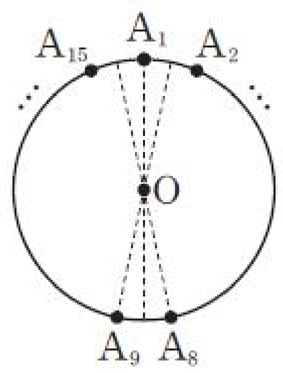
[정답/모범답안]
3

[해설]
주머니에서 2개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는
${}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$
꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같은 경우는 2개의 공 모두 흰 공이거나 2개의 공 모두 검은 공인 경우이다.
흰 공 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_3C_2={}_3C_1=3$
검은 공 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$
따라서 구하는 확률은
$\frac{3+6}{21}=\frac{3}{7}$

27)

[정답/모범답안]
4

[해설]
15개의 점에서 임의로 3개를 동시에 선택하는 모든 경우의 수는
${}_{15}C_3=455$
원의 중심을 O, 처음 선택한 점을 A_1이라 하면 삼각형의 내부에 중심 O가 존재하려면 나머지 두 개의 점은 직선 OA_1의 서로 반대쪽에 있어야 한다.



(ⅰ) 두 번째로 선택한 점이 A_9일 때
세 번째로 선택한 점은 A_2, A_3, $\cdots$, A_8 중에서 하나이므로 경우의 수는
${}_7C_1=7$
(ⅱ) 두 번째로 선택한 점이 A_{10}일 때
세 번째로 선택한 점은 A_3, A_4, $\cdots$, A_8 중에서 하나이므로 경우의 수는
${}_6C_1=6$
위와 같은 방법으로 두 번째로 선택한 점이
A_{11}이면 경우의 수는 ${}_5C_1=5$
A_{12}이면 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
A_{13}이면 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
A_{14}이면 경우의 수는 ${}_2C_1=2$
A_{15}이면 경우의 수는 ${}_1C_1=1$
처음 선택한 점이 A_1일 때의 경우의 수는

$7+6+5+4+3+2+1=28$이므로 원의 중심이 세 점을 이어 만든 삼각형의 내부에 존재하는 삼각형의 개수는

$28\times 15\div 3=140$

따라서 구하는 확률은

$\frac{140}{455}=\frac{4}{13}$

28)

[정답/모범답안]

10

[해설]

확률변수 X가 이항분포 $B\left(n,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$P(X=1)={}_nC_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}=n\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

$P(X=2)={}_nC_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}$

따라서 $\frac{P(X=1)}{P(X=2)}=\frac{2}{n-1}\times\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{n-1}=\frac{1}{3}$에서

$n-1=9$이므로 $n=10$

29)

[정답/모범답안]

14

[해설]

확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=r)={}_3C_r\times\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{3-r}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

이므로 X는 이항분포 $B\left(3,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

따라서 $E(X)=3\times\frac{2}{3}=2,\ \ V(X)=3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{2}{3}+2^2=\frac{14}{3}$

따라서 $E(3X^2)=3E(X^2)=3\times\frac{14}{3}=14$

{다른 풀이}

확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=r)={}_3C_r\times\frac{2^r}{27}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

따라서

$E(X^2)=\frac{0^2\times 1+1^2\times 6+2^2\times 12+3^2\times 8}{27}=\frac{14}{3}$

이므로

$E(3X^2)=3E(X^2)=3\times\frac{14}{3}=14$

30)

[정답/모범답안]

29

[해설]

2개의 전구가 켜지려면 스위치는 2번 또는 5번 눌러야 하므로 주사위를 한 번 던질 때마다 2개의 전구가 켜진 상태가 나타날 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 주어진 시행을 독립적으로 10회 실시할 때, 2개의 전구가 켜진 결과가 나오는 횟수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{V(X)}=10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{9}$이므로

$p+q=9+20=29$

31)

[정답/모범답안]

3

[해설]

처음 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 나중에 꺼낸 1개의 공에 적힌 수와 같은 사건을 X, 나중에 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 2인 사건을 Y라 하자.

(ⅰ) 주머니 A에서 공을 2개 꺼내는 경우

주머니 A를 선택할 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 꺼냈을 때 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차는 1 또는 2 또는 3이다.

1) 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 1인 경우

주머니 A에서 {1, 2} 또는 {2, 3} 또는 {3, 4}가 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{3}{{}_4C_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

주머니 B에서 1이 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{3}$

즉, 이 경우의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

2) 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 2인 경우

주머니 A에서 {1, 3} 또는 {2, 4}가 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{2}{{}_4C_2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

주머니 B에서 2가 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{3}$

즉, 이 경우의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

3) 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 3인 경우

주머니 A에서 {1, 4}가 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은

$\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$

주머니 B에서 3이 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{3}$

즉, 이 경우의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$

(ⅱ) 주머니 B에서 공을 2개 꺼내는 경우

주머니 B를 선택할 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 꺼냈을 때 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차는 1 또는 2이다.

1) 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 1인 경우

주머니 B에서 {1, 2} 또는 {2, 3}이 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{2}{{}_3C_2}=\frac{2}{3}$

주머니 A에서 1이 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{4}$

즉, 이 경우의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

2) 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 2인 경우

주머니 B에서 {1, 3}이 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{{}_3C_2}=\frac{1}{3}$

주머니 A에서 2가 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{4}$

즉, 이 경우의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$P(X)=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)=\frac{7}{24}$

(ⅰ)-2), (ⅱ)-2)에서

$P(X\cap Y)=\frac{1}{18}+\frac{1}{24}=\frac{7}{72}$

따라서 구하는 확률은

$$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{7}{72}}{\frac{7}{24}}=\frac{1}{3}$$

32)

[정답/모범답안]

30

[해설]

사건 A∩B는 꺼낸 공에 적힌 수가 6의 배수인 사건이다.

(ⅰ) $n=2m-1$(m은 5 이하의 자연수)인 경우

1부터 $6m-3$까지의 자연수 중에서 짝수의 개수는 $3m-2$이므로

$P(A)=\frac{3m-2}{6m-3}$

1부터 $6m-3$까지의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 $2m-1$이므로

$P(B)=\frac{2m-1}{6m-3}=\frac{1}{3}$

1부터 $6m-3$까지의 자연수 중에서 6의 배수의 개수는 $m-1$이므로

$P(A\cap B)=\frac{m-1}{6m-3}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이 되려면

P(A∩B)=P(A)P(B)이어야 하므로

$\frac{m-1}{6m-3}=\frac{3m-2}{6m-3}\times\frac{1}{3}$

$3m-3=3m-2$

이 식을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $n=2m$ (m은 5 이하의 자연수)인 경우

1부터 $6m$까지의 자연수 중에서 짝수의 개수는 $3m$이므로

$P(A)=\frac{3m}{6m}=\frac{1}{2}$

1부터 $6m$까지의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 $2m$이므로

$P(B)=\frac{2m}{6m}=\frac{1}{3}$

1부터 $6m$까지의 자연수 중에서 6의 배수의 개수는 m이므로

$P(A\cap B)=\frac{m}{6m}=\frac{1}{6}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이 되려면

P(A∩B)=P(A)P(B)이어야 하는데

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$이므로 $n=2m$일 때 두 사건 A와 B가 서로 독립이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 자연수 n은 2, 4, 6, 8, 10이므로 구하는 합은

2+4+6+8+10=30

33)

[정답/모범답안]

341

[해설]

전체 경우의 수는

${}_6\Pi_4=6^4$

네 번째 시행에서 처음으로 모두 앞면 또는 뒷면이 되어야 한다.

(ⅰ) 6장의 카드가 네 번째 시행에서 처음으로 모두 앞면이 되는 경우

5와 6이 적혀 있는 카드가 앞면이 보이도록 해야 하므로 4번의 시행 중 5와 6이 적혀 있는 카드를 각각 홀수 번씩 뒤집어야 한다.

① 5가 적혀 있는 카드를 3번, 6이 적혀 있는 카드를 1번 뒤집는 경우

첫 번째 시행부터 차례로 5, 5, 5, 6 또는 5, 5, 6, 5가 적혀 있는 카드를 뒤집어야 네 번째 시행에서 처음으로 모두 앞면이 되므로 경우의 수는 2

② 5가 적혀 있는 카드를 1번, 6이 적혀 있는 카드를 3번 뒤집는 경우

첫 번째 시행부터 차례로 6, 6, 6, 5 또는 6, 6, 5, 6이 적혀 있는 카드를 뒤집어야 네 번째 시행에서 처음으로 모두 앞면이 되므로 경우의 수는 2

③ 5가 적혀 있는 카드를 1번, 6이 적혀 있는 카드를 1번 뒤집는 경우

나머지 2번은 1, 2, 3, 4가 적힌 카드 중에서 같은 카드를 2번 뒤집어야 4번의 시행 후에 모두 앞면이 된다. 이때 만약 첫 번째 시행, 두 번째 시행에 5와 6이 적혀 있는 카드를 한 번씩 뒤집게 되면 두 번째 시행 만에 사건 A가 일어나므로 경우의 수는

$4\times\left(\frac{4!}{2!}-2!\right)=40$

(ii) 6장의 카드가 네 번째 시행에서 처음으로 모두 뒷면이 되는 경우

1, 2, 3, 4가 적혀 있는 카드를 한 번씩 뒤집어야 하므로 경우의 수는 4!=24

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{2+2+40+24}{6^4}=\frac{68}{6^4}=\frac{17}{324}$

따라서 $p+q=324+17=341$

{다른 풀이}

앞면이 보이게 놓인 카드의 개수를 x, 뒷면이 보이게 놓인 카드의 개수를 y라 하자.

(i) 첫 번째 시행에서 앞면이 보이게 놓인 카드를 뒤집는 경우

첫 번째 시행 후 $x=y=3$이고, 두 번째 시행 후 $x=4$, $y=2$ 또는 $x=2$, $y=4$이다.

$x=2$이면 나머지 두 번의 시행에서 앞면이 보이게 놓인 2개의 카드를 한 번씩 뒤집어야 하고, y=2이면 나머지 두 번의 시행에서 뒷면이 보이게 놓인 2개의 카드를 한 번씩 뒤집어야 한다.

즉, 이 경우의 확률은 $\frac{4}{6}\times2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{27}$

(ii) 첫 번째 시행에서 뒷면이 보이게 놓인 카드를 뒤집는 경우

첫 번째 시행 후 x=5, y=1이므로 두 번째 시행에서는 반드시 앞면이 보이게 놓인 카드를 뒤집어야 하고, 나머지 두 번의 시행에서 뒷면이 보이게 놓인 2개의 카드를 한 번씩 뒤집어야 하므로 이 경우의 확률은

$\frac{2}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{324}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

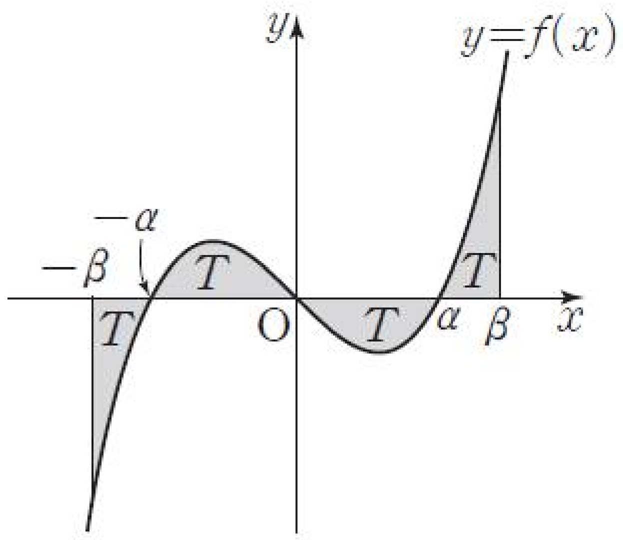
$\frac{1}{27}+\frac{5}{324}=\frac{12+5}{324}=\frac{17}{324}$

따라서 $p+q=324+17=341$

34)

[해설]

조건 (가), (나)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $-\alpha$, 0, α이다. $\int_{-\alpha}^{0}f(x)dx=-\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=T$라 하고, $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=T$ $(\alpha<\beta)$라 하면 $-\int_{-\beta}^{-\alpha}f(x)dx=T$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $t<-\beta$ 인 경우

$g(t)=\int_{t}^{t}f(s)ds=0$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$g(-t)=\int_{t}^{-t}f(s)ds=0$

따라서 t, $-t$를 제외한 실수 x에 대하여 $g(x)\neq0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

(ii) $t=-\beta$인 경우

$g(-\beta)=\int_{-\beta}^{-\beta}f(s)ds=0$

$g(0)=\int_{-\beta}^{0}f(s)ds=-T+T=0$

$g(\beta)=\int_{-\beta}^{\beta}f(s)ds=-T+T-T+T=0$

따라서 $-\beta$, 0, β를 제외한 실수 x에 대하여 $g(x)\neq0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 3이다.

(iii) $-\beta<t<-\alpha$ 인 경우

$g(t)=\int_{t}^{t}f(s)ds=0$

$g(-\alpha)=\int_{t}^{-\alpha}f(s)ds=T_1$이라 하면

$-\alpha<a<0$이고, $g(a)=\int_{t}^{a}f(s)ds=T_1-T_1=0$인 a가 존재한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$g(-a)=\int_{t}^{-a}f(s)ds=g(a)+\int_{-a}^{a}f(s)ds=0$

$g(-t)=\int_{t}^{-t}f(s)ds=0$

따라서 t, a, $-a$, $-t$를 제외한 실수 x에 대하여 $g(x)\neq0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 4이다.

(iv) $t=-\alpha$인 경우

(i)과 마찬가지 방법으로 $x=-\alpha$, $x=\alpha$일 때만 $g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

(v) $-\alpha<t<0$인 경우

(iii)과 마찬가지 방법으로 $g(t)=0$이고

열린구간 $(-\beta,-\alpha)$, $(0,\alpha)$, (α,β)에 $g(x)=0$인 실수 x가 각각 하나씩 존재하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 4이다.

(vi) $t=0$인 경우

(ii)와 마찬가지 방법으로 $x=-\beta$, $x=0$, $x=\beta$일 때만 $g(x)=0$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 3이다.

(vii) $0<t<\alpha$인 경우

(iii)과 마찬가지 방법으로 $g(t)=0$이고

열린구간 $(-\beta,\ -\alpha)$, $(0,\ \alpha)$, $(\alpha,\ \beta)$에 $g(x)=0$인 실수 x가 각각 하나씩 존재하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 4이다.

(viii) $t=\alpha$인 경우

(i)과 마찬가지 방법으로 $x=-\alpha$, $x=\alpha$일 때만 $g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

(ix) $\alpha<t<\beta$인 경우

(iii)과 마찬가지 방법으로 g(t)=0이고

열린구간 $(-\beta,\ -\alpha)$, $(0,\ \alpha)$, $(\alpha,\ \beta)$에 $g(x)=0$인 실수 x가 각각 하나씩 존재하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 4이다.

(x) $t=\beta$인 경우

(ii)와 마찬가지 방법으로 $x=-\beta$, $x=0$, $x=\beta$일 때만 $g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 3이다.

(xi) $t>\beta$인 경우

(i)과 마찬가지 방법으로 $x=-\alpha$, $x=\alpha$일 때만 $g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

(i)~(xi)에 의해

$$h(t)=\begin{cases} 2 & (t<-\beta) \\ 3 & (t=-\beta) \\ 4 & (-\beta<t<-\alpha) \\ 2 & (t=-\alpha) \\ 4 & (-\alpha<t<0) \\ 3 & t=0 \\ 4 & (0<t<\alpha) \\ 2 & (t=\alpha) \\ 4 & (\alpha<t<\beta) \\ 3 & (t=\beta) \\ 2 & (t>\beta) \end{cases}$$

함수 $h(t)$의 치역은 {2, 3, 4}이므로 치역의 모든 원소의 합은 2+3+4=9이고, 함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k는 $-\beta$, $-\alpha$, 0, α, β로 5개이다.

따라서 $S=9$, $m=5$이므로

$S+m=14$

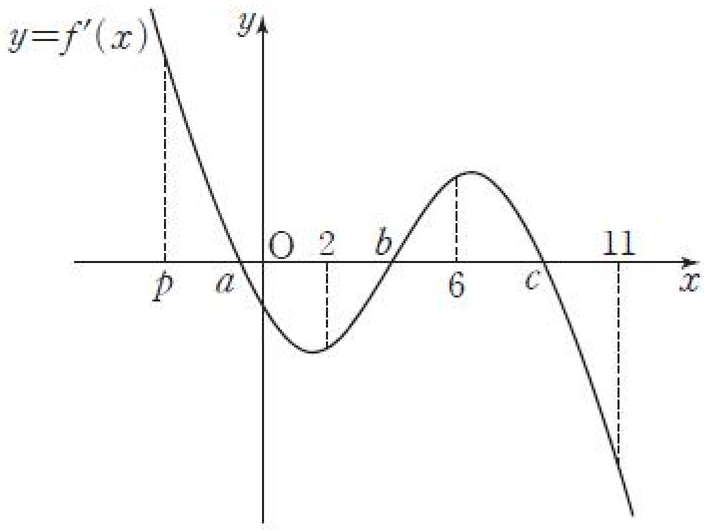
35)

[정답/모범답안]

5

[해설]

두 조건 (가), (나)를 만족시키는 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. 그림에서 $\int_p^a f'(x)dx>0$이므로

$\int_p^a f'(x)dx=[f(x)]_p^a=f(a)-f(p)>0$

즉, $f(a)>f(p)$ (참)

ㄴ. 조건 (다)에서

$\int_p^2 f'(x)dx=\int_2^6 f'(x)dx=\int_6^{11} f'(x)dx=0$이고

$f(p)=0$이므로

$f(b)=\int_p^b f'(x)dx$

$=\int_p^2 f'(x)dx+\int_2^b f'(x)dx$

$=\int_2^b f'(x)dx<0$

$f(c)=\int_p^c f'(x)dx$

$=\int_p^6 f'(x)dx+\int_6^c f'(x)dx$

$=\int_p^2 f'(x)dx+\int_2^6 f'(x)dx+\int_6^c f'(x)dx$

$=\int_6^c f'(x)dx>0$

한편, $f(p)=0$이므로 ㄱ에서

$f(a)>0$

그러므로 $f(a)f(b)f(c)<0$(참)

ㄷ. ㄱ과 ㄴ에서 $f(p)=0$, $f(a)$와 $f(c)$는 극댓값이고 $f(b)$는 극솟값이므로 방정식 $f(x)=0$은 4개의 서로 다른 실근을 갖는다.

조건 (다)에서

$\int_p^2 f'(x)dx=\int_2^6 f'(x)dx=\int_6^{11} f'(x)dx=0$이므로

$f(2)=\int_p^2 f'(x)dx=0$

$f(6)=\int_p^6 f'(x)dx=\int_p^2 f'(x)dx+\int_2^6 f'(x)dx=0$

$f(11)=\int_p^{11} f'(x)dx=\int_p^6 f'(x)dx+\int_6^{11} f'(x)dx=0$

$f(p)=0$이므로

$f(x)=k(x-2)(x-6)(x-11)(x-p)$ (단, $k<0$)

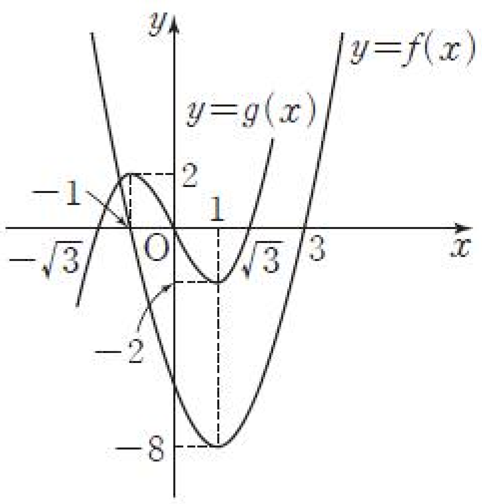
$f(3)=24k(3-p)$, $f(5)=18k(5-p)$

$24k(3-p)=18k(5-p)$에서 $p=-3$

즉, $f(x)=k(x-2)(x-6)(x-11)(x+3)$ (단, $k<0$)
$k<0$이므로 부등식 $f(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$-3<x<2$ 또는 $6<x<11$
따라서 구하는 모든 정수 x의 합은
(-2)+(-1)+0+1+7+8+9+10=32 (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

36)
[정답/모범답안]
3

[해설]
$f(x)=2(x+1)(x-3)=2x^2-4x-6$에서 $f'(x)=4x-4$
$f'(x)=0$에서 $x=1$
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-8$이다.
$g(x)=x(x^2-3)=x^3-3x$에서 $g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $g(-1)=2$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $g(1)=-2$이다.
따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$i(x)=|f(x)-kg(x)|$(k는 자연수)라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=kg(x)$는 반드시 $-\sqrt{3}<x<1$에서 만나고 만나는 점의 x좌표를 α라 하면 $i(\alpha)=0$이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{i(\alpha+h)-i(\alpha)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\{kg(\alpha+h)-f(\alpha+h)\}-\{kg(\alpha)-f(\alpha)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{k\{g(\alpha+h)-g(\alpha)\}-\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}}{h}$$
$$=kg'(\alpha)-f'(\alpha)$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{i(\alpha+h)-i(\alpha)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\{f(\alpha+h)-kg(\alpha+h)\}-\{f(\alpha)-kg(\alpha)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{-k\{g(\alpha+h)-g(\alpha)\}+\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}}{h}$$
$$=-kg'(\alpha)+f'(\alpha)$$

함수 $i(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하려면
$kg'(\alpha)-f'(\alpha)=-kg'(\alpha)+f'(\alpha)$
즉, $kg'(\alpha)=f'(\alpha)$이어야 한다.
$k\times 3(\alpha+1)(\alpha-1)=4\alpha-4$, $(\alpha-1)\{3k(\alpha+1)-4\}=0$

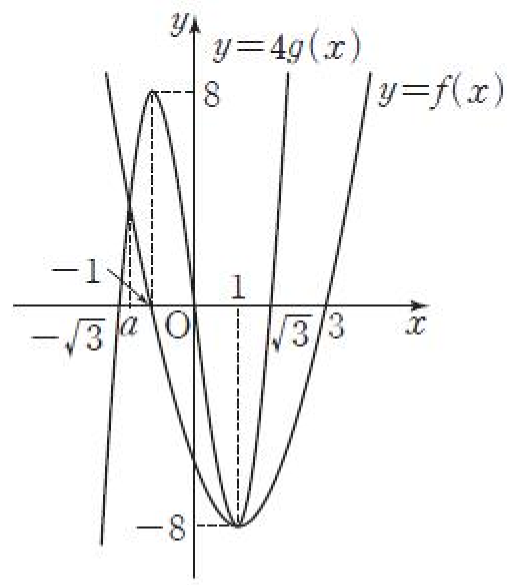
$\alpha=1$ 또는 $\alpha=-1+\dfrac{4}{3k}$ …… ㉠

그런데 $-\sqrt{3}<\alpha<-1$이므로 함수 $i(x)$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다.

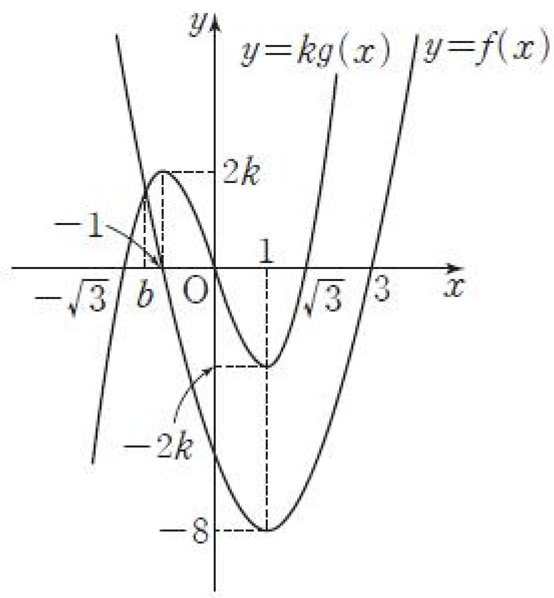
(ⅰ) $k=4$일 때
$i(1)=|f(1)-4g(1)|=0$이고

$$i'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{i(1+h)-i(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{4g(1+h)-f(1+h)\}-\{4g(1)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4\{g(1+h)-g(1)\}-\{f(1+h)-f(1)\}}{h}$$

그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=4g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나고 만나는 점 중 $x=1$이 아닌 점의 x좌표를 a $(-\sqrt{3}<a<-1)$라 하면 함수 $i(x)$는 $x=a$에서만 미분가능하지 않다.



(ⅱ) $k=1, 2, 3$일 때
그림과 같이 $-\sqrt{3}<x<-1$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=kg(x)$가 만나는 점의 x좌표를 b라 하자.

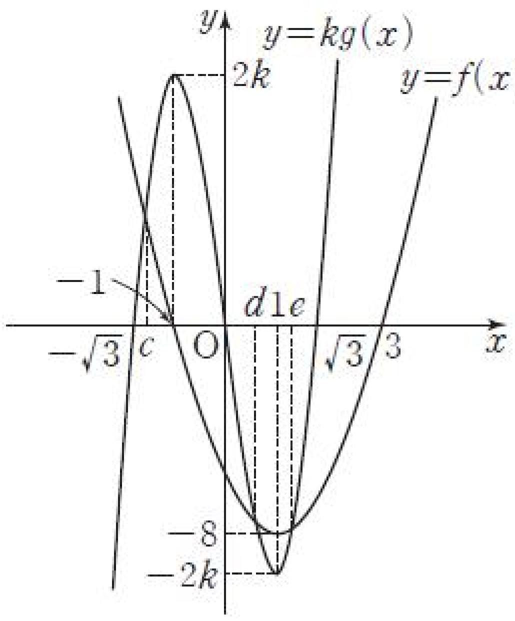


$x<b$일 때 $f(x)>kg(x)$, $b<x\le 1$일 때 $f(x)<kg(x)$이다.
또한 $x>1$일 때 $f(1)<kg(1)$이고
$kg'(x)-f'(x)=3k(x+1)(x-1)-4(x-1)$
$=(x-1)\{3k(x+1)-4\}>0$
이므로 $f(x)<kg(x)$이다.
따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=kg(x)$는 $x=b$에서만 만나고 함수

$i(x)$는 $x=b$에서만 미분가능하지 않다.

(ⅲ) $k=5,6,7,8,9,10$일 때

그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=kg(x)$는 서로 다른 세 점에서 만나고 만나는 점의 x좌표를 c ($-\sqrt{3}<c<-1$), d ($0<d<1$), e ($1<e<\sqrt{3}$)라 하자.



$x=c$, $x=d$, $x=e$에서 미분가능하려면 ㉠에서와 마찬가지로 c, d, e의 값이 각각 1 또는 $-1+\frac{4}{3k}$가 되어야 하는데 $k>4$이므로

$-1<-1+\frac{4}{3k}<0$이다.

따라서 함수 $i(x)$는 $x=c$, $x=d$, $x=e$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $1\le k\le 4$일 때 함수 $|f(x)-kg(x)|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는 각각 1이고, $5\le k\le 10$일 때 함수 $|f(x)-kg(x)|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는 각각 3이다.

그리고 이 x의 값들은 모두 서로 다르다. 함수 $p(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않고, 함수 $q(x)$가 $x=\beta$ ($\alpha\neq\beta$)에서 미분가능하지 않으면 함수 $p(x)+q(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않으므로 함수

$\sum_{k=1}^{10}|f(x)-kg(x)|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는

4×1+6×3=22

{참고}

두 곡선 $y=f(x)$, $y=kg(x)$ (k는 자연수)가 만나는 점의 x좌표를 p ($-\sqrt{3}<p<-1$)라 하고 두 곡선 $y=f(x)$, $y=kg(x)$ (k는 자연수)가 만나는 점의 x좌표를 q($-\sqrt{3}<q<-1$)라 하자.

함수 $f(x)-(k+1)g(x)$는 닫힌구간 [$-\sqrt{3}$, p]에서 연속이고

$f(p)-(k+1)g(p)=\{f(p)-kg(p)\}-g(p)=-g(p)<0$

$f(-\sqrt{3})-(k+1)g(-\sqrt{3})=f(-\sqrt{3})>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(q)-(k+1)g(q)=0$인 q가 열린구간 ($-\sqrt{3}$, p)에 존재한다.

즉, $q<p$이므로 $p\neq q$이다.

37)

[정답/모범답안]

12

[해설]

$8^a=9^b$에서 $(2^a)^3=(3^b)^2$

$(2^a)^3=(3^b)^2=k$ (k는 양의 상수)라 하면

$2^a=k^{\frac{1}{3}}$, $3^b=k^{\frac{1}{2}}$ …… ㉠

$\log_6 2^a+\log_6 3^b=\log_6 k^{\frac{1}{3}}+\log_6 k^{\frac{1}{2}}$

$=\log_6\left(k^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{2}}\right)=\log_6 k^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}$

$=\log_6 k^{\frac{5}{6}}$

$\log_6 k^{\frac{5}{6}}=10$에서 $k^{\frac{5}{6}}=6^{10}$이므로

$k=(6^{10})^{\frac{6}{5}}=6^{12}$

㉠에서 $2=k^{\frac{1}{3a}}$, $3=k^{\frac{1}{2b}}$이므로

$6=k^{\frac{1}{3a}}\times k^{\frac{1}{2b}}=k^{\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}}=6^{12\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}\right)}$

따라서 $\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}=\frac{1}{12}$이므로 $p=12$

38)

[정답/모범답안]

668

[해설]

정사면체 모양의 상자를 던질 때, 3이 적혀 있는 면이 바닥에 놓일 확률은 $\frac{1}{4}$이고 이 상자를 96회 던질 때, 3이 적혀 있는 면이 바닥에 놓인 횟수를 확률변수 X라 하면 확률변수 X에 대하여

$P(X=k)=P(k)={}_{96}C_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{96-k}$ (k=0, 1, 2, ⋯, 96)

이므로 X는 이항분포 $B\left(96,\frac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때 E(X)$=96\times\frac{1}{4}=24$

V(X)$=96\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=18$

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=16+24^2=594$

따라서

$\sum_{k=0}^{96}(k+1)(k+2)P(k)$

$=\sum_{k=0}^{96}(k+1)(k+2)P(X=k)$

$=\sum_{k=0}^{96}\left\{(k+1)(k+2){}_{96}C_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{96-k}\right\}$

$=\sum_{k=0}^{96}\left\{(k^2+3k+2){}_{96}C_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{96-k}\right\}$

$= \sum_{k=0}^{96}\left\{k^2{}_{96}C_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{96-k}\right\}+3\sum_{k=0}^{96}\left\{k{}_{96}C_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{96-k}\right\}$

$+2\sum_{k=0}^{96}{}_{96}C_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{96-k}$

$=E(X^2)+3E(X)+2$

$=594+3\times 34+2=668$

39)

[정답/모범답안]

390

[해설]

같은 종류의 사탕 6개를 서로 구별되는 6개의 접시에 남김없이 담는 경우의 수는 서로 다른 접시 6개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6H_6={}_{6+6-1}C_6={}_{11}C_6={}_{11}C_5=\frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}=462$

각 접시에 적힌 수를 접시의 번호라 하자.

(ⅰ) 사탕이 담겨진 접시에 적힌 번호의 합이 6 이하가 되는 경우는 다음과 같다.

① 1개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우

6가지

② 2개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우

1번과 2번, 1번과 3번, 1번과 4번, 1번과 5번, 2번과 3번, 2번과 4번 접시에 담는 6가지

택한 2개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우의 수는 2개의 접시에 사탕을 하나씩 놓고 남은 4개의 사탕을 중복을 허락하여 2개의 접시에 모두 담는 경우의 수이므로

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는 6×5=30

③ 3개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우

1번과 2번과 3번 접시에 담는 1가지

1번과 2번과 3번 접시에 사탕을 모두 담는 경우의 수는 1번과 2번과 3번 접시에 사탕을 하나씩 놓고 남은 3개의 사탕을 중복을 허락하여 1번과 2번과 3번 접시에 모두 담는 경우의 수이므로

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는 1×10=10

(ⅱ) 사탕이 담겨진 접시에 적힌 번호의 합이 18 이상이 되는 경우는 다음과 같다.

① 6개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우

1+2+3+4+5+6=21이므로 1가지

② 5개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우

1번을 제외한 5개, 2번을 제외한 5개, 3번을 제외한 5개의 접시에 담는 3가지

택한 1개의 접시를 제외한 5개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우의 수는 5개의 접시에 사탕을 하나씩 놓고 남은 1개의 사탕을 5개의 접시 중 하나에 담는 경우의 수이므로

${}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는 3×5=15

③ 4개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우

1번과 2번을 제외한 4개의 접시에 담는 1가지

1번과 2번을 제외한 4개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우의 수는 4개의 접시에 사탕을 하나씩 놓고 남은 2개의 사탕을 중복을 허락하여 4개의 경우에 담는 경우의 수이므로

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는 1×10=10

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$462-(6+30+10)-(1+15+10)=390$

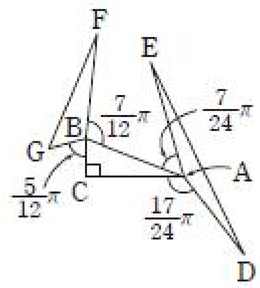
40)

[정답/모범답안]

12

[해설]

$\overline{AB}=c,\ \overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b$라 하면 $c^2=a^2+b^2$



두 삼각형 FGB, EAD에서 코사인법칙에 의해

$\overline{FG}^2=a^2+c^2-2ac\cos(\angle GBF)$ …… ㉠

$\overline{DE}^2=b^2+c^2-2bc\cos(\angle EAD)$ …… ㉡

$\angle GBF+\angle CBG+\angle ABC+\angle FBA=2\pi$이고

$\angle CBG+\angle FBA=\frac{5}{12}\pi+\frac{7}{12}\pi=\pi$이므로

$\angle GBF=\pi-\angle ABC$ …… ㉢

마찬가지로 $\angle EAD=\pi-\angle CAB$ …… ㉣

㉠과 ㉢에서

$c\cos(\angle GBF)=c\cos(\pi-\angle ABC)$

$=-c\cos(\angle ABC)$

$=-c\times\frac{a}{c}=-a$

㉡과 ㉣에서

$c\cos(\angle EAD)=c\cos(\pi-\angle CAB)$

$=-c\cos(\angle CAB)$

$=-c\times\frac{b}{c}=-b$

$\overline{FG}^2+\overline{DE}^2=(a^2+c^2+2a^2)+(b^2+c^2+2b^2)$

$=3(a^2+b^2)+2c^2$

$=3c^2+2c^2$

$=5c^2=720$

에서 $c^2=144$이므로 $c=12$

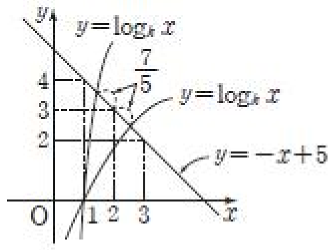
41)

[정답/모범답안]
2

[해설]
삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해
$\overline{BD}^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos A = 25 - 4 = 21$
이때 $\overline{CD} = a$, $\overline{BC} = 2a$ (a>0)라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해
$21 = a^2 + (2a)^2 - 2 \times a \times 2a \times \cos 120^\circ = 7a^2$
이므로 $a^2 = 3$
즉, $a = \sqrt{3}$
한편, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{6}$이므로 사각형 ABCD의 넓이는
(△ABD의 넓이)+(△BCD의 넓이)
$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin A + \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \sin 120^\circ$
$= 6 \times \frac{\sqrt{35}}{6} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{35} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

42)
[정답/모범답안]
5

[해설]
점 A(2, 3)을 지나고 기울기가 -1인 직선을 l이라 하면
$l : y = -x + 5$
ㄱ. $k = 4$이면 곡선 $y = \log_4 x$는 점 (4, 1)을 지난다. 이때 점 (4, 1)은 직선 l 위의 점이므로 점 P_4의 좌표는 P_4(4, 1)이다. 즉, $x_4 = 4$이다. (참)
ㄴ. $y_k = 1$이면 점 P_k의 좌표는 (4, 1)이어야 하고 ㄱ에서 $k = 4$이다.
$y_k = 2$이면 점 P_k의 좌표는 (3, 2)이어야 하고 곡선 $y = \log_k x$가 점 (3, 2)를 지나야 하므로 $2 = \log_k 3$, $k^2 = 3$, $k = \sqrt{3}$
이때 $\sqrt{3} < k < 4$이면 곡선 $y = \log_k x$는 두 점 (3, 2), (4, 1)을 양 끝 점으로 하는 선분과 만나므로 $1 \le y_k \le 2$를 만족시키는 실수 k의 범위는 $\sqrt{3} \le k \le 4$이고 k의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다. (참)
ㄷ. $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} < \frac{50}{25} = 2$이므로 $\frac{7}{5} < \sqrt{2}$
점 A(2, 3)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원과 직선 l의 교점은 (1, 4), (3, 2)이므로 점 A(2, 3)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{7}{5}$인 원과 직선 l 의 두 교점의 x좌표를 각각 $p, q\,(p < q)$라 하면
$1 < p < q < 3$
이때 1보다 큰 실수 k에 대하여 $1 < x_k < 5$이므로 $x_k = p$, $x_k = q$를 만족시키는 실수 k가 각각 하나씩 존재한다.



따라서 $\overline{AP_k} = \frac{7}{5}$을 만족시키는 1보다 큰 실수 k의 개수는 2이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

43)
[정답/모범답안]
17

[해설]
첫 번째 시행에서 나온 두 숫자가 서로 다른 사건을 X, 두 번째 시행에서 나온 두 숫자가 서로 같은 사건을 Y라 하면 구하는 확률을
$P(Y|X)$이다.
첫 번째 시행에서 두 숫자가 서로 같을 확률은
$P(X^C) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$이므로
$P(X) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$
첫 번째 시행에서 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 다르고, 두 번째 시행에서 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 같은 경우와 그 확률은 다음과 같다.
(ⅰ) 주머니 A, B에서 첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 각각 1, 4일 확률은
$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
이때 주머니 A, B에서 두 번째로 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 같을 확률은
$\frac{2}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
(ⅱ) 주머니 A에서 첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 1이고, 주머니 B에서 첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자는 2, 3 중의 하나일 확률은
$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$
이때 주머니 A, B에서 두 번째로 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 같을 확률은
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
(ⅲ) 주머니 A, B에서 첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 또는 3이면서 서로 다를 확률은
$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
이때 주머니 A, B에서 두 번째로 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 같을 확률은 0이다.
(ⅳ) 주머니 A에서 첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 또는 3이고, 주머니 B에서 첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자는 4일

확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

이때 주머니 A, B에서 두 번째로 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 같을 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$P(X\cap Y)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{9}\times 0+\frac{2}{9}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$

이므로 구하는 확률은

$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{9}}=\frac{3}{14}$

따라서 $p+q=14+3=17$

{다른 풀이}

첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 두 숫자가 서로 다른 경우의 수는 (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4)의 7이다.

이때 각 경우마다 두 번째로 꺼내는 경우의 수는 각각 2×2=4이다.

한편, 위의 각 경우마다 두 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 서로 같은 경우는 다음과 같다.

(1, 2) ⇨(3, 3)

(1, 3) ⇨(2, 2)

(1, 4) ⇨(2, 2), (3, 3)

(2, 3) ⇨없음

(2, 4) ⇨(3, 3)

(3, 2) ⇨없음

(3, 4) ⇨(2, 2)

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{7\times 4}=\frac{3}{14}$이므로 $p+q=14+3=17$

44)

[정답/모범답안]

22

[해설]

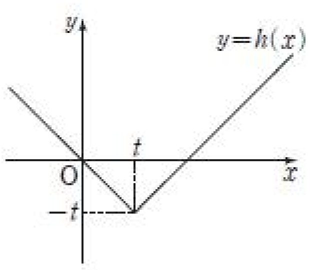
$|x-t|=f(x)+t$에서

$|x-t|-t=f(x)$

$h(x)=|x-t|-t$라 하면

$$h(x)=\begin{cases}-x & (x<t)\\ x-2t & (x\geq t)\end{cases}$$

이므로 함수 $h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



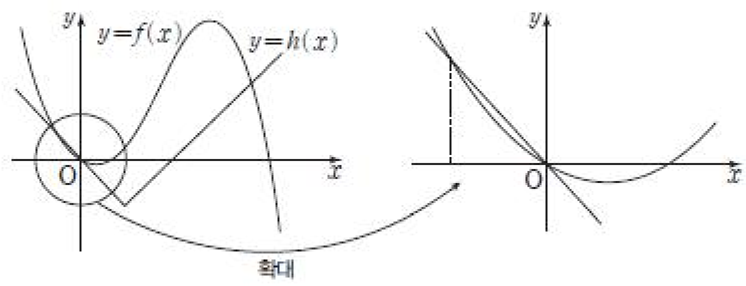
집합 A_t의 원소의 개수는 함수 $y=h(x)$의 그래프와 곡선 $y=f(x)$의 서로 다른 교점의 개수와 같고, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수이므로 $g(t)$는 1 이상의 자연수의 값을 갖는다.

이때 조건 (가), (나)에서 $g(t)=3$을 만족시키는 실수 t는 오직 $t=\frac{1}{3}$, $t=\frac{5}{12}$뿐이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프와 곡선 $y=f(x)$는 $t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=\frac{5}{12}$일 때만 서로 다른 세 점에서 만난다.

조건 (가)에서 $0\in A_{\frac{1}{3}}$, $0\in A_{\frac{5}{12}}$이고 함수 $y=h(x)$의 그래프는 $t=\frac{1}{3}$, $t=\frac{5}{12}$일 때 점 (0, 0)을 지나므로 곡선 $y=f(x)$는 점 (0, 0)을 지난다.

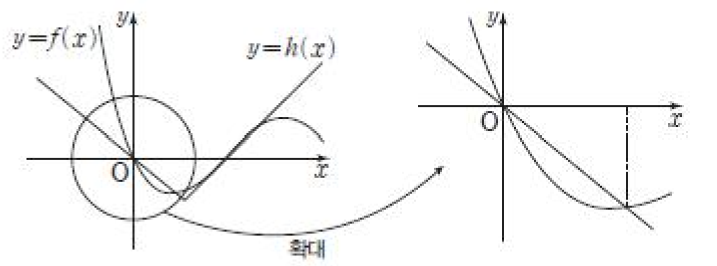
$x<t$인 경우 $h(x)=-x$이므로 $f'(0)$의 값의 범위에 따라 다음 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $f'(0)>-1$이라고 가정하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$의 위치 관계는 그림과 같고 $t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=\frac{5}{12}$일 때 방정식 $f(x)=h(x)$를 만족시키는 0보다 작은 실근이 존재한다.



이때 두 집합 $A_{\frac{1}{3}}$, $A_{\frac{5}{12}}$의 원소 중 가장 작은 원소가 0이라는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $f'(0)<-1$이라고 가정하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$의 위치 관계는 그림과 같다.



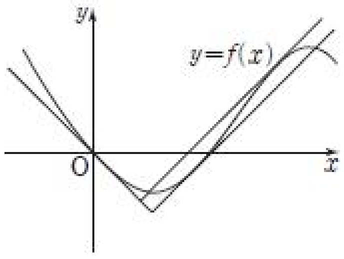
$x<\frac{1}{3}$일 때 직선 $y=-x$와 곡선 $y=f(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나면 $x\geq\frac{1}{3}$일 때 직선 $y=x-\frac{2}{3}$와 곡선 $y=f(x)$는 오직 한 점에서만 만나야 하고, $x\geq\frac{5}{12}$일 때 직선 $y=x-\frac{5}{6}$와 곡선 $y=f(x)$는 오직 한 점에서만 만나야 하므로 $\frac{1}{3}<t<\frac{5}{12}$인 모든 실수 t에 대하여 직선 $y=x-2t$와 곡선 $y=f(x)$는 오직 한 점에서만 만난다.

즉, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$x<\frac{5}{12}$일 때 직선 $y=-x$와 곡선 $y=f(x)$가 오직 한 점에서만 만나면 $x\geq\frac{1}{3}$일 때 직선 $y=x-\frac{2}{3}$와 곡선 $y=f(x)$는 서로 다른 두 점에서만 만나야 하고, $x\geq\frac{5}{12}$일 때 직선 $y=x-\frac{5}{6}$와 곡선 $y=f(x)$는 서로 다른 두 점에서만 만나야 하므로 $\frac{1}{3}<t<\frac{5}{12}$인 모든 실수 t에 대하여 직선 $y=x-2t$와 곡선

$y=f(x)$는 서로 다른 두 점에서만 만난다.
즉, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

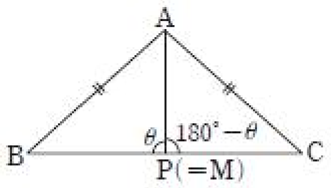
$x<\frac{1}{3}$일 때 직선 $y=-x$와 곡선 $y=f(x)$가 오직 한 점에서만 만나고 $\frac{1}{3}\le x<\frac{5}{12}$일 때 직선 $y=-x$와 곡선 $y=f(x)$가 오직 한 점에서만 만난다고 가정해도 $g(t)=3$을 만족시키는 실수 t가 $t=\frac{1}{3}$, $t=\frac{5}{12}$ 외에도 존재한다.
즉, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f'(0)=-1$이어야 하고 $g(t)=3$을 만족시키는 실수 t가 $t=\frac{1}{3}$, $t=\frac{5}{12}$ 외에 존재하지 않으므로 $t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=\frac{5}{12}$일 때 함수 $y=h(x)$의 그래프는 곡선 $y=f(x)$와 점 (0, 0) 이외에 다른 한 점에서도 각각 접한다.



조건 (가)에서 $A_{\frac{1}{3}}=\{0,\ a,\ 2\}$ $(0<a<2)$이므로 $t=\frac{1}{3}$일 때 함수 $y=h(x)$의 그래프와 곡선 $y=f(x)$는 점 (2, h(2))에서 접한다.
$t=\frac{1}{3}$일 때 $x\ge\frac{1}{3}$에서 $h(x)=x-\frac{2}{3}$이므로
$f'(2)=1$, $f(2)=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$
$f'(0)=-1$, $f'(2)=1$이므로 함수 f(x)의 최고차항의 계수를 $k(k<0)$라 하면 $f'(x)=3kx(x-2)+(x-1)$로 놓을 수 있다.
즉, $f'(x)=3kx^2-(6k-1)x-1$
이때 $f(0)=0$이므로
$f(x)=\int_0^x f'(t)dt$
$=\int_0^x\{3kt^2-(6k-1)t-1\}dt$
$=\left[kt^3-\frac{6k-1}{2}t^2-t\right]_0^x$
$=kx^3-\frac{6k-1}{2}x^2-x$
$f(2)=\frac{4}{3}$이므로
$f(2)=8k-2(6k-1)-2=-4k=\frac{4}{3}$
$k=-\frac{1}{3}$
따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x$
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-\frac{2}{3}$의 교점의 x좌표를 구하면
$-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x=x-\frac{2}{3}$에서
$2x^3-9x^2+12x-4=0$
곡선 y=f(x)와 직선 $y=x-\frac{2}{3}$는 점 (2, f(2))에서 접하므로 위의 방정식은 $x=2$를 근으로 갖고 좌변은 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다.
즉, $(x-2)^2(2x-1)=0$
$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$
따라서 $a=\frac{1}{2}$
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-\frac{5}{6}$의 교점의 x좌표를 구하면
$-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x=x-\frac{5}{6}$에서
$2x^3-9x^2+12x-5=0$
$x=1$을 대입하면 성립하므로 좌변을 인수분해하면
$(x-1)^2(2x-5)=0$
$x=1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$
$1<\frac{5}{2}$이므로 $b=1$, $c=\frac{5}{2}$
따라서
$\int_{a+\frac{1}{2}}^{c+\frac{1}{2}}\{f(x)+x\}dx=\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}\{f(x)+x\}dx$
$=\int_1^3\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)dx$
$=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^3\right]_1^3$
$=\left(-\frac{27}{4}+\frac{27}{2}\right)-\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\right)$
$=\frac{27}{4}-\frac{5}{12}=\frac{19}{3}$
따라서 $p=3$, $q=19$이므로
$p+q=3+19=22$

45)
[정답/모범답안]
5

[해설]
$\angle APB=\theta$ $(\angle ACB<\theta<180^\circ-\angle ACB)$라 하면
$\angle APC=180^\circ-\theta$이다.
이때 삼각형 ABP에서 사인법칙에 의해
$\frac{\overline{BP}}{\sin(\angle BAP)}=\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle APB)}$이고,
삼각형 APC에서 사인법칙에 의해
$\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle APC)}$이므로
$\frac{\overline{BP}}{\sin(\angle BAP)}+\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)}$
$=\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle APB)}+\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle APC)}$
$=\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}+\frac{\overline{AC}}{\sin(180^\circ-\theta)}$
$=\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}+\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}$
$=\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\sin\theta}=\frac{2\overline{AB}}{\sin\theta}$



이때 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 그림과 같이 점 P가 선분 BC의 중점 M과 일치할 때 $\theta=90°$이므로 $\sin\theta=1$이 되어 $\frac{\overline{BP}}{\sin(\angle BAP)}+\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)}$는 최솟값 $2\overline{AB}$를 갖는다.

즉, 점 P가 선분 BC의 중점 M과 일치할 때 $\overline{AP}=4$이고, $2\overline{AB}=12$에서 a=6이다.

삼각형 ABM에서 $\overline{BM}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$이므로

$b=2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

따라서 $ab=6\times4\sqrt{5}=24\sqrt{5}$

46)

[정답/모범답안]

4

[해설]

함수 $f(x)=x^3-3(x+a)x^2+12ax-3a-5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-6(a+1)x+12a$

$f'(x)=0$에서

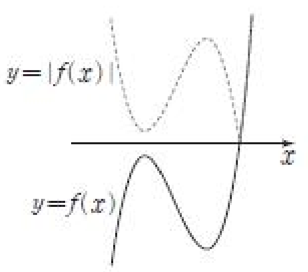
$x^2-2(a+1)x+4a=0$

$(x-2a)(x-2)=0$

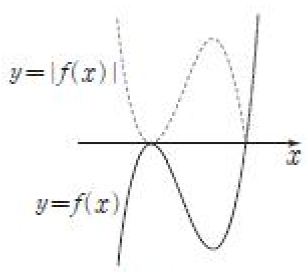
$x=2a$ 또는 $x=2$

조건 (가)에서 함수 f(x)는 극솟값 p를 가지므로 $2a\neq2$, 즉 $a\neq1$이다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=2a$ 또는 $x=2$에서 각각 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

조건 (나)에서 함수 $|f(x)|$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 값이 오직 하나 존재하고, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 극솟값 p에 대하여 p<0이므로 함수 y=f(x)의 그래프는 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

즉, 함수 f(x)의 극댓값을 q라 할 때, $q\le0$이어야 한다.

(ⅰ) a<1일 때 2a<2이므로 함수 f(x)의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(2a)=(2a)^3-3(a+1)\times(2a)^2+12a\times2a-3a-5$

$=8a^3-12a^3-12a^2+24a^2-3a-5$

$=-4a^3+12a^2-3a-5$

$f(2a)\le0$에서 $-4a^3+12a^2-3a-5\le0$

$(a-1)(2a+1)(2a-5)\ge0$

이때 a<1이므로 $(2a+1)(2a-5)\le0$, $-\frac{1}{2}\le a\le\frac{5}{2}$

즉, $-\frac{1}{2}\le a<1$

(ⅱ) a>1일 때 2a>2이므로 함수 f(x)의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(2)=2^3-3(a+1)\times2^2+12a\times2-3a-5=9a-9$

$f(2)\le0$에서 $9a-9\le0$

이때 a>1이므로 f(2)≤0을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

따라서 $-\frac{1}{2}\le a<1$일 때 함수 $f(x)$는 조건을 만족시키므로 두 집합

$A=\{a|\alpha<a<\beta\}$, $B=\left\{a|-\frac{1}{2}\le a<1\right\}$

에 대하여 A⊂B이어야 한다.

즉, $-\frac{1}{2}\le\alpha<\beta\le1$에서 $m=-\frac{1}{2}$, M=1이므로

$M+m=1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

47)

[정답/모범답안]

230

[해설]

조건 (가), (나)에 의해 f(x)=5인 집합 X의 원소 x의 개수는 1 또는 2이다.

(ⅰ) f(x)=5인 원소 x가 1개인 경우

집합 X의 원소 중에서 f(x)=5인 원소 1개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{5}f(k)=14$이므로 f(x)=5가 아닌 나머지 네 함숫값을 a, b, c, d라 하면

a+b+c+d=9 (a, b, c, d는 4 이하의 자연수)

a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1, d=d'+1이라 하면

a'+b'+c'+d'=5 (a', b', c', d'은 3 이하의 음이 아닌 정수)

이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 중복조합의 수 ${}_4H_5$에서 a', b', c', d' 중 하나가 4인 경우의 수와 5인 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

${}_4H_5-12-4={}_{4+5-1}C_5-16={}_8C_5-16={}_8C_3-16$

$=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}-16=40$

따라서 f(x)=5인 원소 x가 1개인 함수 f 의 개수는

5×40=200

(ⅱ) f(x)=5인 원소 x가 2개인 경우

집합 X의 원소 중에서 f(x)=5인 원소 2개를 택하는 경우의 수는

$_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{5}f(k)=14$이므로 f(x)=5가 아닌 나머지 세 함숫값을 a, b, c라 하면

a+b+c=4 (a, b, c는 4 이하의 자연수)

이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)의 3이다.

따라서 f(x)=5인 원소 x가 2개인 함수 f 의 개수는

10×3=30

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 함수 f 의 개수는

200+30=230

48)

[정답/모범답안]

94

[해설]

삼각함수 $f(x)$를

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, a>0)라 하자.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로 $f'(0)=-28$에서 $c=-28$

또한 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

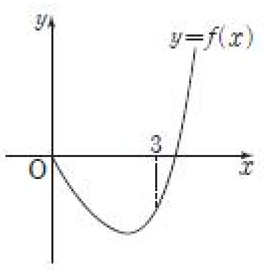
$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)$에서

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}\{-f(-x)\}=f(0)$

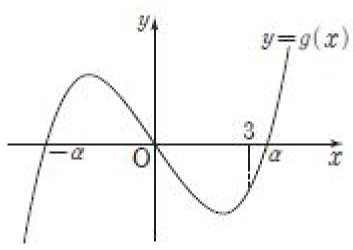
즉, $f(0)=-f(0)$이므로 $f(0)=0$, $d=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $f(x)=ax^3+bx^2-28x$이다.

이때 $a>0$이고 $f(0)=0$, $f(3)<0$이므로 $x\ge0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



한편, 함수 $g(x)$에서 $x<0$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x>0$일 때의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프이므로 양수 a에 대하여 f(a)=0이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $G(x)$를 $G(x)=\int_2^x g(t)dt$라 하면 G(2)=0이고 $G'(x)=g(x)$이다.

또한 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-x}^{x}g(t)dt=0$이므로

$\int_{-x}^{2}g(t)dt+\int_{2}^{x}g(t)dt=0$

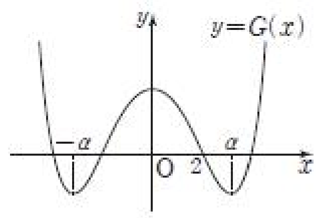
$-\int_{2}^{-x}g(t)dt+\int_{2}^{x}g(t)dt=0$

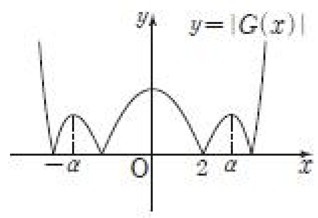
$-G(-x)+G(x)=0$이므로 $G(x)=G(-x)$

즉, 함수 $y=G(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 함수 $G(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=-a$와 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

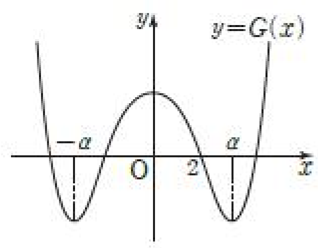
이때 0<2<3<a이므로 G(0)과 G(a)의 값에 따라 함수 $y=G(x)$의 그래프와 함수 $y=|G(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

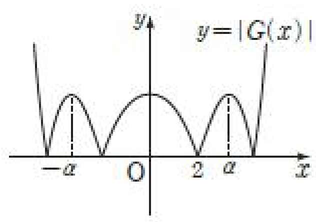
(ⅰ) $G(0)>|G(\alpha)|$일 때



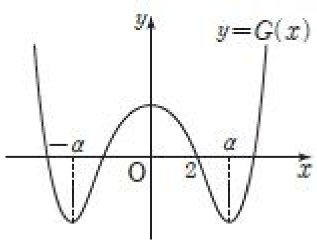


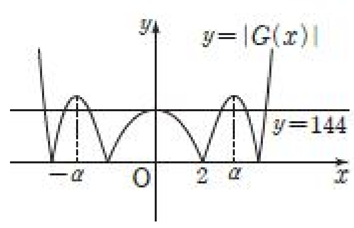
(ⅱ) $G(0)=|G(\alpha)|$일 때





(ⅲ) $G(0)<|G(\alpha)|$일 때





n(A)=7이므로 방정식 $|G(x)|=144$의 서로 다른 실근의 개수가 7이려면 함수 $y=G(x)$의 그래프와 함수 $y=|G(x)|$의 그래프는 (ⅲ)의 경우만 가능하고, 이때 G(0)=144이다.

$G(0)=\int_{2}^{0} g(x)dx$

$=-\int_{0}^{2} g(x)dx$

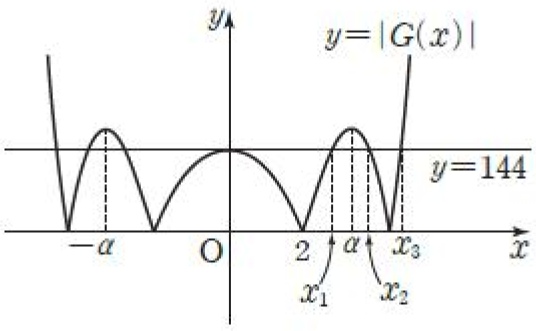
$=-\int_{0}^{2} f(x)dx$

$=-\int_{0}^{2}(ax^3+bx^2-28x)dx$

$=-\left[\frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{3}bx^3-14x^2\right]_0^2$

$=-4a-\frac{8}{3}b+56=144$

이므로 $a+\frac{2}{3}b=-22$ …… ㉠



그림과 같이 방정식 $|G(x)|=144$의 서로 다른 세 양의 실근을 x_1, x_2, $x_3(x_1<x_2<x_3)$이라 하면 $3\in A$, $\alpha>3$에서 $x_1=3$이고, G(3)=-144이다.

$G(3)=\int_{2}^{3} g(x)dx$

$=\int_{2}^{3} f(x)dx$

$=\int_{2}^{3}(ax^3+bx^2-28x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{3}bx^3-14x^2\right]_2^3$

$=\frac{65}{4}a+\frac{19}{3}b=-74$ …… ㉡

㉡-㉠$\times\frac{19}{2}$를 하면 $\frac{27}{4}a=135$에서 a=20

이것을 ㉠에 대입하면 b=-63

즉, $f(x)=20x^3-63x^2-28x$

$f'(x)=60x^2-126x-28$이므로

$f'(1)=60-126-28=-94$

따라서 $|f'(1)|=94$

49)

[정답/모범답안]

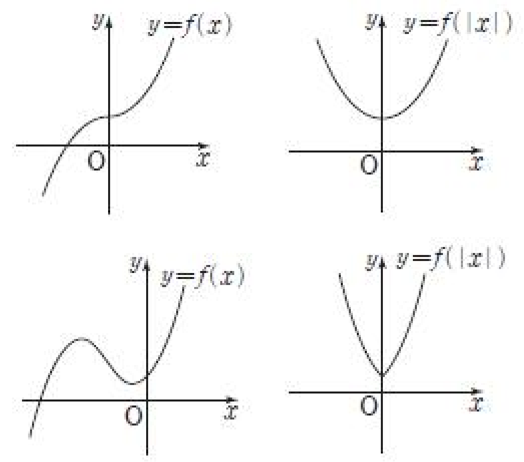
5

[해설]

ㄱ. 함수 $y=f(x)$는 삼차함수이므로 $x>0$에서 극값을 가지는 x의 값의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(ⅰ) $x>0$에서 함수 $y=f(x)$가 극값을 가지는 x의 값의 개수가 0인 경우

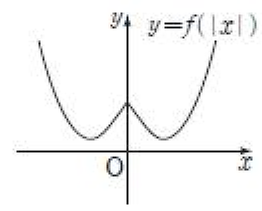
함수 $y=f(x)$와 함수 $y=f(|x|)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이 경우 $m=1$

(ⅱ) $x>0$에서 함수 $y=f(x)$가 극값을 가지는 x의 값의 개수가 1인 경우

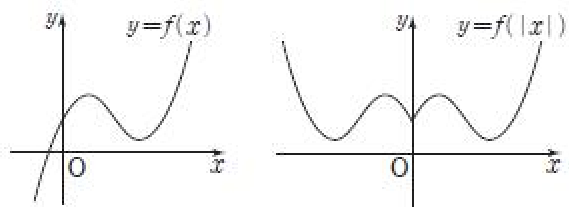
함수 $y=f(x)$와 함수 $y=f(|x|)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이 경우 $m=3$

(ⅲ) $x>0$에서 함수 $y=f(x)$가 극값을 가지는 x의 값의 개수가 2인 경우

함수 $y=f(x)$와 함수 $y=f(|x|)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



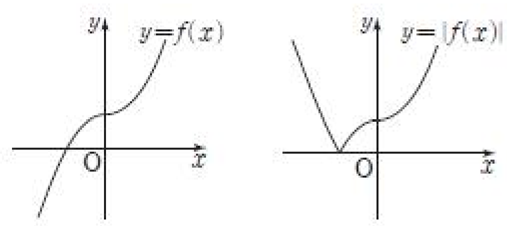
이 경우 $m=5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 1≤m≤5이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$는 삼차함수이므로 극값을 가지는 x의 값의 개수는 0 또는 2이다.

(ⅰ) 함수 $y=f(x)$가 극값을 가지는 x의 값의 개수가 0인 경우

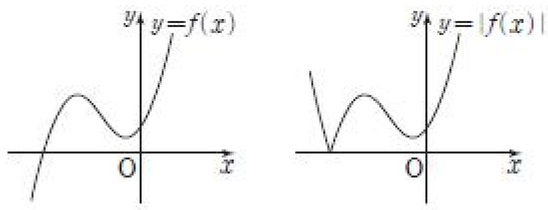
함수 $y=f(x)$와 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

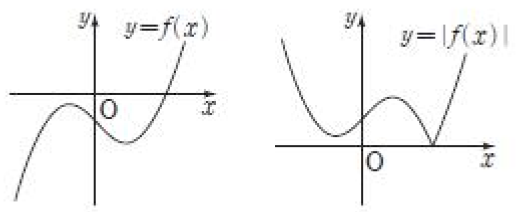


이 경우 n=1

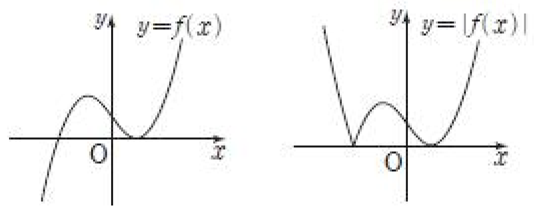
(ⅱ) 함수 $y=f(x)$가 극값을 가지는 x의 값의 개수가 2인 경우

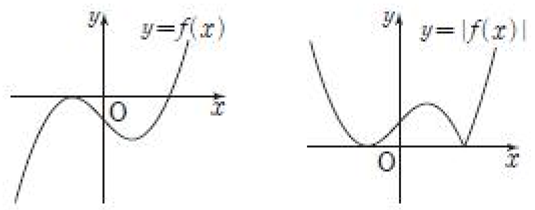
① (극댓값)_(극솟값)>0



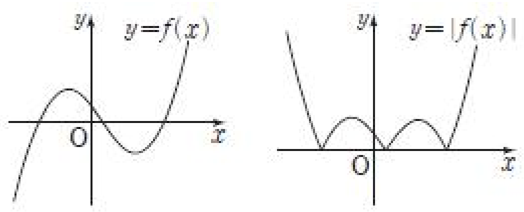


이 경우 n=3
② (극댓값)_(극솟값)=0

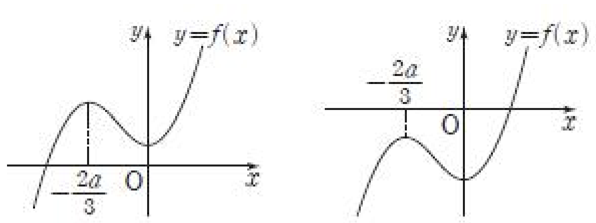




이 경우 n=3
③ (극댓값)_(극솟값)<0



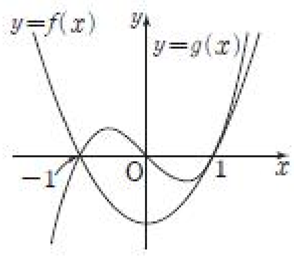
이 경우 n=5
(ⅰ), (ⅱ)에서 n의 값은 1 또는 3 또는 5이므로 n의 값은 2도 아니고 4도 아니다. (참)
ㄷ. m+n=4에서
m=1, n=3 또는 m=3, n=1
그런데 ㄱ, ㄴ의 그림에서 m=3, n=1은 될 수 없다.
따라서 m=1, n=3
b=0이므로 $f(x)=x^3+ax^2+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax=3x\left(x+\frac{2a}{3}\right)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2a}{3}$
m=1이어야 하므로 $-\frac{2a}{3}\le 0$, 즉 $a\ge 0$이다.



n=3이기 위해서는 $a\ne 0$이고 $f(0)=c\ge 0$ 또는 $f\left(-\frac{2a}{3}\right)\le 0$이다.
$f\left(-\frac{2a}{3}\right)=\left(-\frac{2a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2+c\le 0$
따라서 a>0이고 c의 값의 범위는
c≥0 또는 $c\le -\frac{4}{27}a^3$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

50)
[정답/모범답안]
2

[해설]
$f(x)=x^2-1$, $g(x)=xf(x)=x^3-x$이고
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는
$x^2-1=x^3-x$에서
$x(x^2-1)-(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)=0$
따라서 $x=-1$ 또는 $x=1$
이때 $f'(x)=2x$, $g'(x)=3x^2-1$이므로
$f'(-1)=-2, g'(-1)=2$
$f'(1)=g'(1)=2\cdots\cdots$ ㉠



조건 (가), (나)에서 함수 h(x)는 세 구간 (-∞, -1), [-1, 1], (1, ∞)에서 각각 h(x)=f(x) 또는 h(x)=g(x)이어야 한다.
한편, 두 함수 f(x), g(x)가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 h(x)는 세 구간 (-∞, -1), (-1, 1), (1, ∞)에서 모두 미분가능하다.
이때 ㉠에서 함수 h(x)는 x=1에서 항상 미분가능하므로 조건 (다)에서 함수 h(x)는 x=-1에서 미분가능하지 않아야 한다.
따라서 구간 (-∞, -1)에서 h(x)=f(x)이면 구간 [-1, 1]에서 h(x)=g(x)이어야 하고, 구간 (-∞, -1)에서 h(x)=g(x)이면 구간 [-1, 1]에서 h(x)=f(x)이어야 한다.
이때 구간 (1, ∞)에서 h(x)=f(x) 또는 h(x)=g(x)이다.
따라서 구하는 함수 h(x)의 개수는
2×2=4

51)
[정답/모범답안]
75

[해설]
$\frac{a_{k+2}-a_k}{a_ka_{k+2}}=\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}$이므로
$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+2}-a_k}{a_ka_{k+2}}$
$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$

$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_9}-\frac{1}{a_{11}}\right)+\left(\frac{1}{a_{10}}-\frac{1}{a_{12}}\right)$

$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{11}}-\frac{1}{a_{12}}$

$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{a_{11}+a_{12}}{a_{11}a_{12}}$

조건 (가)에서

$a_1=S_1=1$, $a_2=S_2-S_1=3-1=2$

$a_{11}+a_{12}=S_{12}-S_{10}=13-10=3$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+2}-a_k}{a_k a_{k+2}}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{a_{11}+a_{12}}{a_{11}a_{12}}$

$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{3}{a_{11}a_{12}}$

$=\frac{3}{2}-\frac{3}{a_{11}a_{12}}=-\frac{5}{2}$

따라서 $\frac{3}{a_{11}a_{12}}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$에서 $a_{11}a_{12}=\frac{3}{4}$이므로

$100\times a_{11}\times a_{12}=100\times\frac{3}{4}=75$