수학Ⅰ - 지수·로그함수

2020. 11. 21

김상범

지수와 로그

1. 거듭제곱근

방정식 $x^n = a$를 만족시키는 근 x를 'a의 n제곱근' 이라고 한다.

ex) $x^3 = 4$의 근 = 4의 세제곱근

a의 n제곱근 중 실수인 것은 기호 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 나타낼 수 있다.

ex) 8의 4제곱근 = $\sqrt[4]{8}$

그리고 a의 부호에 따라 실수인 제곱근의 개수가 달라진다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$ 1개	0 1개	$\sqrt[n]{a}$ 1개
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$ 2개	0 1개	X 0개

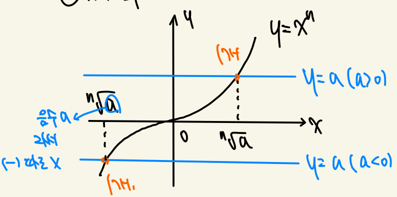
짝수제곱하면 부호는 상관없잖아?

짝수제곱해서 음수가 될 수는 X

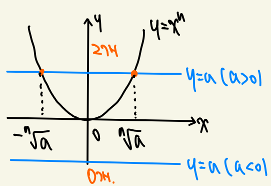
ex) $4^2 \neq -16$

이것을 그래프로 볼 수 있다.

① n이 홀수



② n이 짝수



∘ 거듭제곱근의 성질 → 이제는 자유자재로 볼 수 있어야함.

① $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

2. 지수에 대한 FACT + 지수법칙

(1) 지수가 0 또는 음수일 때

$a \neq 0$ 이고 m, n이 자연수일 때

① $a^0 = 1$

그나마 설명하자면 → 곱셈의 기본은 $\underbrace{1\times}$를 깔아주는 것이라 생각하자.

예를 들어 $3^4 = \underbrace{1\times}3\times3\times3\times3$

그렇다면 $3^0 = \underbrace{1\times}$ 없네?. $= 1$ 이다.

관용구 같은 느낌으로 보자. 가끔 $a^0 = 0$ 이다!

이런 실수만 안하기 위해 노력하자.

② $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

지수법칙으로 설명 → $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 이므로 $a^n \cdot a^{-n} = \underbrace{a^0}_{①} = 1$

그렇다면 a^{-n}은 a^n의 $\underbrace{\text{역수}}_{\text{서로 곱하면 1}}$이어야 하므로 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

(2) 지수법칙 → 계산의 기초가 된다.

실수인 수 x, y에 대하여 ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

① $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

② $a^x \div a^y = a^x \cdot \dfrac{1}{a^y} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

③ $(a^x)^y = a^{xy}$

④ $(ab)^x = a^x b^x$

3. 로그

(1) 로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x = N$을 만족시키는 x를

$x = \log_{\underbrace{a}_{\text{밑}}} \underbrace{N}_{\text{진수}}$ 이라고 나타낸다.

밑 → 밑에 있으니까?

로그는 우리에게 생소하기에 이해하기 어려운 상황에서는

아래와 같이 지수로 이해할 수 있다.

① a의 x제곱(a^x)은

$\log_a N = x$

② N이다.

ex)

① 2의 6제곱(2^6)은

$\log_2 64 = 6$

② 64이다.

(2) 로그의 성질 (밑은 $a \neq 1$, $a>0$ 진수 $N>0$)

① $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

로그의 진수에서의 곱셈은 덧셈

② $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

로그의 진수에서의 나눗셈은 뺄셈

③ $\log_a M^n = n\log_a M$

↳ 지수를 밖으로 뺄 수 있다.

④ $\log_a 1 = 0 \Rightarrow a^0 = 1$

지수에서 봤던거.

(3) 로그의 밑변환 → 로그의 성질을 쓰기 위해 밑을 맞추는 과정

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

위는 위로

아래는 아래로

내가 필요로 하는 밑 생성

밑변환을 통해 여러가지 활용안들이 나왔다. → 결과에 집중

① $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$

밑을 b로 설정

역수 + 밑, 진수 위치 바뀜

② $\log_a b \times \log_b c = \frac{\cancel{\log_a b}}{\log_a a} \times \frac{\log_a c}{\cancel{\log_a b}} = \frac{\log_a c}{\log_a a} = \log_a c$

밑을 a로

③ $\log_{a^m} b^n = \frac{\log_a b^n}{\log_a a^m} = \frac{n\log_a b}{m\log_a a} = \frac{n}{m}\log_a b$

밑을 a로 설정

지수는 앞으로

④ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

서로 위치 SWAP 가능

(4) 상용로그 → 밑이 10인 로그

예 따로 이름이 있지!

↳ 우리가 쓰는 수는 10진법이라서.

솔직히 말하면 예전의 교육과정처럼 킬러 소재는 아니다.

하지만 중요한 순간에서 기억이 안나면 그게 킬러가 되므로

(필자는 2019학년도 6월에 9번을 해결하지 못해 92→84가 되었지)

준비하도록 하자.

밑이 10인 로그를 '상용로그'라고 하고 밑을 생략하여 쓴다.

$$\log N$$

생략

10의 거듭제곱에 대한 개념이므로 기본적으로 자릿수의 개념을 가지고 있다. → 로그 + 자릿수 문제면 떠올리자.

ex) $\log_{10} 1000 = x \Rightarrow 10^x = 1000 \Rightarrow x=3$ 이 수는 $\underbrace{(3+1)}_{4}$자리 수이다.

ex) 2^{30}의 몇 자릿수인가?

A. $\log 2^{30} = 30\log 2 = 30 \times 0.3010$

지수는 앞으로 / 상용로그로 / $\log 2$

$= 9.03$ 이므로 $(9+1)=10$ 자릿수.

지수함수와 로그함수

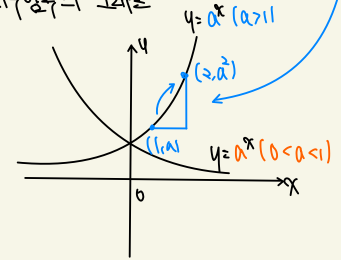
1. 지수함수

지수형태를 가지는 함수관계를 뜻한다.

$f(x) = y = a^x$ 의 형태이다.

(다르게 해석해보면 투입값이 1 증가하면 결과값이 a배가 되는 함수이다.)

(2) 지수함수의 그래프



• $y=a^x$의 그래프는 무조건 (0,1)을 지나고 점근선을 가짐

정점 / $y=0$

a>1일때

• a의 절댓값(|a|)이 크면 클수록 y축에 가까워진다.

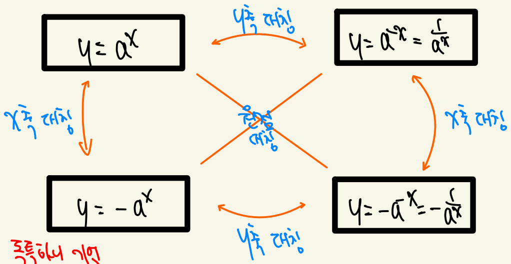
증가폭이 커진다.

ex) $2^2 \xrightarrow{12} 2^4$ $8^2 \xrightarrow{4032} 8^4$

(3). 지수함수 그래프의 이동

모든 그래프는 x축 방향으로 m, y축 방향으로 n 만큼

이동하면 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.



똑똑하니 기억.

특이한 그래프의 이동

$y = a^{x-m}$ 만 x축 방향 이동이 아니다. $y = b \cdot a^x$ 로 x축 방향 이동

ex) $y = 5 \cdot 2^x$: $5^{\log_2 2} \cdot 2^x = 2^{\log_2 5} \cdot 2^x$

$= 2^{\underbrace{x + \log_2 5}}$ x축 방향으로 $-\log_2 5$ 이동

(4). 지수함수의 최대 · 최소

변형되지 않은 $y = a^x$ 의 그래프는 $\underbrace{\text{한 가지의 방향성만}}_{\text{증가 or 감소}}$

가지므로 정의가 최대·최소이다.

2. 로그함수

로그의 형태의 함수관계를 뜻한다.

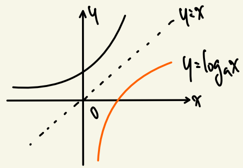
$f(x) = y = \log_a x$ 의 형태이다.

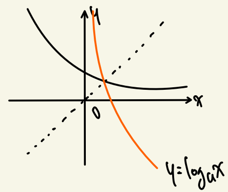
다르게 해석해보면 $\underbrace{\text{독립값이}}_{x}$ a배가 되면 $\underbrace{\text{결과값이}}_{y}$ 1 증가한다.

지수함수와 같이 배우는 이유는 서로 역함수이기 때문이다.

(2) 로그함수 $y = \log_a x$ 의 그래프

① $a > 1$ ② $0 < a < 1$





- 그래프 $y = \log_a x$ 는 무조건 $\underbrace{(1, 0)}_{\text{정점}}$을 지나고 $y = x$를 축으로 $\underbrace{y = a^x \text{ 와 대칭이다.}}_{\text{서로 역함수니까.}}$
- a의 절댓값$(|a|)$이 작아질수록 x축에 가까워진다.

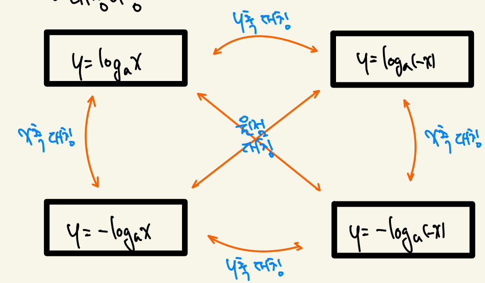
(3) 로그함수의 이동

- 평행이동

모든 그래프는 x축 방향으로 m, y축 방향으로 n 만큼

이동하면 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

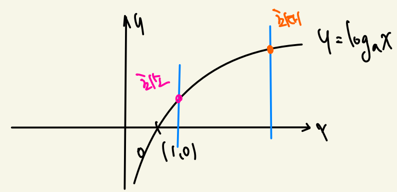
- 대칭이동



(4). 로그함수의 최대 · 최소

로그함수 역시 한 가지의 방향성을 가지기에

구간의 경계가 최대 · 최소이다.



문제에서의 TIP

- 만약 식을 정리하다가 (지수식) = (로그식)의 형태가 나오면 빠르게 돌아가자. 절대 해결 X
- 미분, 적분과 비슷하게 출제 의도와 어긋나면 계산이 복잡해지므로 아니다 싶으면 다른 방법 모색하자.