삼각함수 (각변환 + 사인, 코사인 법칙

2020.11.19

심상범

삼각함수의 주기

삼각함수의 그래프 부분에서 기본적인 삼각함수의 주기는 배웠었다.

ex) $\sin x$, $\cos x$ 의 주기 : 2π
$\tan x$ 의 주기 : π

불행히도 우리가 만날 문제에서는 이렇게 단순한 친구들만 나오지 않는다.

실수 a, b, c에 대하여

$$\boxed{a\sin bx + c,\ a\cos bx + c,\ a\tan bx + c}$$

같은 형태를 많이 만나게 될 것이다.

앞에서도 sin, cos의 그래프를 같이 보았으므로 이번에도 한 번에 다뤄보자.
위치만 다른 같은 모양의 그래프이므로...

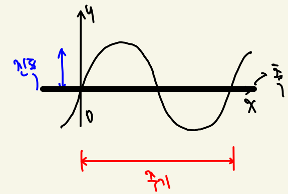
• sin, cos 에서의 성질

$a\sin bx + c$, $a\cos bx + c$ 와 같이 썼을 때

a는 그래프의 진폭, b는 주기, c는 그래프의 축을 결정한다.
위아래로 움직이는 정도
반복의 핵심 원은 반복이 중요.

$$\underbrace{a}_{\text{진폭}}\sin \underbrace{b}_{\text{주기}}x + \underbrace{c}_{\text{축의 위치}}$$

$$\overbrace{a}^{\text{진폭}}\cos \overbrace{b}^{\text{주기}}x + \overbrace{c}^{\text{축의 위치}}$$



식이 위와 같을 때 식의 주기는

$\boxed{주기 = \dfrac{2\pi}{|b|}}$ 이다. 기본적인 cos, sin의 주기가 2π이므로

식에서 b가 커질수록 반복의 주기가 짧아지므로 '절댓값'으로 나눠준다.

• tan 에서의 성질

$a\tan bx + c$ 라고 썼을 때

a는 y값의 변화도를 나타낼 수 있으나 중요치 않고

b가 주기에 영향을 주고 c가 그래프의 축을 결정짓는다.

반복의 핵심 → 원은 반복!

식이 위와 같다면 주기는 $\boxed{주기 = \dfrac{\pi}{|b|}}$ 로 구한다. tan의 주기가 π이므로

식에서 b가 커질수록 반복의 주기가 짧아지므로 '절댓값'으로 나눠준다.

삼각함수의 각변환

→ 전 수험생 때 이게 제일 어려웠어요...

삼각함수를 다루면서 이제는 각 안에 미지수만 넣는 것이 아니라 수로 넣어서 표현한다. 하지만 우리는 각에도 미지수만 있는 것이 편하기에 바꿔주는 과정이 각변환이다.

핵심 : 각 부분에는 미지수만 남기자.

자세한 예시를 들어 설명할 수도 있으나 수능 직전에 빠르게 보는 자료이므로 예시를 이용하여 방법을 서술하겠다.

ex) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

① 각에서 미지수를 제외하고 $\frac{n}{2}\pi$의 형태로 바꾸고 각은 미지수만 둔다.

n이 짝수: 삼각함수 종류를 그대로 가지고 간다.

n이 홀수: sin → cos, cos → sin, tan → cot로 바꿔준다.
sin과 cos의 그래프는 x축 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 차이나서.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ 에서 $\frac{\pi}{2}$는 $n=1$ 이므로 sin → cos 으로 바꾸고 각은 θ만 두자 ⇒ $\cos\theta$

② θ가 예각이라고 생각하고 구한 원래 함수의 부호를 붙여준다.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ 에서 θ가 예각이라면 $\frac{\pi}{2}+\theta$는 제2사분면의 각이다. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$의 부호는 (+) 이므로 $(+)\cos\theta$ 이다.

각변환에 대해서는 방법을 숙지하고 많은 연습량을 가져가시는 것이 제일 좋습니다... 화이팅

그런 의미에서 예제들을 풀어보시면서 연습해주세요.
↳ 질문은 저한테 해주세요.

① $\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)$ A. $\cos\theta$

② $\tan(2\pi+\theta)$ A. $\tan\theta$

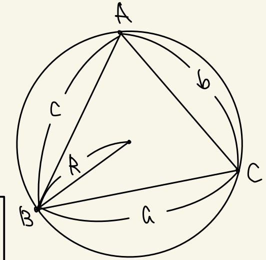
③ $\sin(\pi+\theta)$ A. $-\sin\theta$

사인법칙과 코사인법칙

잡담을 조금 하자면 필자(2019, 2020 학년도 수능 응시)가 시험볼때 치트키로 통했던 두 개의 법칙이다. 사실 모의고사를 볼 때 본인만 몰라 억울했던 기억이 난다.

• 사인법칙

삼각형이 원에 내접할 때 아래와 같다.



$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$$

식만 보고는 아무것도 할 수 없으니 활용되는 경우의 수를 보자.

① 문제에서 외접원이 그려져있지 않더라도 외접원의 흔적이 보인다면 사인법칙을 떠올리자.
(원주각 등등)

② 외접원의 반지름과 한 변 → 이에 대응하는 각 구하기 가능

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

③ 한 각과 마주보는 변의 길이를 아는 경우 → 다른 각과 변의 비율을 알 수 있다.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

혼자 공부하면서 엄청 힘든 기억이 있어서...

④ sin 간의 비율 or 변의 길이 간의 비율을 줄 때
→ 비율은 그대로 따라간다.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

예) $\sin A:\sin B:\sin C=3:1:4$ 이다 (전제)

R인 어떤 수이던 정해진 실수이다. $2R=K$ 라고 해보자.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=K$$

$\sin A:\sin B:\sin C=3:1:4$ 이므로

$a=3K$, $b=K$, $c=4K$ 이다.

즉, $a:b:c=3:1:4$ 이네.
사인값의 비율과 같다...

$\boxed{\text{정리}}$

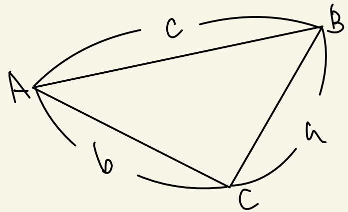
위의 네 가지 방법 이외에도 문제에서 활용될 방법은 무궁무진하다. 그럼에도 당신께 해주고 싶은 말은

사인법칙은 비율을 찾아낼 때 많이 쓰이고 문제를 전개하는 과정에 많이 쓰인다.

ㅇ 코사인법칙

'모든' 삼각형에 대해 성립하는 식이다. → 그렇기에 삼각형이라면 난사해도 됩니다.

코사인법칙은 피타고라스 공식의 일반화라고도 할 수 있고 현우진 선생님의 말씀을 빌리자면 '유일하게 자로 각을 잴 수 있는 정리이다'.



$$\underbrace{c^2}_{\text{구하고자 하는 변}} = a^2+b^2-2ab\underbrace{\cos C}_{\text{구하고자 하는 변의 대각}}$$

다른 책들에는 식을 변형하여 외우게 시키는 경우도 있지만 필자는 저 위의 식만 외우고 각각의 자리에 무엇이 들어가야 하는지 이해하고 있는 것이 더 중요하다.

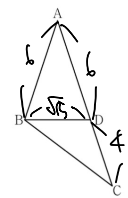
정리

코사인법칙은 실측값을 구할 때 많이 쓰이고 문제를 끝맺을 때 자주 사용된다.

사인법칙, 코사인법칙의 예시 문제

12. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이는? [3점]

① $\sqrt{37}$ ② $\sqrt{38}$ ③ $\sqrt{39}$ ④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{41}$



2021.09.(가)

BC의 길이를 구하기 위해서는 코사인법칙이 필요하다.

$$\overline{BC}^2 = \underbrace{\overline{AB}^2}_{6}+\underbrace{\overline{AC}^2}_{10}-2\cdot\underbrace{\overline{AB}}_{6}\cdot\underbrace{\overline{AC}}_{10}\cdot\cos A$$

← 각 A를 모르겠네...

cosA를 구하려면? → △ABD에서 코사인법칙으로

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\cos A=\overline{BD}^2 \Rightarrow \cos A=\frac{57}{72}$$

$$\overline{BC}^2=36+100-120\cdot\frac{57}{72}=41 \Rightarrow \boxed{\overline{BC}=\sqrt{41}}$$

각에 대한 정보가 많지 않아 코사인법칙으로 처리한 문제이다.

10. 삼각형 ABC 에서

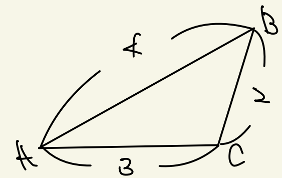
$$\frac{a=2}{\sin A}=\frac{b=3}{\sin B}=\frac{c=4}{\sin C}$$

일 때, $\cos C$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2020년 9월 시행 고2 교육청

식만 멀뚱멀뚱 바라본다고 해결이 되는 것이 아니니 △ABC를 대략 그려보자.



cos C가 궁금하므로 코사인법칙을 쓰자.

$$\underbrace{\overline{BC}^2}_{2}+\underbrace{\overline{AC}^2}_{3}-2\underbrace{\overline{AC}}_{3}\cdot\underbrace{\overline{BC}}_{2}\cdot\cos C=\underbrace{\overline{AB}^2}_{4}$$

$$\boxed{\cos C=-\frac{1}{4}}$$