수학 I - 2. 삼각함수 (~ 124포)

2020. 11. 18

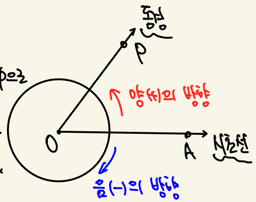
심생빌 → 박진.

삼각함수

삼각함수는 각을 새로운 방식으로 정의한다.

왜? └ 기존 각에는 °(도) 라는 단위가 있어서 계산하기 힘듦

시초선과 동경



그림에서의 ∠AOP는 반직선 OA와 OP으로 만들어진 도형이다. 이때 반직선 OA를 시초선, 반직선 OP를 동경이라고 한다.

※ 시초선은 내 맘대로 정하는 것이나 대부분의 문제에서 x축 방향으로 잡는다.

각의 부호는 반시계 방향이 양(+)의 방향, 시계 방향이 음(-)의 방향이다.

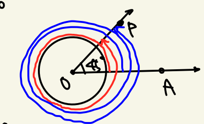
일반각 → 한 바퀴 돌면 제자리라는 원의 성질 이용.

∠AOP의 크기 중 하나를 α° 라고 할 때 동경 OP가 나타내는 각을 이렇게 나타낼 수 있다.

$$\boxed{\underbrace{360^\circ}_{\text{한 바퀴}} \times \underbrace{n}_{\text{정수}} + \alpha^\circ}$$

이렇게 쓴 것을 ∠AOP의 일반각이라고 한다.

ex) ∠AOP = 45°



∠AOP = 360°×1+45° = 405°

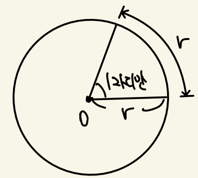
∠AOP = 360×2+45° = 765°

⋮

} 모두 ∠AOP를 나타낸다.

호도법과 라디안

반지름이 r인 원에서 호의 길이가 반지름 r과 같을 때 부채꼴의 중심각을 1라디안 (1rad) 이라고 한다.



라디안을 도입하여 각을 표현하는 것을 '호도법' 이라고 한다.

※ '라디안' 이라는 단위는 뭘까…?

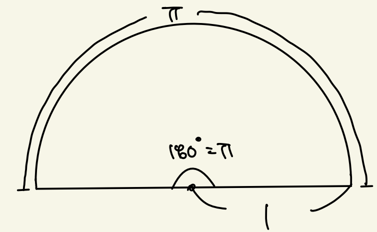
A. 명목상 붙여놓은 것이라 계산할 때는 없다고 생각하자.
실수라고 생각하고

ex) 6cm × 1라디안 = 6cm

원에서 중심각과 호는 비례하므로 반지름이 r,
(중학교 때 배움)

중심각은 θ, 호의 길이를 l 이라고 하면

$$\underbrace{l}_{\text{호의 길이}} = \underbrace{r}_{\text{반지름}} \cdot \underbrace{\theta}_{\text{중심각}}$$ 라고 할 수 있다.



$l = r \cdot \theta$ 이므로

$\pi = 1 \cdot \theta$ $\theta = \pi$ 그런데 $\theta = 180^\circ = \pi$

$\pi = 180^\circ$로 여러가지 각을 쉽게 계산하자.

육십분법	30°	45°	60°	90°	180°	360°
라디안	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

둘이 곱하면 180.

※ 라디안도 수야 수!

우리가 옛날에 $\pi = 3.141592\ldots$ 라는 것을 본 적이 있다.

그것을 활용해보면

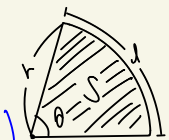
$\frac{\pi}{3} = 1.047\ldots\ldots$ 이므로 $\frac{\pi}{3} > 1$ 이다.

더 활용해보자면

$\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}$, $\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$

부채꼴의 호의 길이와 넓이

$l = r\cdot\theta$



$S = \frac{1}{2}\cdot r\cdot l$

$= \frac{1}{2}\cdot r\cdot r\theta = \frac{1}{2}r^2\theta$

주는 조건에 따라 선택

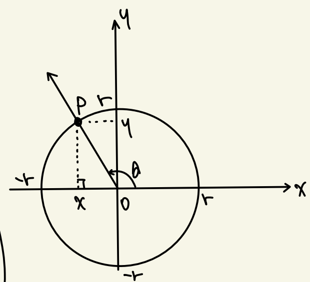
(호의 길이를 준다 → 위

반지름+각 → 아래.

삼각함수의 정의

x축의 방향을 시초선으로 하고

동경이 오른쪽 그림과 같을 때



x와 연관

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{'x'좌표}}{\text{반지름}}$

y와 연관

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{'y'좌표}}{\text{반지름}}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{'y'좌표}}{\text{'x'좌표}}$

→ 기울기와 비슷?

→ 왜 '좌표'를 강조하나요?

A. 그래야 부호를 이해하기 쉬움.

※ 추가

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{r}{x}$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{r}{y}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{x}{y}$

※ 활용되는 경우

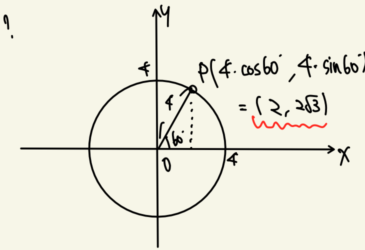
좌표평면의 원점 O에서 점 P에 대하여 $\overline{OP} = r$ 이라 하고

반직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

점 P의 좌표를 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$으로 쓸 수 있다.

ex) $\overline{OP} = 4$, $\overrightarrow{OP}$이 x축과 이루는 각 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 라면

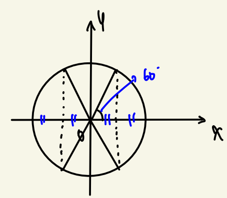
P의 좌표는?

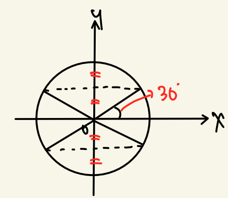


$P(4\cdot\cos 60°, 4\cdot\sin 60°)$

$= (2, 2\sqrt{3})$

※ $\frac{\pi}{6}$ (=30°)와 $\frac{\pi}{3}$ (60°)의 특이점.





• x축과 $\frac{\pi}{3}$ 차이나는 각들의 x좌표는 반지름의 $\frac{1}{2}$ 이다.

• x축과 $\frac{\pi}{6}$ 차이나는 각들의 y좌표는 반지름의 $\frac{1}{2}$이다.

왜? $\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$ 이니까.

삼각함수 사이의 관계 → 모두 알아둬서 활용할 수 있을 정도로

① $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

왜 그럴까...

자세해줌

$\boxed{\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

이건 직접해보세요.

$\tan\theta = \frac{\text{y좌표}}{\text{x좌표}}$, $\sin\theta = \frac{\text{y좌표}}{\text{반지름}}$, $\cos\theta = \frac{\text{x좌표}}{\text{반지름}}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

적용!

$\frac{\text{y좌표}}{\text{x좌표}} = \frac{\frac{\text{y좌표}}{\text{반지름}}}{\frac{\text{x좌표}}{\text{반지름}}} = \frac{\text{y좌표}}{\text{x좌표}}$

이렇게 보니 당연하네

② $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 주의! : 진짜 많이 쓴다....

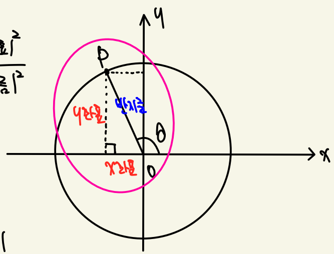
$\sin\theta = \frac{\text{y좌표}}{\text{반지름}}$, $\cos\theta = \frac{\text{x좌표}}{\text{반지름}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta$

$= \frac{(\text{y좌표})^2}{(\text{반지름})^2} + \frac{(\text{x좌표})^2}{(\text{반지름})^2}$

$= \frac{(\text{x좌표})^2 + (\text{y좌표})^2}{(\text{반지름})^2}$

$= \frac{(\text{반지름})^2}{(\text{반지름})^2} = 1$



③ $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$

ㄴ 얘도 계산할 때 많이 쓰임. secθ랑 csc가 그나마 쓰이게 되는 식.

tanθ, secθ, cscθ의 설정은 앞의 설명을 가져오자.

• $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

$$1+\frac{(y좌표)^2}{(x좌표)^2} = \left(\frac{반지름}{x좌표}\right)^2$$

$$\frac{(x좌표)^2+(y좌표)^2}{(x좌표)^2} = \frac{(반지름)^2}{(x좌표)^2}$$

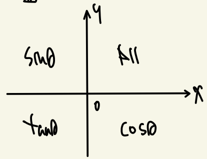
• $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$

$$1+\left(\frac{x좌표}{y좌표}\right)^2 = \left(\frac{반지름}{y좌표}\right)^2$$

$$\frac{(y좌표)^2+(x좌표)^2}{(y좌표)^2} = \frac{(반지름)^2}{(y좌표)^2}$$

삼각함수의 부호

학교에서는



으로 알려주는 것으로 알고 있는데 조금 다르게 살펴보자.

앞의 정의에서

$\cos\theta = \dfrac{'x좌표'}{반지름의\ 길이}$

x좌표의 부호를 따라감

$\sin\theta = \dfrac{'y좌표'}{반지름의\ 길이}$

y좌표의 부호를 따라감

$\tan\theta = \dfrac{'y좌표'}{'x좌표'}$

x, y 부호가 같다면 (+)
부호가 다르다면 (−)

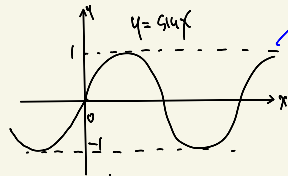
여기에서 '좌표'에 강조점을 둔 이유는 부호에 영향을 줄 수 있기 때문이다.

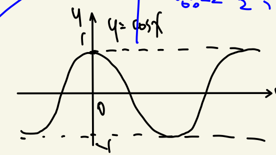
ex) x좌표가 음수라면 → $\cos\theta < 0$

y좌표가 양수라면 → $\sin\theta > 0$

삼각함수의 그래프

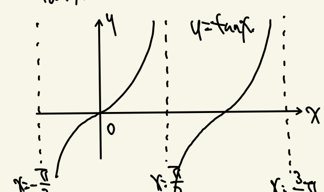
• sinx, cosx의 그래프. 두 그래프는 똑같이 생겼고 서로 x축 방향으로 $\frac{\pi}{2}$씩 옮긴거다.





정의역	실수 전체의 집합	
치역	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$ (최대: 1, 최소: −1)	
주기	2π	
대칭성	원점대칭(기함수) = 홀함수	y축 대칭(우함수) = 짝함수.

• tanx의 그래프



정의역	$x = n\pi + \frac{\pi}{2}$를 제외한 모든 실수 집합
치역	실수 전체 집합
주기	π
대칭성	원점대칭(기함수) = 홀함수.