2021 EBS 수능특강 선별 20 . 11 Ver.

제작 : 김기대 T

<안내사항>

1. EBS는 최근 체감연계율이 매우 높아졌기 때문에, 전문항 1회독 후 선별문항 2회독 이상 하길 추천합니다.

2. 본 파일은 EBS를 한 번도 보지 않은 학생들을 기준으로 선별되었습니다.
따라서 EBS를 전문항 1회독을 한 학생들은 별표 (중요도)가 3개 이상인 문제들만 보아도 좋습니다.

<중요도 관련 안내>

<u>※ 문항의 절대적 난이도와 중요도는 상관관계가 없습니다.</u>
3점짜리 쉬운 문제여도 신박한 표현이나 완성도 높은 문항은 上등급,
4점짜리 매우 어려운 문제여도 수능스럽지 않은 문항은 下등급을 부여했습니다.

<u>※ 선별 기준 및 별표 등급 안내</u>
선별 기준: 타 교재에서 흔히 볼 수 있고 쉬운 문제는 선별에서 제외, 흔한 문제지만 중요한 문제는 선별.

★등급, ★★등급)
수능 연계 가능성이 적거나 흔한 문제.

★★★등급)
적절한 변형을 가하면 수능 연계 가능성이 약간 보이는 문항, 시중 퀄리티를 보이는 문항

★★★★등급)
적절한 변형을 가하면 수능 연계 가능성이 꽤 높아보이는 문항

★★★★★등급)
자체적으로 완성형인 문제. (=탈 EBS 퀄리티 문항)
오히려 이 완결성 때문에 직접연계가 아닌 간접연계가 돼야하는 아이러니함을 가진 문제.

<주의사항>

1. 본 파일은 수작업한 파일이므로, 간단한 오타와 순서 뒤틀림 등이 있을 수 있습니다.
정오사항을 말씀해주시면 신속히 공지하겠습니다. (Comment에서의 문법적인 오타도 있지만, 작업량이 너무 많아 적당한 건 넘어갔습니다. 맏춥뻡이 아시운 브븐이 이써도 바주도록 하쟈.)

2. 문항을 제외한 *Comment에 대한 인용* 은 저자 외에 불허합니다.

<자료 활용법>

4 **수학 영역(가형)** 홀수형

7. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

(가) $a+b+c+d=8$
(나) a는 홀수이다.
(다) $c \ge d$

① 32　② 34　③ 36　④ 38　⑤ 40

중요도	★★★★★	쪽번	028 001	문항코드	20009-0051

기대T Comment

전형적으로 '출제자'와 '해설자'가 달라서 생긴, 문제의 가치를 교재 스스로가 깎아버린 아쉬운 문제이다.
해설지대로 풀면 절대 1등급의 눈을 가졌다고 자부할 수 없다. 이번 10월 교육청에서도 나온, 대칭성을 적극적으로 활용할 수 있어야한다.

(가), (나)는 전제조건이라고 하자. $c>d$인 경우의 수와 $c<d$인 경우의 수는 같기 때문에, 전체 경우의 수에서 $c=d$인 경우의 수를 빼고 반띵을 하면 구할 수 있다. 따라서 전체 경우의 수를 m 이라 하고 $c=d$인 경우의 수를 n 이라고 하면, 정답은 $\frac{m-n}{2}+n=\frac{m+n}{2}$ 이다.

이것만큼은 반드시 이해하고 들어가자. 최근 3개년간 확통에서의 대칭성이 많이 쓰였다. (대부분 풀이들이 논리 없이 '이렇게 하면 정답 나오니까 알아둬라~'라고 푼 풀이들이라 수학전공자로써 안타깝ㅠㅠ)

이번 가형 10월 교육청 29번에서도 비슷한 논리가 쓰였는데, 다음 페이지 칼럼에서 대칭성 꽉 잡고 가기로 하자.

<확률과 통계 칼럼 - 대칭성>

본 칼럼은 내년에 출판될 기대T의 실전개념서에 들어가는 내용으로 함부로 훔쳐 쓰면 큰일나요 ^-^

29. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a<b<c \le 20$
(나) 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

위 문제는 이번 10월 교육청 가형 29번에 있는 문제이다.
나형에는 다른 문제가 대체되어 나왔으므로 문과 친구들은 읽기 전에 풀어보도록 하고, 이 문제를 풀어본 이과 친구들 역시 다시 한 번 풀어보도록 하자. 내 생각엔 10명 중 8명은 비효율적인 방법으로 풀었을 것이라 생각하고, 효율적인 방법을 찾은 나머지 2명 마저도 이 중 1명은 논리가 빈약할 것이라 생각한다.

자, 그럼 풀이 스타트!

(가)에 의하여 a, b, c는 20이하의 자연수이다.
또한 (가), (나)에 의하여 $a<b<c<a+b$ 이다. (삼각형의 결정조건 물론 $a<b+c, b<c+a$ 도 만족시켜야하지만, (가)의 조건식 때문에 쉽게 만족시킴을 알 수 있다.)

여기서 주목할 식은 $c<a+b$이다. 이 식을 포함하여, 비슷한 식 3개를 써 보겠다.
① $a<b<c$ 이면서 $c<a+b$
② $a<b<c$ 이면서 $c>a+b$
③ $a<b<c$ 이면서 $c=a+b$

우오오오오오오! ①, ②가 부등식 방향만 다르니까 대칭적이에오오오오오!

... 그렇다. 그렇게 하면 정답은 나온다.
근데, 이렇게 풀면 논리부족이다. 왜냐면 ①~③ 의 조건 말고도 $a<b<c$의 조건이 있기 때문이다.

직관적으로 생각해보면, c보다 작은 a, b를 더한 $a+b$란 값은 c보다 클 확률보다는 작을 확률이 좀 더 높아보이는게 일반적인 직관이다. (아니면 그 반대거나.)

적어도 $a+b<c$인 경우와 $a+b>c$인 경우가 정확히 같을 것이라고 손목을 걸만한 직관을 가진 사람은 없을거라 생각한다.

1. 1쪽에 보통 2문제씩 문제들이 있고, 하단에 해당 문제에 대한 Comment가 있습니다.
위 문항을 직접 푼 후 읽는 것이 좋습니다.

2. 우측단에 있는 내용처럼 문항에 관련된 칼럼이나 자작문제가 실릴 때가 있습니다.
해당 칼럼/자작문제 역시 EBS 본문항을 푼 후 보시는걸 추천드립니다.

3. 배점표시 ([2점] [3점] [4점])는 무시해주시면 됩니다.

기대모의고사 가형/나형 Vol1, 2, 3 링크	
Vol.1, 2 : 1등급컷 84~88, 신선함과 동시에 수능스러운 정제됨을 경험할 수 있는 모의고사 Vol.3 (가형) : 올해 6, 9, EBS 반영한 Final 모의고사 (나형은 Vol.3 제작 불발됐습니다.)	Atom.ac 접속
김기대T 수능 후 논술 Final 개강 안내사항	
실시간 수능 후 Final 시간표를 확인할 수 있습니다.	

<수능 후 이과 수리논술 Final 개강안내 - 대치오르비>

올해 코로나로 인해 한 반의 정원이 제한적이므로, *작년보다 더 빠른 마감이 진행될 것으로 보입니다.*

최종시간표와 수강신청일이 고지되면 빠른 등록 추천 드립니다. (11일 (수) ~ 13일 (금) 사이 고지 예정)

cf. *비대면 수업신청은 추후 공지합니다.*

개강학교 (ㄱㄴㄷ순)	회차* (기간)	수업일**	수업소개 / 마감주의알림 (작년 마감속도 기준)
논술 Basic	1회 (1일)	3(수능 당일) 저녁	- 논술을 본격적으로 준비한 기간이 4개월 이하인 학생들은 수강 강력 추천! - *작년 기준 빠른 마감, 수능 전 등록 추천*
건국대	2회 (1일)	4(금) 점심+저녁	- 아주대와 약간 다른 수학적 자료해석형. 덕분에 충분히 도전해볼만한 난이도. - 당일 집중 특강으로 건국대 스타일 파악? 핵가능!
동국대	1회 (1일)	5(토) 점심	- 독보적 출제 스타일을 가진 학교. 이에 당황하지 않도록 동국대 유형에 필수인 '수학적 모델링 전략'을 제시
광운대 & 세종대	4회 (4일)	8(화) 아침 + 9(수)~11(금) 점심	- 광운대의 제시문이 더 친절하다는 점을 제외하고, 많은 점이 닮은 두 학교. 과목별 패턴분석으로 효율적 정복 가능! - *작년 기준 빠른 접수. 수능 전 예약/등록 추천*
연세대	4회 (2일)	6(일) 저녁 + 7(월) 아침+점심+저녁	- 쉬워지는 과학논술, 수리논술 고득점은 필수! - 예상모의고사로 최근 3년간 급변하고 있는 연대 수리논술 경향을 간접경험 - *올해 최대 응시자수! 빠른 마감 예상. 수능 전 등록 추천*
에리카	3회 (1일)	13(일) 아침+점심+저녁	- 본캠 시험출제에 영감을 주는 분캠이 있다?? 우수한 출제력, 그 때문에 지원자들에겐 버거운 난이도ㅠ *Final 수강 추천*
아주대	3회 (1일)	12(토) 아침+점심+저녁	- 까다로운 자료해석형 시험출제경향. 이를 아는 것과 모르는 것의 차이가 체감난이도로 직결되는 학교!
이화여대	3회 (1일)	9(수)~11(금) 아침	- 문제는 어려우나 합격자 점수를 보면 '해볼만한데?'란 생각이 드는 학교. - 타학교보다 감점에 신경 써야하는 특수성이 있는 학교. 꼼꼼한 첨삭 제공!
인하대	6회 (6일)	14(월)~19(토) ① 점심반 ② 저녁반	- 인하대 논술이 한양대보다 어렵다고? 그래, 어려운 시험이지.. 떨어지기 어려운 시험! 인하대의 특성을 아는 순간, 체감 난이도는 급하강 - 기대T의 시그니쳐 수리논술 Final로, 모든 Final 중 수업 후 만족도가 제일 높은 수업*** *작년 기준 매우 빠른 마감, 수능 전 등록 강추*
서울 과기대	3회 (2일)	5(토) 저녁 + 6(일) 아침+점심	- 지원자 실력 대비 어렵게 출제하는 과기대는, 중앙대와 달리 살짝 선 넘을 필요가 있다. 그 선, 내가 제시해줄게.
중앙대	4회 (4일)	8(월) ~ 11(목) 저녁	- 수능 전에 굳이 하지 마라. 중앙대는 Final로 충분히 준비되는 학교니까. - 과유불급! 합격의 선을 정확히, 과하지 않게 제시하는 수업 *Final 수강 추천*
한양대	4회 (1일)	4(금) 아침+점심+ 점저+저녁	- 작년보다 빨라진 한양대의 논술시계 ㅠㅠ 예상모의고사 4회분으로 실력 점검하고 역대 우수기출 총정리된 자습자료로 빠르게 한양대 스타일 흡수! - *작년 기준 매우 빠른 마감, 수능 전 등록 강추*
한양대 (의예과)	1회 (일)	5(토) 점심	- 다른 학원 한양의대 Final 수업내용과 겹치지 않아 중복수강할 수 있음. - 고난도 모의고사 2회분으로 자신의 실력을 한번 더 체크해볼 수 있는 기회

* : 회차가 구분된 수업은 모두 '다른 수업'입니다. 내용이 같은 수업은 인하대 점심반/저녁반 이외에 없습니다.

** : 대부분 수업은 아침 09:00~13:00, 점심 13:30~17:30, 저녁 18:00~22:00입니다. 한양대 등 몇몇 학교 Final은 앞뒤로 30분~1시간 정도의 차이가 있을 수 있으므로, 추후 확정시간표로 확인 부탁드립니다.

*** : 수업 후 설문조사 결과 97.64%가 수업/첨삭 '모두 만족' 답변 ('모두 불만족' 응답률 0%))

제 2 교시

EBS 수능특강 수학 2

홀수형

5지선다형

1. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$2x+1 \le f(x) \le 3x+1$$

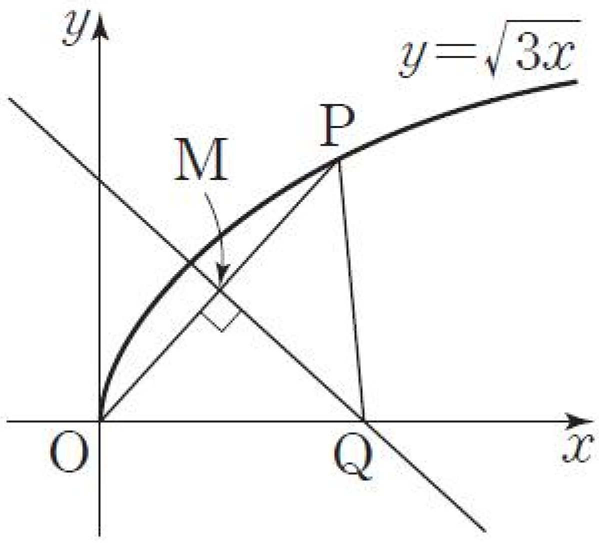
을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}+3}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

중요도	★★	쪽 번	001 008	문항코드	20008-0008

기대T Comment
1/x 등장시 $\frac{1}{x}=t$를 습관적으로 하자. 이 때, t는 단순히 0으로 가는 것이 아닌 $t\to 0+$임을 명심하자. 고난도 문제일수록 중요포인트가 될 수 있다.

2. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위에 점 P(t, $\sqrt{3t}$)$(t\neq 0)$이 있다. 선분 OP의 중점을 M, 점 M을 지나고 직선 OP에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{\overline{PQ}^2}{3t^2+2}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [2점]



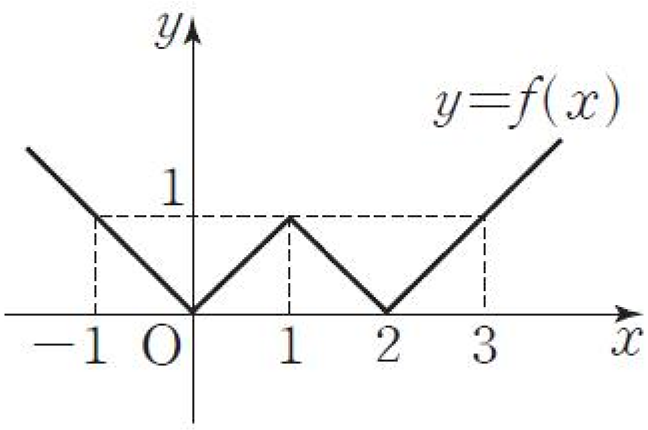
① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

중요도	★★★	쪽 번	014 007	문항코드	20008-0020

기대T Comment
t가 무한대로 갈 때의 상황을 상상하여 직선 OP의 기울기를 관찰해서 푸는 방법이 있다. 이 두 줄만으로 무슨 풀이인지 알겠는 친구들은 그 풀이를 재정비하고 모르겠는 친구들은, 굳이 알려고 하지 말자. 무시하는 것이 아닌, 수능이 3주가 남은 이 시점에서 새로운걸 배우는 것을 경계해야한단 뜻이다. 체화할 시간이 너무 부족하니까.

2회독 이상이면 중요도 ★ 3개 이상만 봐도 무방합니다만, Comment는 전문항 다 읽어보기 바랍니다.

3. 함수 $f(x)=||x-1|-1|$의 그래프가 그림과 같다. 실수 a에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 원 $(x-a)^2+y^2=1$이 만나는 서로 다른 점의 개수를 g(a)라 하자. $g(k)=\lim_{a\to k+} g(a)-1$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은? [2점]



① $2-2\sqrt{2}$ ② $3-2\sqrt{2}$ ③ $2-\sqrt{2}$ ④ $3-\sqrt{2}$ ⑤ 4

중요도	★★★	쪽 번	015 003	문항코드	20008-0024

기대T Comment
원의 사이즈를 변화시켜가며 교점 관찰. 접할 때를 주의해야겠다.

4. 두 실수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1\le x<1$일 때, $f(x)=\begin{cases} a & (-1\le x<0) \\ b-x^2 & (0\le x<1)\end{cases}$ 이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $a=b=2$이면 함수 $f(x)$는 열린구간 (-1, 1)에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=2$와 $x=3$에서 모두 연속이 되도록 하는 a의 값이 존재한다.

ㄷ. b=2이고 함수 $|f(x)+c|$(c는 실수)가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, a-c의 최댓값과 최솟값의 합은 6이다

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★	쪽 번	029 003	문항코드	20008-0046

기대T Comment
복잡한 문제여서 넣어놓았는데, 큰 의미가 있는 문제는 아니다.

2회독 이상이면 중요도 ★ 3개 이상만 봐도 무방합니다만, Comment는 전문항 다 읽어보기 바랍니다.

5. 함수 $f(x)=\begin{cases} -(x-1) & (x<1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대한 설명으로 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 함수 f(x)는 x=1에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{3h}$ 의 값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{3h}=-\frac{1}{2}$

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★	쪽 번	042 004	문항코드	20008-0066

기대T Comment
$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{3h}=f'(1)$**이 아님을 명심하고,** **이 등식이 성립하기 위한** f**의 조건을 다시 되새김질하자.**

6. 다항함수 f(x)가 모든 실수 x에 대하여

$f(x)+2f(-x)=4x^2+5x$를 만족시킬 때, $f'(6)$의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

중요도	★★★★	쪽 번	043 006	문항코드	20008-0068

기대T Comment
다항함수를 보면 차수를 결정시키고 싶은 마음이 드는 것이 우선이지만 이 문제에서 만큼은 x 대신 x를 대입하여 f(x)와 f(-x)에 대한 방정식으로 접근한 후 f(-x)를 소거시켜주는 방식으로 풀어줘야한다. **특이한 문제로 인식될 수 있으므로, 풀어봐야 한다. (9평 나형 20번)**

7. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, f(3)의 값은? [3점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $\{f'(x)\}^2=3xf(x)+x^2+1$이다.

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

중요도	★★★	쪽번	043 007	문항코드	20008-0069

기대T Comment
6번 코멘트 복붙. 차수 결정하기 위해 f(x)의 최고차항을 ax^n로 두고 a와 n에 대한 정보를 이끌어내자.

8. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 f(x)에 대하여 f′(2)의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M+m의 값은? [3점]

(가) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=2$이다.
(나) x≠-2인 모든 실수 x에 대하여 $\frac{f(x)}{x+2}\geq 0$이다.

① 41
② 42
③ 43
④ 44
⑤ 45

중요도	★★★	쪽번	043 008	문항코드	20008-0070

기대T Comment
(나) $\frac{f(x)}{x+2}$ 조건을 보고 $(x, f(x))$와 $(-2, 0)$ 사이의 평균변화율로도 해석이 되겠구나! 라는 생각이 드는 것이 좋다. 하지만, 이 문제 역시 저 해석 보다는 단순히 x>-2, x<-2인 케이스로 나눠서 해석이 더 낫다. 이런 유형은 무조건 이렇게 생각해야돼! 라는 식의 한 쪽으로 매몰된 사고를 하는 것보단, 여러 사고과정을 머릿속에서 끄집어낸다음, 이 문제에 어떤 과정이 제일 어울릴지 선택하는 것이 중요하다.

9. 삼차함수 f(x)가 다음 조건을 만족시킬 때, f(4)의 값을 구하시오. [3점]

(가) $f(1)=-3$, $f'(2)=0$
(나) 다항식 f(x)는 다항식 f′(x)로 나누어떨어진다.

중요도	★★★★	쪽번	044 002	문항코드	20008-0072

기대T Comment
문제는 매우 재밌는데, 해설이 본 문제의 가치를 떨어뜨린 안타까운 문제이다. 해설지처럼 풀지 말고 다음과 같이 풀자. (나) 조건에 의하면 $f(x)=f'(x)(ax+b)$ 인데, f′(2)=0 이므로 f(2)도 0이다. 함숫값도 0, 도함숫값도 0이면? f(x)는 (x-2) 인수를 최소 2개 이상 가짐을 알 수 있다. 이 때, 만약 $f'(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 x가 2개라면, $f(x)=f'(x)(ax+b)$의 우변을 0으로 만드는 x가 총 3개이다. 하지만 f(x)는 x=2를 중근으로 갖기 때문에 이는 불가능하고, 따라서 $f'(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 x가 1개일 수 밖에 없다. (이미 f′(2)=0이니까, 0개는 안되죠?) 따라서 $f'(x)=k(x-2)^2$꼴이고, 적분하면 f(x)의 모양이 매우 간단함을 알 수 있다. 이제 $f(1)=-3$ 조건 이용하여 문제 풀면 끝. 이 일련의 과정이 30초 내로 파파팍 될 정도는 되어야 나형 안정적 99%를 쟁취할 수 있으나, 대부분의 나형러들은 이 과정이 순탄치는 않을 것이다. 여러번 음미하도록 하자. (가형러도 최상위권 아니면 안되니까 걱정 ㄴㄴ)

10. k가 양의 상수일 때, 함수 f(x)=(x−8)(x+k)에 대하여 집합 A를

$$A=\left\{a \mid \lim_{h\to 0+}\frac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h}\leq 0,\ a\text{는 실수}\right\}$$

라 하자. 3∈A일 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 구하시오. [3점]

중요도	★★★★	쪽번	044 003	문항코드	20008-0073

기대T Comment
절댓값함수에 대한 우미분계수와 좌미분계수를 묻는 문제이다. g(x)=|f(x)|로 치환하여 보면 더 잘 보일 것이다.

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 f(x)와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 g(x)가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이다.
> (나) $f(a)=g(a)+1$, $f'(a)=g'(a)$, $f(a+2)=g(a+2)+1$인 실수 a가 존재한다.

$f'(2)-g'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

중요도	★★★★	쪽 번	045 004	문항코드	20008-0074

기대T Comment
기출문제 30번이 떠올랐다면, 기출분석을 잘한 것. h(x)=f(x)-g(x)로 치환하여 모든 조건을 해석하면 사실상 기출과 똑같은 문제가 된다.

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 f(x)가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^4} = f(1)$
> (나) 어떤 양수 a에 대하여 열린구간 (0, a)에 속하는 모든 실수 x는 $x \le 4f(x) \le x^3+3x$를 만족시킨다.

$f'\left(\frac{3}{2}\right)$의 값이 자연수일 때, $4 \times f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

중요도	★★★★★	쪽 번	045 005	문항코드	20008-0075

기대T Comment
(나)조건의 '어떤'에 주목할 필요가 있다. '모든'과의 차이를 분명히 알아야한다는 것이다. 만약 '모든' 이었으면 어떤 양수 x를 조사를 해도 $x \le 4f(x) \le x^3+3x$를 만족시켰을테지만 '어떤', 즉 몇몇 a에서만 (나)를 만족시키기 때문에, $x \le 4f(x) \le x^3+3x$을 활용할 수 있는 x의 부분은 0+ 부근의 x들 밖에 없음을 명심하자.

13. 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}-4x+2 & (x<1)\\ f(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

일 때, 실수 t에 대하여 함수 h(t)를 다음과 같이 정의한다.

$a\geq t+1$인 모든 실수 a에 대하여 $\dfrac{g(a)-g(t)}{a-t}$의 최댓값을 $h(t)$라 한다.

방정식 h(t)=0의 모든 실근이 $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$일 때, f(4)의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

중요도	★★★★★	쪽 번	045 006	문항코드	20008-0076

기대T Comment
앞선 코멘트에서처럼 $\frac{g(a)-g(t)}{a-t}$을 평균변화율로 해석할 필요가 있다. 물론 대수능에서는 기하적해석인 평균변화율보다는 수식적해석 (ex. 함수치환)을 더 중시하는 모습을 보여주지만, 이 문제는 기하적해석에 특화된 문제라 어쩔 수 없이 사용한다. 이 문제는 평가원 문제가 아니고, EBS 문제니까. 이러한 풀이방향 개수의 한계에도 불구하고 문제 자체는 상당히 훌륭하기 때문에, 반드시 가져가야하는 문항이다.

14. 삼차함수 f(x)=$x^3-ax\,(a>0)$에 대하여 곡선 y=f(x)가 x축과 만나는 점 중에서 원점이 아닌 두 점을 A, B라 하고, 곡선 y=f(x) 위의 점 A에서의 접선이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 두 선분 AC, BC와 곡선 y=f(x)로 둘러싸인 부분의 넓이가 16일 때, 상수 a의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

중요도	★★★	쪽 번	060 004	문항코드	20008-0097

기대T Comment
삼차함수의 점대칭성을 강조한 문제로, 평가원이 만족할만한 문제인진 모르겠다. 사설모의고사를 만드는 저자 입장으로썬, 꽤 구미가 당기는 문제이긴 하다. 비슷한 일본문제도 있고.

15. 다항함수 f(x)와 이차함수 g(x)에 대하여 함수 h(x)가

$$h(x)=\begin{cases} f(x) (0 \le x \le 2) \\ g(x) (2 < x \le 3) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 h(x)에 대하여 h(1)+h(3)의 최솟값은? [4점]

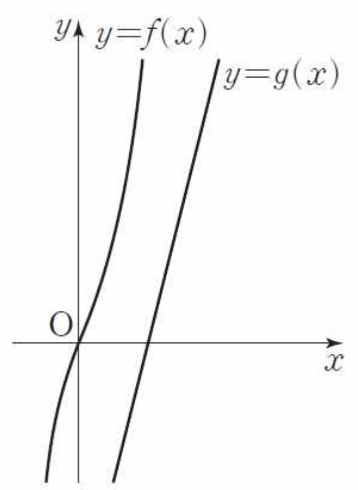
(가) 함수 h(x)는 닫힌구간 [0, 3]에서 연속이고 열린구간 (0, 3)에서 미분가능하다.
(나) h(0)=0, h(2)=4
(다) 0<c<3인 모든 실수 c에 대하여 1≤h′(c)≤2이다.

① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

중요도	★★★★★	쪽 번	062 002	문항코드	20008-0103

기대T Comment
이과는 사골유형인데, 문과는 낯설 수 밖에. h(x)가 단순히 미분가능한 함수라고 주어졌을 뿐, 다항함수가 아니기 때문이지. 하지만 익숙해져야한다. 수능이 고여갈수록, 문과 고난도 문제는 과년도 이과 고난도 문제의 트렌드를 따라갈 수 밖에 없다. (Ex.작년 9월 21번)

16. 그림과 같이 두 함수 $f(x)=x^3-x^2+3x$, g(x)=4x−8의 그래프는 x>−1에서 만나지 않는다. t>−1인 실수 t에 대하여 함수 y=f(x)의 그래프 위의 점 P(t, f(t))를 지나고 y축에 수직인 직선을 그었을 때, 이 직선이 함수 y=g(x)의 그래프와 만나는 점을 Q라 하고, 선분 PQ의 길이를 h(t)라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. h(0)=2
ㄴ. 함수 h(t)의 극솟값은 $\frac{15}{8}$이다.
ㄷ. −1<t<2에서 h(t)의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 t의 개수는 3이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★★	쪽 번	063 004	문항코드	20008-0105

기대T Comment
ㄱㄴㄷ 문제로는 안어울려서, 아마 단순 오지선다형 문제로 연계 가능성 있을 유

2회독 이상이면 중요도 ★ 3개 이상만 봐도 무방합니다만, Comment는 전문항 다 읽어보기 바랍니다.

17. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 f(x)가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) f(0)=0, $f'(2)=-\frac{1}{2}f(2)$
(나) 0<a<1인 어떤 실수 a에 대하여 f(a)>0이고, 1<b<2인 어떤 실수 b에 대하여 f(b)<0이다.

함수 g(x)를 g(x)=xf(x) 라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g'(0)=0$
ㄴ. $g'(c)=0$인 실수 c가 열린구간 (0, 2)에 적어도 하나 존재한다.
ㄷ. 함수 $|g(x)|$가 극대 또는 극소가 되는 모든 x의 개수는 4이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★★	쪽 번	063 005	문항코드	20008-0106

기대T Comment
좋은 문제. 각 보기들을 읽고, 첫 행동을 뭐로 개시할지 고민고민

18. 삼차함수 f(x)의 도함수 f′(x)가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 f′(x)는 x=2에서 최솟값을 갖는다.
(나) $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=0$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 f(x)는 극댓값과 극솟값을 갖는다.
ㄴ. 0<a<4인 어떤 실수 a에 대하여 f(0)=-f(a)이면 방정식 $|f(x)|=|f(4)|$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
ㄷ. f(0)f(4)>0이면 방정식 $|f(x)|=|f(0)|+1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★	쪽 번	063 005	문항코드	20008-0106

기대T Comment
이 문제 역시 변곡점이 강조되어 평가원이 좋아할진 의문이나, 그 경계를 부수고 있는 것 같아 유의해서 봐야할 문제

2회독 이상이면 중요도 ★ 3개 이상만 봐도 무방합니다만, Comment는 전문항 다 읽어보기 바랍니다.

19. 삼차함수 f(x)의 한 부정적분 F(x)가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 F(x)는 x=0과 x=a (a>0)에서 동일한 극솟값 1을 갖는다. (나) 함수 F(x)는 극댓값 5를 갖는다.

F(k)=12인 양수 k에 대하여 $\int_0^k |f(x)|dx$의 값을 구하시오. [4점]

중요도	★★★★	쪽 번	092 002	문항코드	20008-0157

기대T Comment
단순계산으로 했는지, $\int_0^k |f(x)|dx = \int_0^k |F'(x)|dx$로 해석하여 도함수의 정적분으로 해석했는지에 따라 등급이 나뉘어질 것. 후자의 해석을 아는 친구들은, 고민해보도록.

20. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 f(x)의 한 부정적분을 F(x)라 할 때, 두 함수 f(x), F(x)가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 0≤x≤2일 때, f(x)=x^3+4x+a이다. (나) 모든 정수 m에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_m^{m+h} F(t)dt = F(m+2)$이다.

$\int_0^{15} f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $-\frac{5}{4}$ ② $-\frac{5}{2}$ ③ $-\frac{15}{4}$ ④ -5 ⑤ $-\frac{25}{4}$

중요도	★★★	쪽 번	092 003	문항코드	20008-0158

기대T Comment
무난한 문제.

21. 다항함수 f(x)가 다음 조건을 만족시킨다.

x<2에서 f'(x)>0이고, x>2에서 f'(x)<0이다.

함수 g(x)를 $g(x)=(x+1)f(x)-\int_{-1}^{x} f(t)dt$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g'(2)=0$
ㄴ. 함수 g(x)는 극솟값 0을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $|g(x)|=g(2)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

중요도	★★★★	쪽 번	093 004	문항코드	20008-0159

기대T Comment
방정식의 형태가 완벽하지 않을 땐, 99% 개형으로 푸는 문제 개형 그릴려면? 당연히 미분해야지. g'(x) 관찰하여 g(x) 그리고 문제 풀 것. 이런 문제는 어렵다고 하는 것이 아니다. 전형적인 문제들은 맞춰줘야 1등급이 나온다.

22. 음이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f(x)가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\le x\le 2$일 때, $f(x)=3x(x-2)$이다. (나) 모든 양수 x에 대하여 $f(x+2)=-\frac{1}{2}f(x)$이다.

자연수 n에 대하여 $\int_{a}^{s} f(x)dx=0$인 양수 s의 개수가 2n이 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 a_n이라 하자.
음이 아닌 실수 t에 대하여
$F(t)=\int_{0}^{t} f(x)dx$라 할 때, $F(a_1)\times F(a_5)$의 값은? [3점]

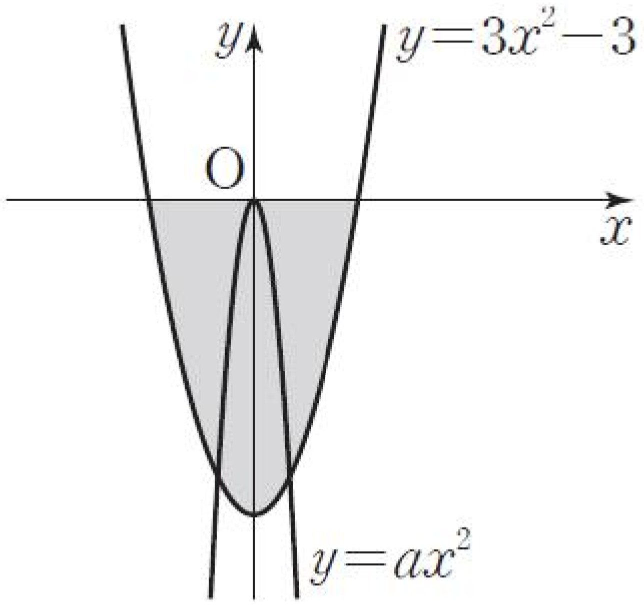
① $\frac{341}{64}$ ② $\frac{343}{64}$ ③ $\frac{345}{64}$ ④ $\frac{347}{64}$ ⑤ $\frac{349}{64}$;

중요도	★★★★★ ★★★★★	쪽 번	093 005	문항코드	20008-0160

기대T Comment
개중요. 물론 과거 이과 기출문제의 아류작이긴 하지만... $F(t)=\int_{0}^{t} f(x)dx$이므로 $\int_{a}^{s} f(x)dx=0$의 좌변을 F(s)-F(a)로 해석하는 것이 좋겠다.

2회독 이상이면 중요도 ★ 3개 이상만 봐도 무방합니다만, Comment는 전문항 다 읽어보기 바랍니다.

23. 그림과 같이 곡선 $y=3x^2-3$과 x축으로 둘러싸인 도형이 있다. 이 도형의 넓이가 곡선 $y=ax^2(a<0)$에 의하여 삼등분될 때, 상수 a의 값은? [3점]



① -25 ② -24 ③ -23 ④ -22 ⑤ -21

중요도	★★★	쪽번	107 006	문항코드	20008-0182

기대T Comment
지금까지의 문제들을 보면 대부분 해설을 빗겨까면서 머리를 좀 더 쓰는 풀이를 장려해왔는데, 이 문제는 머리쓰려 하지말고, 단순계산 하는 문제. 문제를 보자마자 1분동안은 펜 놓고 문제풀이 방향을 설정, 별다른 길이 안보인다면 의식의 흐름기법을 이용하여 펜을 통해 머릿속 모든 과정을 쭉 풀어써보는 것. 이것이 수학 잘하는 방법이다. 별거 없음 ^_^

24. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 f(x)가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 구간 [0, 4)에서 $f(x)=ax(x-3)^2$이다.
> (나) $x\geq4$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-4)+2$이다.
> (다) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=-10$, $x=10$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 50
② 52
③ 54
④ 56
⑤ 58

중요도	★★★	쪽번	108 002	문항코드	20008-0186

기대T Comment
무난한 문제

25. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x-6$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 직선 $y=-x-6$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{99}{2}$
② 50
③ $\frac{101}{2}$
④ 51
⑤ $\frac{103}{2}$

중요도	★★★★★	쪽 번	109 004	문항코드	20008-0188

기대T Comment
역함수는 원함수와 y=x 대칭. 항상 염두에 두자. 역함수와 관련된 적분문제가 평가원에선 잘 안나오긴 하지만, 나와도 무지. 한 번 쯤 풀어놓을 것.

정답과 해설

1)

[정답/모범답안]

1

[해설]

{풀이}

$x>0$에서 $\frac{1}{x^2}>0$이므로

$\frac{2}{x^2}+1 \le f(\frac{1}{x^2}) \le \frac{3}{x^2}+1$

이때 $\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x^2}+1)=1$, $\lim_{x\to\infty}(\frac{3}{x^2}+1)=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(\frac{1}{x^2})=1$

따라서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+3}=\frac{1}{3}$

2)

[정답/모범답안]

1

[해설]

{풀이}

점 M의 좌표는 $(\frac{t}{2},\frac{\sqrt{3t}}{2})$이고 직선 OP의 기울기는 $\frac{\sqrt{3t}}{t}$이므로 직선 OP에 수직인 직선 MQ의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3t}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3t}}(x-\frac{t}{2})$, $y=-\frac{t}{\sqrt{3t}}x+\frac{t^2}{2\sqrt{3t}}+\frac{\sqrt{3t}}{2}$

그러므로 점 Q의 좌표는 $(\frac{t}{2}+\frac{3}{2},0)$이다.

따라서

$\overline{PQ}^2=(\frac{t}{2}+\frac{3}{2}-t)^2+(0-\sqrt{3t})^2=\frac{t^2}{4}+\frac{3}{2}t+\frac{9}{4}$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{PQ}^2}{3t^2+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{t^2}{4}+\frac{3}{2}t+\frac{9}{4}}{3t^2+2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{2t}+\frac{9}{4t^2}}{3+\frac{2}{t^2}}=\frac{\frac{1}{4}+0+0}{3+0}=\frac{1}{12}$$

{다른 풀이}

삼각형 QPO는 $\overline{OQ}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형이므로 점 Q의 좌표를 (a, 0)'(a>0)이라 하면 $\overline{OQ}^2=\overline{PQ}^2$에서

$a^2=(a-t)^2+(0-\sqrt{3t})^2$, $a^2=a^2-2at+t^2+3t$

$a=\frac{1}{2}(t+3)$

따라서 $\overline{PQ}^2=\overline{OQ}^2=a^2=\frac{1}{4}(t+3)^2$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{PQ}^2}{3t^2+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{t^2}{4}+\frac{3}{2}t+\frac{9}{4}}{3t^2+2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{2t}+\frac{9}{4t^2}}{3+\frac{2}{t^2}}=\frac{\frac{1}{4}+0+0}{3+0}=\frac{1}{12}$$

3)

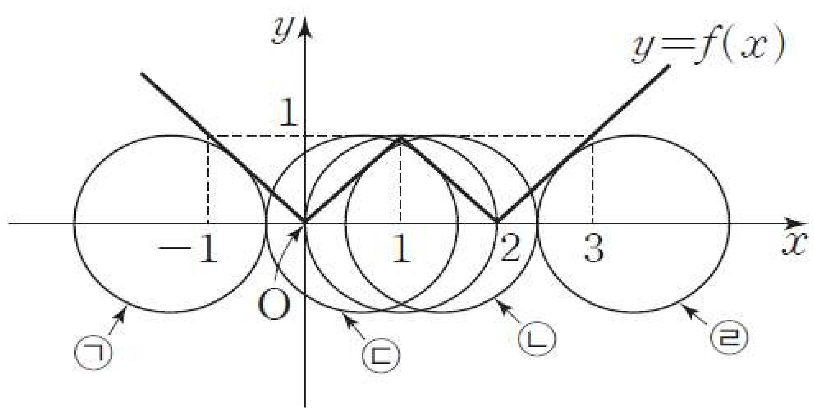
[정답/모범답안]

2

[해설]

{풀이}

함수 y=f(x)의 그래프와 원 $(x-a)^2+y^2=1$은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

(i) [그림 1]에서 ㉠과 같이 직선 y=-x와 원 $(x-a)^2+y^2=1$이 접하는 경우는 원의 중심 (a, 0)과 직선 x+y=0 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$, $|a|=\sqrt{2}$

$a<0$이므로 $a=-\sqrt{2}$

(ii) [그림 1]에서 ㉡과 같이 직선 y=x와 원 $(x-a)^2+y^2=1$이 접하는 경우는 원의 중심 (a, 0)과 직선 x-y=0 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$, $|a|=\sqrt{2}$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{2}$

(iii) [그림 1]에서 ㉢과 같이 직선 y=-x+2와 원 $(x-a)^2+y^2=1$이 접하는 경우는 (i)의 경우에서 원과 직선을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 경우와 같으므로

a=2-$\sqrt{2}$

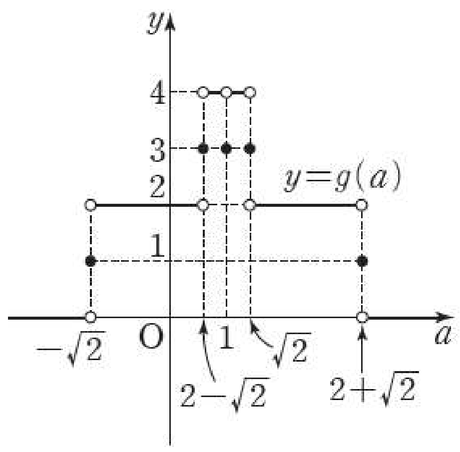
(iv) [그림 1]에서 ㉣과 같이 직선 y=x-2와 원 $(x-a)^2+y^2=1$이 접하는 경우는 (ii)의 경우에서 원과 직선을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 경우와 같으므로

a=2+$\sqrt{2}$

따라서 [그림 1]과 (i) ~(iv)를 이용하면 함수 g(a)는

$$g(a)=\begin{cases}0\,(a \leftarrow \sqrt{2}\text{ 또는 } a>2+\sqrt{2})\\ 1\,(a=-\sqrt{2}\text{ 또는 } a=2+\sqrt{2})\\ 2\,(-\sqrt{2}<a<2-\sqrt{2}\text{ 또는 }\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2})\\ 3\,(a=2-\sqrt{2}\text{ 또는 } a=1\text{ 또는 } a=\sqrt{2})\\ 4\,(2-\sqrt{2}<a<1\text{ 또는 } 1<a<\sqrt{2})\end{cases}$$

이므로 함수 y=g(a)의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]에서 $g(-\sqrt{2})$=1, $\lim\limits_{a\to-\sqrt{2}+} g(a)=2$이므로 k=$-\sqrt{2}$에서 g(k)= $\lim\limits_{a\to k+} g(a)-1$을 만족시킨다.

마찬가지로 k=2-$\sqrt{2}$, k=1에서 g(k)= $\lim\limits_{a\to k+} g(a)-1$을 만족시킨다.

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $-\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})+1=3-2\sqrt{2}$

4)

[정답/모범답안]

3

[해설]

{풀이}

ㄱ. a=b=2이면 -1≤x<1일 때,

$f(x)=\begin{cases}2\,(-1\le x<0)\\ 2-x^2\,(0\le x<1)\end{cases}$ 이므로 함수 f(x)는 두 열린구간 (-1, 0), (0, 1)에서 연속이다.

또한

$\lim\limits_{x\to0-} f(x)=\lim\limits_{x\to0-} 2=2$

$\lim\limits_{x\to0+} f(x)=\lim\limits_{x\to0+} (2-x^2)=2$

$f(0)=2$

에서 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$이므로 함수 f(x)는 x=0에서 연속이다.

따라서 a=b=2이면 함수 f(x)는 열린구간 (-1, 1)에서 연속이다. (참)

ㄴ. 조건 (나)에 의하여 함수 y=f(x)의 그래프는 -1≤x<1일 때의 함수 y=f(x)의 그래프를 x축의 방향으로 2n(n은 정수)만큼 평행이동한 그래프가 반복하여 나타난다.

따라서 함수 f(x)가 x=2에서 연속이려면 x=0에서 연속이어야 하고, 함수 f(x)가 x=3에서 연속이려면 x=1에서 연속이어야 한다.

함수 f(x)가 x=0에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to0-} f(x)=\lim\limits_{x\to0-} a=a$

$\lim\limits_{x\to0+} f(x)=\lim\limits_{x\to0+} (b-x^2)=b$

$f(0)=b$

에서 a=b …㉠

함수 f(x)가 x=1에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)=\lim\limits_{x\to1-} (b-x^2)=b-1$

$\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+} a=a$

$f(1)=f(-1)=a$

에서 a=b-1, b=a+1 …㉡

㉠, ㉡에서 등식 a=a+1을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. b=2이면 -1≤x<1일 때,

$f(x)=\begin{cases}a\,(-1\le x<0)\\ 2-x^2\,(0\le x<1)\end{cases}$

함수 $|f(x)+c|$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 x=0과 x=1에서 모두 연속이어야 한다.

함수 $|f(x)+c|$가 x=0에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to0-} |f(x)+c|=\lim\limits_{x\to0-} |a+c|=|a+c|$

$\lim\limits_{x\to0+} |f(x)+c|=\lim\limits_{x\to0+} |(2-x^2)+c|=|2+c|$

$|f(0)+c|=|2+c|$

에서 $|a+c|=|2+c|$ … ㉢

함수 $|f(x)+c|$가 x=1에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to1-} |f(x)+c|=\lim\limits_{x\to1-} |(2-x^2)+c|=|1+c|$

$\lim\limits_{x\to1+} |f(x)+c|=\lim\limits_{x\to-1+} |(f(x)+c|$

$=\lim\limits_{x\to-1+} |a+c|=|a+c|$

$|f(1)+c|=|f(-1)+c|=|a+c|$

에서 $|1+c|=|a+c|$ …㉣

㉢, ㉣에서 $|2+c|=|1+c|$이므로

2+c=1+c 또는 2+c=-1-c

그런데 2+c=1+c를 만족시키는 c의 값은 존재하지 않고,

2+c=-1-c에서 c=$-\frac{3}{2}$

c=$-\frac{3}{2}$을 ㉢에 대입하면 $|a-\frac{3}{2}|=\frac{1}{2}$이므로

$a-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ 또는 $a-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$

a=2 또는 a=1

(1) a=2, c=$-\frac{3}{2}$일 때, a-c=$\frac{7}{2}$

(2) a=1, c=$-\frac{3}{2}$일 때, a-c=$\frac{5}{2}$

(1), (2)에서 a-c의 최댓값은 $\frac{7}{2}$, 최솟값은 $\frac{5}{2}$이고 그 합은 $\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=6$(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5)

[정답/모범답안]

3

[해설]

{풀이}

ㄱ. $\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-((1+h)-1)-0}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{-h}{h}=-1$

$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\frac{1}{2}((1+h)-1)-0}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{\frac{1}{2}h}{h}=\frac{1}{2}$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\neq\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. (참)

ㄴ. h →0+일 때,$1+2h>1$, $1-h<1$이므로

$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{3h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{\frac{1}{2}((1+2h)-1)-(-(1-h)-1))}{3h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{h-h}{3h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{0}{3h}$

$=0$(거짓)

ㄷ. h →0-일 때, 1+2h<1, 1-h>1이므로

$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{3h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{-((1+2h)-1)-\frac{1}{2}((1-h)-1)}{3h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{-2h+\frac{1}{2}h}{3h}=\lim_{h\to0-}\frac{-\frac{3}{2}h}{3h}=-\frac{1}{2}$(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

6)

[정답/모범답안]

4

[해설]

{풀이}

$f(x)+2f(-x)=4x^2+5x$ ⋯ ㉠

x 대신 -x를 대입하면

$f(-x)+2f(x)=4x^2-5x$

이 등식의 양변에 2를 곱하면

$4f(x)+2f(-x)=8x^2-10x$ ⋯ ㉡

㉡-㉠을 하면

$3f(x)+2f(-x)=8x^2-10x$

따라서 f'(x)=$\frac{8}{3}x$-5이므로

f'(6)=16-5=11

7)

[정답/모범답안]

1

[해설]

{풀이}

(i) f(x)=mx+n(m, n은 상수)일 때,

조건 (나)에서

(좌변)=$\{f'(x)\}^2=m^2$

(우변)=3xf(x)+x^2+1=(3m+1)x^2+3nx+1이고 모든 실수 x에 대하여 이 두 식이 서로 같으려면

3m+1=0, 3n=0, $m^2=1$

그런데 이를 만족시키는 상수 m은 존재하지 않는다.

(ii) 다항함수 f(x)의 최고차항의 차수가 2 이상일 때, 다항함수 f(x)의 최고차항의 차수를 n(n≥2)라 하자.

조건 (나)의 좌변에서 f'(x)의 최고차항의 차수는 n-1이므로 $(f'(x))^2$의 최고차항의 차수는 2n-2이다.

또한 조건 (나)의 우변에서 3xf(x)의 최고차항의 차수는 n+1이고 n+1≥3이므로 우변의 차수는 n+1이다.

따라서 2n-2=n+1에서 n=3이므로 다항함수 f(x)는 삼차함수이다.

f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a,b,c,d는 상수, $a\neq0$)이라 하면

f(-x)=$-ax^3+bx^2-cx+d$

조건 (가)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로

$-ax^3+bx^2-cx+d=-ax^3-bx^2-cx-d$

$2bx^2+2d=0$

$bx^2+d=0$

모든 실수 x에 대하여 이 등식이 성립하므로 b=0, d=0

따라서 $f(x)=ax^3+cx$(a, c는 상수, a≠0)이다.

$f'(x)=3ax^2+c$이고 조건 (나)에서

$\{f'(x)\}^2=3xf(x)+x^2+1$

$(3ax^2+c)^2=3x(ax^3+cx)+x^2+1$

$9a^2x^4+6acx^2+c^2=3ax^4+(3c+1)x^2+1$

모든 실수 x에 대하여 이 등식이 성립하므로

$9a^2=3a, 6ac=3c+1, c^2=1$

$9a^2=3a$ 즉 3a(3a-1)=0에서 a≠0이므로 a=$\frac{1}{3}$

6ac=3c+1에 a=$\frac{1}{3}$을 대입하면 2c=3c+1에서 c=-1

따라서 f(x)=$\frac{1}{3}x^3-x$이므로

f(3)=9-3=6

8)

[정답/모범답안]

2

[해설]

{풀이}

조건 (나)에서 x<-2인 모든 실수 x에 대하여 x+2<0이므로 f(x)≤0이고, x>-2인 모든 실수 x에 대하여 x+2>0이므로 f(x)≥0이다.

이때 삼차함수 f(x)는 x=-2에서 연속이므로

f(-2)=0

또한 조건 (가)에서 함수 f(x)의 최고차항의 계수가 1이므로

f(x)=(x+2)(x^2+ax+b) (a, b는 상수) …㉠ 로 놓을 수 있다.

㉠의 양변에 x=0을 대입하면

f(0)=2b

조건 (가)에서 f(0)=2이므로

2b=2, b=1

또한 x≠-2인 모든 실수 x에 대하여

$\frac{f(x)}{x+2}=x^2+ax+1\geq 0$이려면 이차방정식 x^2+ax+1=0의 판별식을

D라 할 때, D≤0이어야 하므로

D=a^2-4≤0, (a+2)(a-2)≤0

-2≤a≤2

한편 f'(x)=(x^2+ax+1)+(x+2)(2x+a)이므로

f'(2)=(2a+5)+(16+4a)=6a+21

이때 -2≤a≤2이므로 9≤f'(2)≤33

따라서 M=33, m=9이므로

M+m=33+9=42

9)

[정답/모범답안]

24

[해설]

{정답}

함수 f(x)가 삼차함수이므로 도함수 f'(x)는 이차함수이다. 조건 (가)에서 다항식 f'(x)는 x-2를 인수로 갖고, 조건 (나)에서 다항식 f(x)는 f'(x)를 인수로 가지므로 다항식 f(x)도 x-2를 인수로 갖는다.

즉, f(2)=0

f(2)=0, f'(2)=0이므로

f(x)=a$(x-2)^2$(x+b)(a, b는 상수, a≠0)으로 놓을 수 있다.

이때 f(x)=a(x^2-4x+4)(x+b)이고

f'(x)=a(2x-4)(x+b)+a(x^2-4x+4)

=2a(x-2)(x+b)+a$(x-2)^2$

=a(x-2)(3x+2b-2)

=3a(x-2)(x+ $\frac{2b-2}{3}$)

다항식 f(x)는 f'(x)를 인수로 가지므로

x+ $\frac{2b-2}{3}$=x-2 또는 x+ $\frac{2b-2}{3}$ =x+b에서 b=-2

그러므로 f(x)=a$(x-2)^3$

이때 조건 (가)에서 f(1)=-a=-3이므로 a=3

따라서 f(x)=3$(x-2)^3$이므로 f(4)=3×8=24

10)

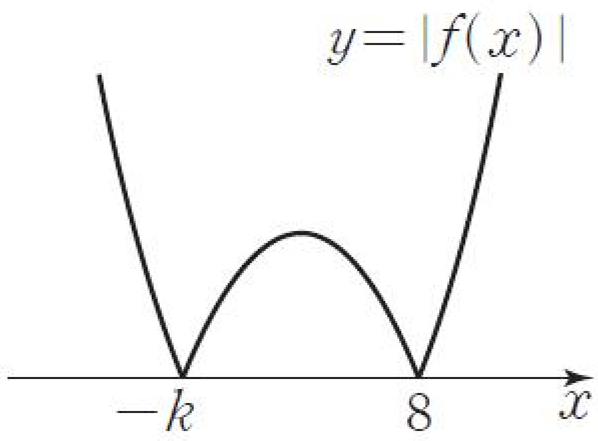
[정답/모범답안]

9

[해설]

{정답}

k>0일 때, 함수 f(x)=(x-8)(x+k)에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



이 함수에서 두 극한값

$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h}$, $\lim_{h\to 0-}\frac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h}$는 둘 다 양수, 둘 다 음수, 하나는 양수이고 다른 하나는 음수, 둘 다 0 중 하나이다.

따라서

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h}\leq 0$$

이려면 두 극한값 중 하나는 양수이고 다른 하나는 음수이거나 둘 다 0이어야 한다.

즉, 함수 $|f(x)|$가 x=a에서 미분가능하지 않거나

$f'(a)=0$이어야 한다.

함수 $|f(x)|$는 x=8, x=-k에서 미분가능하지 않고, f'($\frac{8-k}{2}$)=0이므로

A={8, -k, $\frac{8-k}{2}$}

3∈A이므로 -k=3 또는 $\frac{8-k}{2}=3$

즉, k=-3 또는 k=2

이때 k>0이므로 k=2

따라서 A={8, -2, 3}이므로 집합 A의 모든 원소의 합은 9이다.

11)

[정답/모범답안]

15

[해설]

{정답}

f(x)=x^3+ax^2+bx+c (a, b, c는 상수),

g(x)=-x^2+px+q (p, q는 상수)라 하자.

f'(x)=3x^2+2ax+b이고 조건 (가)에서 f'(-x)=f'(x)이므로

3x^2-2ax+b=3x^2+2ax+b

4ax=0

모든 실수 x에 대하여 이 등식이 성립하므로 a=0

따라서 f(x)=x^2+bx+c

h(x)=f(x)-g(x)-1이라 하면

h'(x)=f'(x)-g'(x)이고 조건 (나)에서

$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)-1=0$, $h'(\alpha)=f'(\alpha)-g'(\alpha)=0$,
$h(\alpha+2)=f(\alpha+2)-g(\alpha+2)-1=0$
이때 함수 h(x)는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고
h(x)는 $(x-\alpha)^2$과 $x-\alpha-2$를 인수로 가지므로
h(x)=$(x-\alpha)^2(x-\alpha-2)$
즉, f(x)-g(x)-1=$(x-\alpha)^2(x-\alpha-2)$이므로
$x^3+x^2+(b-p)x+c-q-1$
$=x^3-(3\alpha+2)x^2+(3\alpha^2+4\alpha)x-\alpha^2(\alpha+2)$
에서
$1=-3a-2$, $b-p=3\alpha^2+4\alpha$, $c-q-1=-\alpha^2(a+2)$
a=-1, b-p=-1, c-q=0
이때 $f'(x)=3x^2+b$, $g'(x)=-2x+p$이므로
$f'(2)-g'(2)=(12+b)-(-4+p)$
$=16+(b-p)$
$=16+(-1)=15$

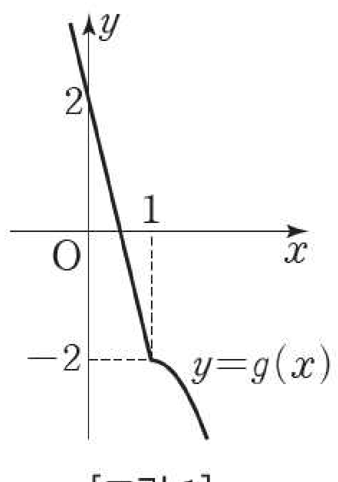
12)
[정답/모범답안]
13

[해설]
{풀이}
f(x)는 삼차함수이므로 조건 (가)에서
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=0$, 즉 f(1)=0 ⋯ ㉠
조건 (나)에서 열린구간 (0, a)에서 $x\le 4f(x)\le x^2+3x$이므로
$\lim_{x\to 0+}x\le\lim_{x\to 0+}4f(x)\le\lim_{x\to 0+}(x^2+3x)$
이때 $\lim_{x\to 0+}x=0$, $\lim_{x\to 0+}(x^2+3x)=0$이므로
$\lim_{x\to 0}4f(x)=0$
삼차함수 f(x)는 연속함수이므로
$\lim_{x\to 0+}4f(x)=4f(0)=0$에서 f(0)=0
f(x)는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 f(0)=0이므로
f(x)=x^3+bx^2+cx(b, c는 상수)로 놓을 수 있다.
㉠에 의하여 f(1)=1+b+c=0이므로
c=-b-1
즉, f(x)=$x^3+bx^2-(b+1)x$
또한 조건 (나)에서 열린구간 (0, a)에서
$1\le\frac{4f(x)}{x}\le x+3$이므로
$\lim_{x\to 0+}1\le\lim_{x\to 0+}\frac{4f(x)}{x}\le\lim_{x\to 0+}(x+3)$
$1\le\lim_{x\to 0+}4(x^2+bx-b-1)\le 3$
$\frac{1}{4}\le -b-1\le\frac{3}{4}$
$-\frac{7}{4}\le b\le -\frac{5}{4}$ ⋯㉡
f(x)=$x^3+bx^2-(b+1)x$에서
f'(x)=$3x^2+2bx-b-1$이므로
$f'(\frac{3}{2})=2b+\frac{23}{4}$
㉡에서 $\frac{9}{4}\le 2b+\frac{23}{4}\le\frac{13}{4}$이므로 $f'(\frac{3}{2})$의 값이 자연수이려면
$2b+\frac{23}{4}=3$, $b=-\frac{11}{8}$
따라서 f(x)=$x^3-\frac{11}{8}x^2+\frac{3}{8}x$이므로
$4\times f(2)=4\times(8-\frac{11}{2}+\frac{3}{4})=13$

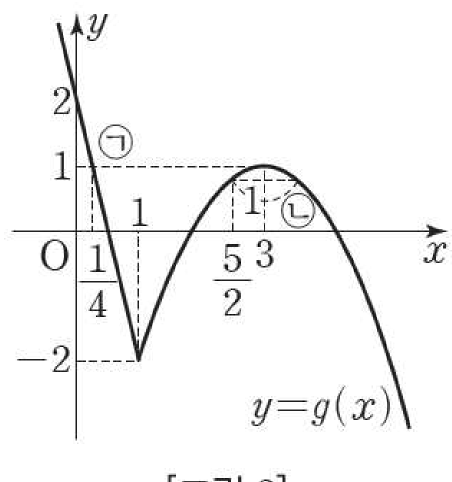
13)
[정답/모범답안]
1

[해설]
{풀이}
함수 g(x)가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수이므로 함수 g(x)는 x=1에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1+}g(x)=g(1)$
이때
$\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1-}(-4x+2)=-2$

$\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$
$g(1)=f(1)$
이므로 f(1)=-2
a≥t+1일 때, $\frac{g(a)-g(t)}{a-t}$는 함수 y=g(x)의 그래프 위의 두 점 (t, g(t)), (a, g(a))를 잇는 직선의 기울기와 같으므로 h(t)는 이러한 직선의 기울기의 최댓값이다.
함수 y=g(x)의 그래프가 [그림 1]과 같은 경우에는 함수y=g(x)의 그래프 위의 두 점을 잇는 직선의 기울기가 항상 음수이므로 h(t)=0을 만족시키는 경우가 없다.
따라서 함수 y=g(x)의 그래프는 [그림 2]와 같아야 한다.
이때 a≥t+1인 모든 실수 a에 대하여 함수 y=g(x)의 그래프 위의 두 점 (t, g(t)), (a, g(a))를 잇는 직선의 기울기의 최댓값이 0인 경우는 ㉠, ㉡과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

㉠은 t=$\frac{1}{4}$일 때이고 g($\frac{1}{4}$)=1이므로 이차함수 y=f(x)의 그래프의

꼭짓점의 y좌표가 1임을 알 수 있다.

㉡은 t=$\frac{5}{2}$일 때이고 두 점 (t, g(t)), (t+1, g(t+1))에서 g(t)=g(t+1),

즉 g($\frac{5}{2}$)=g($\frac{7}{2}$)일 때이므로 이차함수 y=f(x)의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 $(\frac{5}{2}+\frac{7}{2})\times\frac{1}{2}=3$임을 알 수 있다.

그러므로 f(x)=k(x-3)²+1(k는 k<0인 상수)로 놓을 수 있다.

함수 y=f(x)의 그래프는 점 (1, -2)를 지나므로

-2=k×4+1에서 k=$-\frac{3}{4}$

따라서 f(x)=$-\frac{3}{4}(x-3)^2+1$이므로

f(4)=$-\frac{3}{4}+1=\frac{1}{4}$

14)

[정답/모범답안]

3

[해설]

{풀이}

곡선 y=f(x)가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $x^3-ax=0$에서 x=0 또는 $x=\sqrt{a}, x=-\sqrt{a}$

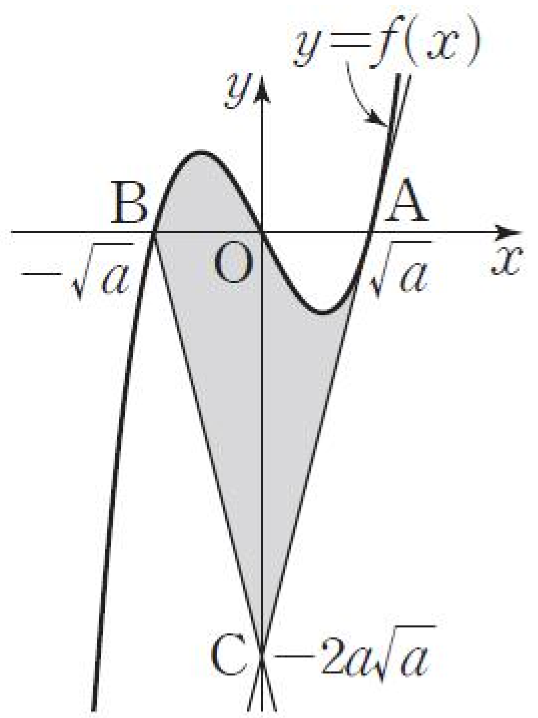
이때 x축과 만나는 점 중에서 원점이 아닌 두 점이 A, B이고, 점 A의 x좌표가 양수이므로 A($\sqrt{a}$, 0), B(-$\sqrt{a}$, 0)이다.

f(x)=x^3-ax에서 f'(x)=3x^2-a

f'($\sqrt{a}$)=3a-a=2a이므로 점 A에서의 접선의 방정식은 y=2a(x-$\sqrt{a}$)

이 접선이 y축과 만나는 점 C의 좌표는 (0, -2a$\sqrt{a}$)이다.

그러므로 두 선분 AC, BC와 곡선 y=f(x)로 둘러싸인 부분은 그림의 색칠한 부분과 같다.



이때 곡선 y=f(x)는 원점에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 삼각형 ABC의 넓이와 같다.

따라서 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{a}\times2a\sqrt{a}=16$

$a^2=8$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{2}$

15)

[정답/모범답안]

3

[해설]

{풀이}

0<x<2인 모든 실수 x에 대하여 다항함수 f(x)는 닫힌 구간 [0, x]에서 연속이고 열린구간 (0, x)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c_1)$을 만족시키는 c_1이 열린구간 (0, x)에 적어도 하나 존재한다.

이때 조건 (나)에 의하여 f(0)=h(0)=0이고,

조건 (다)에 의하여

$1\leq\frac{f(x)}{x}\leq2$

$x>0$이므로 $x\leq f(x)\leq2x$

…㉠

같은 방법으로 0<x<2인 모든 실수 x에 대하여 다항함수 f(x)는 닫힌구간 [x, 2]에서 연속이고 열린구간 (x, 2)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(2)-f(x)}{2-x}=f'(c_2)$를 만족시키는 c_2가 열린구간 (x, 2)에 적어도 하나 존재한다.

이때 조건 (나)에 의하여 f(2)=h(2)=4이고,

조건 (다)에 의하여

$1\leq\frac{4-f(x)}{2-x}<2$

$2-x>0$이므로

$2-x\leq4-f(x)\leq4-2x$

$2x\leq f(x)\leq x+2$

…㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키려면 0<x<2인 모든 실수 x에 대하여

f(x)=2x …㉢

한편, 함수 h(x)가 x=2에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}h(x)=\lim_{x\to2+}h(x)=h(2)$

즉, $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}g(x)=f(2)$이므로 g(2)=f(2)=4

또한 함수 h(x)가 x=2에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}$

즉, $\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-f(2)}{x-2}$

이때 f(2)=g(2)이고 두 함수 f(x), g(x)가 미분가능하므로

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$에서

f'(2)=g'(2)

㉢에서 f'(2)=2이므로 g'(2)=2

k(x)=g(x)-2x라 하면 k'(x)=g'(x)-2이고

k(2)=g(2)-4=0, k'(2)=g'(2)-2=0이므로
k(x)=a(x-2)^2 (a는 0이 아닌 상수)로 놓을 수 있다.
즉, g(x)=a(x-2)^2+2x=a(x^2-4x+4)+2x이고
g'(x)=a(2x-4)+2=2a(x-2)+2
조건 (다)에서 2<x<3인 모든 실수 x에 대하여 1≤g'(x)≤2이어야 하므로 a<0이다.
2<x<3이고 a<0일 때,
0<x-2<1, 2a<2a(x-2)<0
2a+2<2a(x-2)+2<2
즉, 2a+2<g'(x)<2이므로 조건 (다)를 만족시키려면
2a+2≥1, a≥$-\frac{1}{2}$
따라서 g(x)=a(x-2)^2+2x{$-\frac{1}{2}\leq a<0$} ⋯ ㉣
㉢, ㉣에서
$h(x)=\begin{cases}2x\,(0\leq x\leq 2)\\ a(x-2)^2+2x\,(2<x\leq 3)\end{cases}$ $(-\frac{1}{2}\leq a<0)$이므로
h(1)+h(3)=2+(a+6)=a+8은
a=$-\frac{1}{2}$일 때 최소이고 최솟값은 $\frac{15}{2}$이다.

{참고}
h(3)이 최소일 때는 g'(3)=1일 때이다

16)
[정답/모범답안]
3

[해설]
{풀이}
ㄱ. f(0)=0이므로 t=0일 때 P(0, 0)이다.
점 P(0, 0)을 지나고 y축에 수직인 직선은 x축이고, x축과 직선 y=4x-8이 만나는 점 Q의 x좌표는
0=4x-8에서 x=2
따라서 Q(2, 0)이므로 h(0)=2 (참)
ㄴ. 점 P(t, f(t))를 지나고 y축에 수직인 직선이 함수 y=g(x)의 그래프와 만나는 점 Q의 x좌표는
4x-8=f(t)에서 x=$\frac{1}{4}$f(t)+2
따라서 $Q(\frac{1}{4}f(t)+2, f(t))$이므로
h(t)=$|\frac{1}{4}f(t)+2-t|$(단, t>-1)
$h_1(t)=\frac{1}{4}f(t)+2-t\,(t>-1)$이라 하면
$$h_1(t)=\frac{1}{4}(t^3-t^2+3t)+2-t=\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t+2$$
$$h_1{}'(t)=\frac{3}{4}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(3t^2-2t-1)$$
$$=\frac{1}{4}(t-1)(3t+1)$$
$h_1{}'(t)=0$에서 $t=-\frac{1}{3}$ 또는 $t=1$

t>-1에서 함수 $h_1(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(-1)	⋯	$-\frac{1}{3}$	⋯	1	⋯
$h_1{}'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h_1(t)$	$\left(\frac{7}{4}\right)$	↗	$\frac{221}{108}$	↘	$\frac{7}{4}$	↗

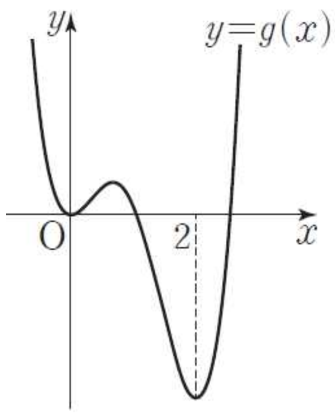
t>-1에서 $h_1(t)$>0이므로 h(t)=$h_1(t)$이다.
따라서 함수 h(t)는 t=1에서 극소이고, 극솟값은 $\frac{7}{4}$이다. (거짓)
ㄷ. ㄴ에 의하여 -1<t<$-\frac{1}{3}$에서 함수 h(t)는 증가하고
$\frac{7}{4}<h(t)<\frac{221}{108}$이므로 열린구간 (-1, $-\frac{1}{3}$)에서 h(t)의 값이 자연수 2가 되는 실수 t가 1개 존재한다.
$-\frac{1}{3}$<t<1에서 함수 h(t)는 감소하고
$\frac{7}{4}<h(t)<\frac{221}{108}$이므로 열린구간 ($-\frac{1}{3}$, 1)에서 h(t)의 값이 자연수 2가 되는 실수 t가 1개 존재한다.
1<t<2에서 함수 h(t)는 증가하고
$\frac{7}{4}$<h(t)<h(2)=$\frac{5}{2}$이므로 열린구간 (1, 2)에서 h(t)의 값이 자연수 2가 되는 실수 t가 1개 존재한다.
따라서 조건을 만족시키는 모든 t의 개수는 3이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17)
[정답/모범답안]
2

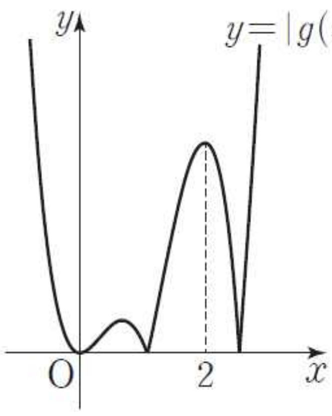
[해설]
{풀이}
ㄱ. 함수 f(x)가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 함수 g(x)는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이다.
g(x)=xf(x)에서 g'(x)=f(x)+xf'(x) ⋯ ㉠
㉠에서 x=0일 때 조건 (가)에 의하여
g'(0)=f(0)+0=0 (참)
ㄴ. g(x)=xf(x)에서 g(0)=0
조건 (나)에서
g(a)=af(a)>0, g(b)=b f(b)<0
함수 g(x)가 닫힌구간 [a, b]에서 연속이므로 사잇값의 정리에 의하여 g(d)=0인 실수 d가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.
함수 g(x)가 닫힌구간 [0, d]에서 연속이고 열린구간 (0, d)에서 미분가능하며 g(0)=g(d)이므로 롤의 정리에 의하여 g'(c)=0인 실수 c가 열린구간 (0, d)에 적어도 하나 존재한다.
따라서 g'(c)=0인 실수 c가 열린구간 (0, 2)에 적어도 하나 존재한다. (참)
ㄷ. ㉠에서 x=2일 때 조건 (가)에 의하여

$g'(2)=f(2)+2\ f'(2)=f(2)+2\times[-\frac{1}{2}f(2)]=0$

이고 ㄱ과 ㄴ에 의하여 함수 y=g(x)의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

함수 y=$|g(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같으므로 함수 $|g(x)|$가 극대 또는 극소가 되는 모든 x의 개수는 5이다. (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

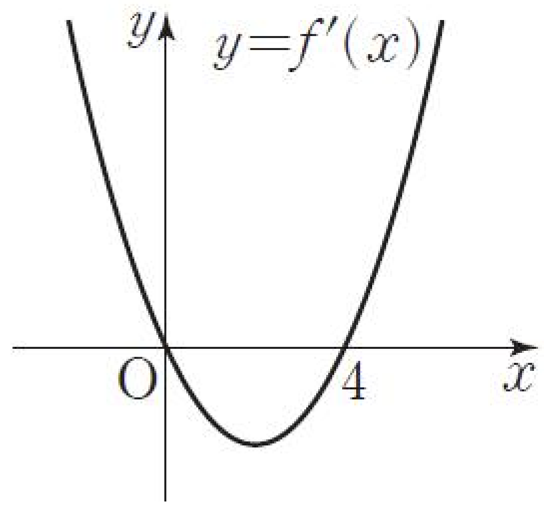
18)

[정답/모범답안]
3

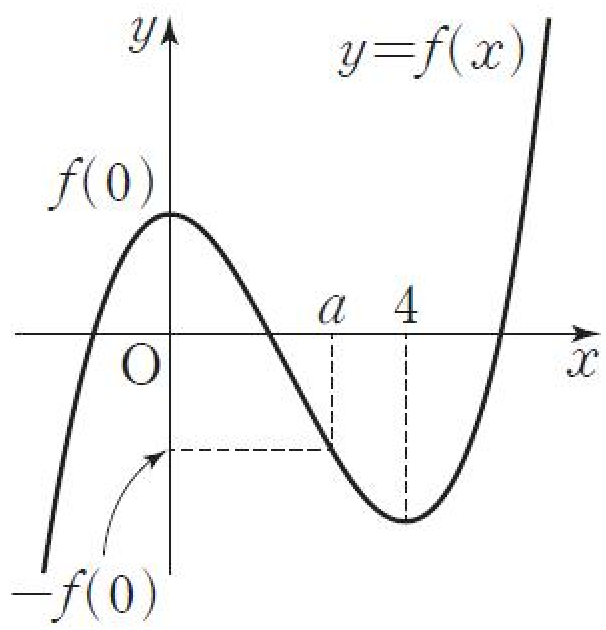
[해설]
{풀이}
삼차함수 f(x)의 도함수 f'(x)는 이차함수이다.
조건 (가)에서 f'(x)는 x=2에서 최솟값을 가지므로 이차함수 y=f'(x)의 그래프는 직선 x=2에 대하여 대칭이고 f'(x)의 최고차항의 계수는 양수이다.
조건 (나)에서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)+f(0)-f(-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\{\frac{f(h)-f(0)}{h}+\frac{f(-h)-f(0)}{-h}\}$$
$$=f'(0)+f'(0)$$
$$=2f'(0)=0$$

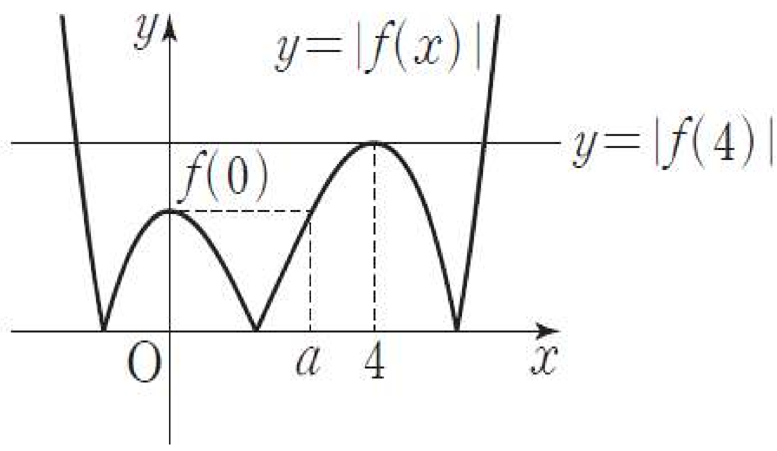
이므로 f'(0)=0이다.
또한 함수 y=f'(x)의 그래프는 직선 x=2에 대하여 대칭이므로 f'(4)=0이다.
따라서 함수 y=f'(x)의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. x=0의 좌우에서 f'(x)의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 f(x)는 x=0에서 극댓값을 갖고, x=4의 좌우에서 f'(x)의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 f(x)는 x=4에서 극솟값을 갖는다. (참)
ㄴ. 0<a<4인 어떤 실수 a에 대하여 f(0)=-f(a)이므로 함수 y=f(x)의 그래프의 개형은 그림과 같다.

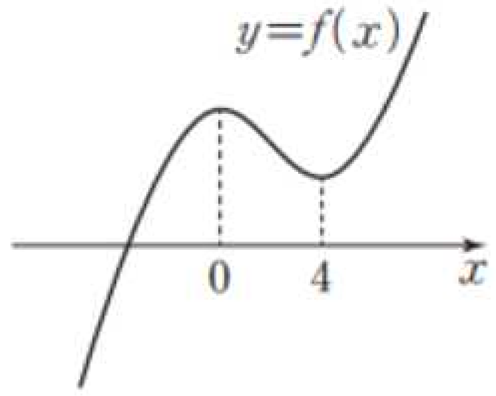


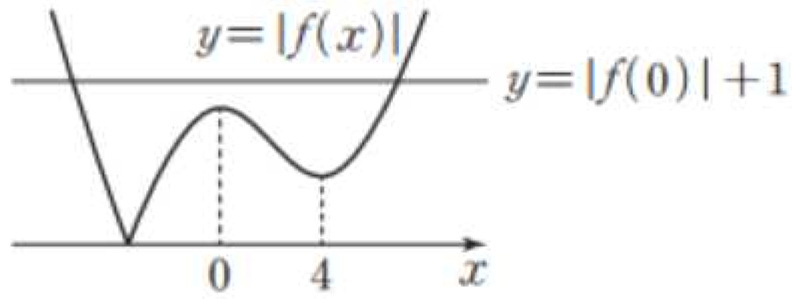
또한 함수 y=$|f(x)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서 방정식 $|f(x)|=|f(4)|$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)
ㄷ.f(0)f(4)>0이면 두 함수 y=f(x)와 y=$|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

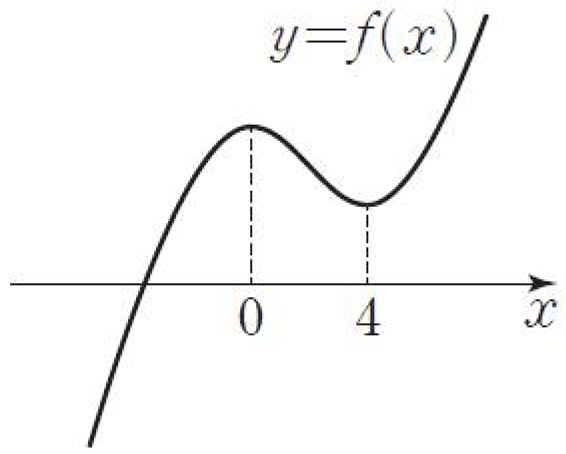
(i) f(0)>0이고 f(4)>0인 경우

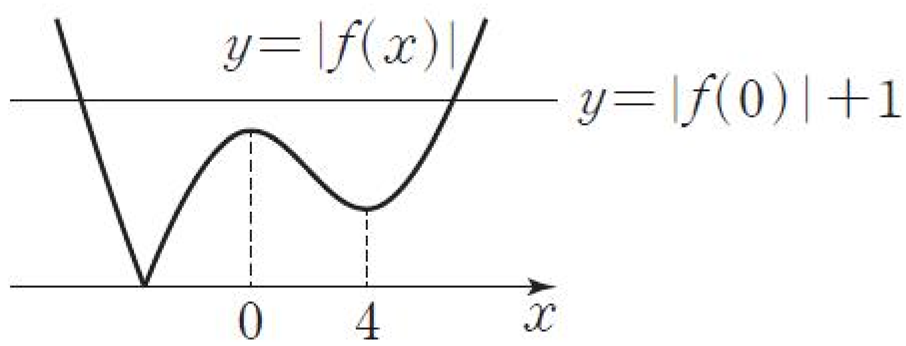




따라서 방정식 $|f(x)|=|f(0)|+1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(ii) f(0)<0이고 f(4)<0인 경우





따라서 방정식 $|f(x)|=|f(0)|+1$의 서로 다른 실근의 개수가 2 또는 3 또는 4인 경우가 생길 수 있다.

(i), (ii)에서 f(0)f(4)>0이면 방정식 $|f(x)|=|f(0)|+1$의 서로 다른 실근의 개수는 2 또는 3 또는 4이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19)

[정답/모범답안]

19

[해설]

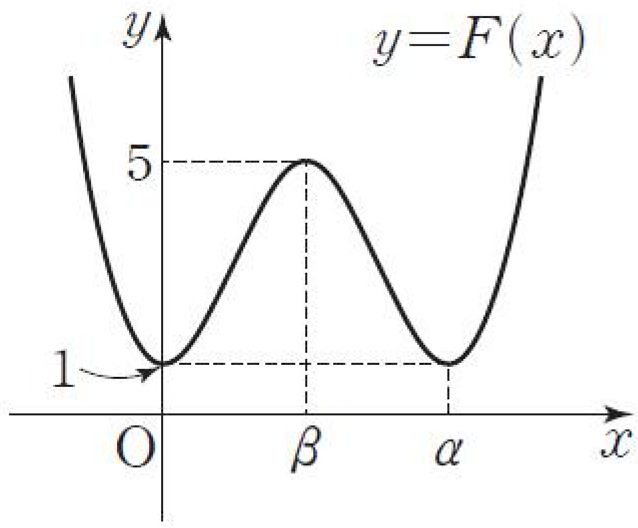
{정답}

조건 (가)에서 F(0)=F(a)=1

F(x)는 사차함수이고 x=0과 x=α에서 극솟값을 가지므로 0<β<α인 실수 β에 대하여 함수 F(x)는 x=β에서 극댓값 5를 갖는다.

즉, F(β)=5

따라서 함수 y=F(x)의 그래프는 그림과 같다.



F'(x)=f(x)이므로 0<x<β에서 f(x)>0, β<x<α에서 f(x)<0, x>α에서 f(x)>0이다.

k>0이고 F(k)=12이므로 k>α이다.

그러므로

$$\int_0^k |f(x)|dx$$
$$=\int_0^\beta f(x)dx+\int_\beta^\alpha \{-f(x)\}dx+\int_\alpha^k f(x)dx$$
$$=\int_0^\beta f(x)dx-\int_\beta^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^k f(x)dx$$
$$=[F(x)]_0^\beta-[F(x)]_\beta^\alpha+[F(x)]_\alpha^k$$
$$=\{F(\beta)-F(0)\}-\{F(\alpha)-F(\beta)\}+\{F(k)-F(\alpha)\}$$
=(5-1)-(1-5)+(12-1)=19

20)

[정답/모범답안]

3

[해설]

{풀이}

함수 F(t)의 한 부정적분을 G(t)라 하면

$\int_m^{m+h} F(t)dt=[G(t)]_m^{m+h}=G(m+h)-G(m)$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_m^{m+h} F(t)dt=\lim_{h\to 0}\frac{G(m+h)-G(m)}{h}$$
$$=G'(m)=F(m)$$

이때 F(m)=F(m+2)에서

F(m+2)-F(m)=0

즉, $[F(t)]_m^{m+2}=0$이므로

$\int_m^{m+2} f(x)dx=0 \cdots$ ㉠

모든 정수 m에 대하여 ㉠이 성립하므로

$\int_0^2 f(x)dx=0$

조건 (가)에 의하여

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x^3+4x+a)dx$

$=[\frac{1}{4}x^4+2x^2+ax]_0^2$

=(4+8+2a)-0

=12+2a

이므로 12+2a=0에서 a=-6

따라서 ㉠에 의하여

$\int_0^{15} f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx$

$+\cdots+\int_{13}^{15} f(x)dx$

$=\int_0^1 (x^3+4x-6)dx+0+0+\cdots+0$

$=[\frac{1}{4}x^4+2x^2-6x]_0^1$

$=(\frac{1}{4}+2-6)-0=-\frac{15}{4}$

{참고}

풀이에서 모든 정수 m에 대하여 $\int_m^{m+2} f(x)dx=0$이므로

$\int_0^{15} f(x)dx$의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\int_0^{15} f(x)dx$

$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\cdots+\int_{12}^{14} f(x)dx$

$+\int_{14}^{15} f(x)dx$

$=0+0+\cdots+0+F(15)-F(14)$

$=F(1)-F(0)(F(m)=F(m+2)$이므로$)$

$=\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 (x^3+4x-6)dx$

$=[\frac{1}{4}x^4+2x^2-6x]_0^1$

$=(\frac{1}{4}+2-6)-0=-\frac{15}{4}$

21)

[정답/모범답안]

5

[해설]

{풀이}

ㄱ. g(x)=(x+1)f(x)-$\int_{-1}^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-f(x)=(x+1)f'(x)

그런데 x<2에서 f'(x)>0에 의하여

x<2에서 f(x)<f(2)이므로 $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}>0$

즉, $\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\geqq 0$

x>2에서 f'(x)<0에 의하여

x>2에서 f(x)<f(2)이므로 $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$<0

즉, $\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\leqq 0$

함수 f(x)가 다항함수이므로

$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$에서

f'(2)=0

따라서 g'(2)=3f'(2)=0 (참)

ㄴ. g(x)=(x+1)f(x)-$\int_{-1}^x f(t)dt$의 양변에 x=-1을 대입하면

g(-1)=0-$\int_{-1}^{-1} f(t)dt=0$

x<-1에서 g'(x)=(x+1)f'(x)<0이고,

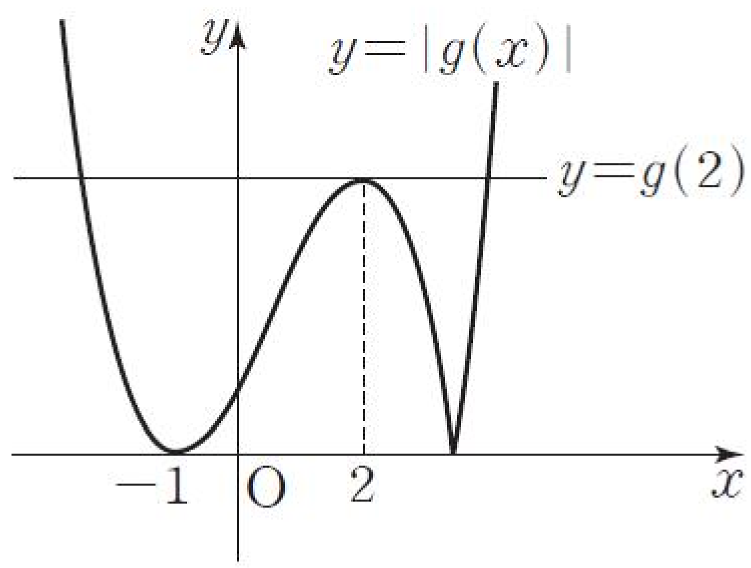
-1<x<2에서 g'(x)=(x+1)f'(x)>0이므로 함수 g(x)는 x=-1에서 극소이다.

따라서 함수 g(x)는 x=-1에서 극솟값 g(-1)=0을 갖는다. (참)

ㄷ. -1<x<2에서 g'(x)=(x+1)f'(x)>0이고,

x>2에서 g'(x)=(x+1)f'(x)<0이므로 함수 g(x)는 x=2에서 극대이다.

함수 g(x)가 다항함수이므로 함수 y=$|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $|g(x)|$=g(2)의 실근의 개수는 함수 y=$|g(x)|$의 그래프와 직선 y=g(2)가 만나는 점의 개수와 같으므로 방정식 $|g(x)|$=g(2)의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22)

[정답/모범답안]

1

[해설]

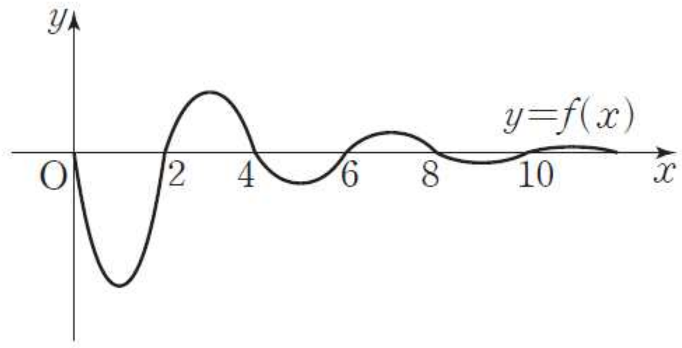
{풀이}

$0 \le x \le 2$일 때 $f(x)=3x(x-2)$이고,

모든 양수 x에 대하여 $f(x+2)=-\frac{1}{2}f(x)$이므로

x좌표가 2만큼 커지면 y좌표는 $-\frac{1}{2}$배가 된다.

따라서 함수 y=f(x)의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

$\int_a^s f(x)dx=0$에서 $\int_a^s f(x)dx+\int_0^s f(x)dx=0$이므로

$\int_0^s f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$, 즉 F(s)=F(a)

그러므로 $\int_a^s f(x)dx=0$인 양수 s의 개수는 함수 y=F(s)의 그래프와 직선 y=F(a)가 만나는 점의 개수와 같다.

조건 (가)에 의하여

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(3x^2-6x)dx$

$=[x^3-3x^2]_0^2=8-12=-4$

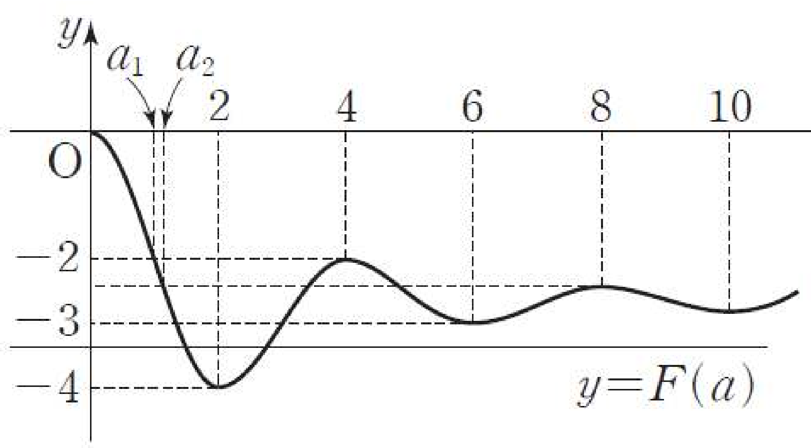
조건 (나)에 의하여

$\int_2^4 f(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx=-\frac{1}{2}\times(-4)=2$

같은 방법으로

$\int_0^2 f(x)dx=-2\int_2^4 f(x)dx=4\int_4^6 f(x)dx=\cdots$

함수 y=F(t)의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

그러므로 두 함수 y=F(t), y=F(a)의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 실수 a의 최솟값 a_1은 [그림 2]와 같이 $F(a_1)=F(4)$를 만족시키므로

$F(a_1)=F(4)=-4+2=-2$

같은 방법으로

$F(a_2)=F(8)=-4+2-1+\frac{1}{2}$

$F(a_3)=F(12)=-4+2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

⋮

$F(a_n)=F(4n)=(-4+2)+(-1+\frac{1}{2})+(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8})$

$+\cdots+(-4\times\frac{1}{4^{n-1}}+2\times\frac{1}{4^{n-1}})$

이므로

$F(a_5)=(-4+2)+(-1+\frac{1}{2})$

$+\cdots+(-4\times\frac{1}{4^4}+2\times\frac{1}{4^4})$

$=(-2)+\frac{1}{4}\times(-2)+\cdots+\frac{1}{4^4}\times(-2)$

$=\dfrac{-2\{1-(\frac{1}{4})^5\}}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{8}{3}(1-\frac{1}{2^{10}})=-\frac{341}{128}$

따라서 $F(a_1)\times F(a_5)=(-2)\times(-\frac{341}{128})=\frac{341}{64}$

23)

[정답/모범답안]

2

[해설]

{풀이}

곡선 $y=3x^2-3$과 x축이 만나는 점의 x좌표는

$3x^2-3=0$에서 $x^2=1$

x=-1 또는 x=1

이때 닫힌구간 [-1, 1]에서 $3x^2-3\le0$이므로 곡선 $y=3x^2-3$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\int_{-1}^1\{-(3x^2-3)\}dx$

$=\int_{-1}^1(-3x^2+3)dx$

$=2\int_0^1(-3x^2+3)dx$

$=2[-x^3+3x]_0^1$

$=2\{(-1+3)-0\}=4$

한편 두 곡선 $y=3x^2-3$, $y=ax^2$이 만나는 점의 x좌표는

$3x^2-3=ax^2$에서 $(3-a)x^2=3$

$x^2=\frac{3}{3-a}$, $x=-\sqrt{\frac{3}{3-a}}$ 또는 $x=\sqrt{\frac{3}{3-a}}$

$t=\sqrt{\frac{3}{3-a}}$이라 하면

$t^2=\frac{3}{3-a}$, $\frac{1}{t^2}=\frac{3-a}{3}$, $a=3-\frac{3}{t^2}\cdots$ ㉠

이때 곡선 $y=3x^2-3$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 곡선 $y=ax^2(a<0)$에 의하여 삼등분되므로 두 곡선 $y=3x^2-3$, $y=ax^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$S_2 = \frac{1}{3}S_1 = \frac{4}{3}$

또한 닫힌구간 [-t, t]에서 $3x^2-3 \le ax^2$이므로

$S_2 = \int_{-t}^{t}\{ax^2-(3x^2-3)\}dx$

$= \int_{-t}^{t}\{(a-3)x^2+3\}dx$

$= 2\int_{0}^{t}\{(a-3)x^2+3\}dx$

$= 2[\frac{a-3}{3}x^3+3x]_0^t$

$= 2\{(\frac{a-3}{3}t^3+3t)-0\}$

$= 2(-\frac{3-a}{3}\times t^3+3t)$

$= 2(-\frac{1}{t^2}\times t^3+3t)$

$= 2\times 2t = 4t$

$4t=\frac{4}{3}$에서 $t=\frac{1}{3}$

따라서 이 값을 ㉠에 대입하면

$a=3-\frac{3}{\frac{1}{9}}=-24$

24)

[정답/모범답안]

3

[해설]

{풀이}

두 조건 (가), (나)에 의하여 구간 [4, 8)에서

$f(x)=a(x-4)\{(x-4)-3\}^2+2=a(x-4)(x-7)^2+2$

함수 f(x)가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 x=4에서도 연속이다.

이때

$\lim_{x\to 4-}f(x)=\lim_{x\to 4-}ax(x-3)^2=4a$

$\lim_{x\to 4+}f(x)=\lim_{x\to 4+}\{a(x-4)(x-7)^2+2\}=2$

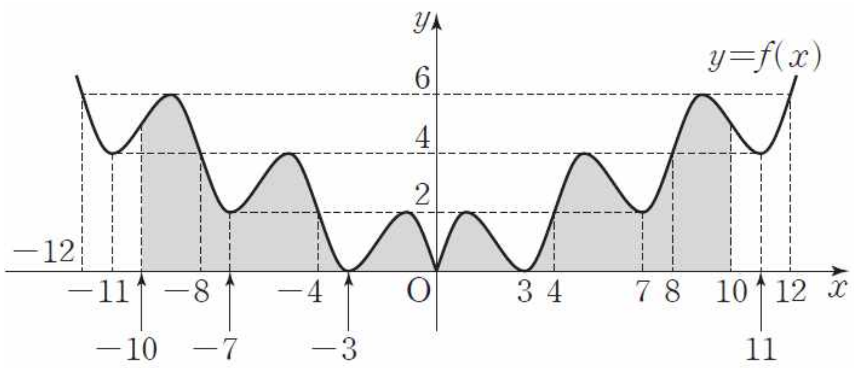
$f(4)=2$

이므로 $\lim_{x\to 4-}f(x)=\lim_{x\to 4+}f(x)=f(4)$에서

$4a=2,\ a=\frac{1}{2}$

즉, 구간 [0, 4)에서 $f(x)=\frac{1}{2}x(x-3)^2$이다.

조건 (나)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 구간 [4n, 4n+4)에서의 곡선 y=f(x)는 구간 [0, 4)에서의 곡선 y=f(x)를 x축의 방향으로 4n만큼, y축의 방향으로 2n만큼 평행이동한 곡선이고 조건 (다)에 의하여 곡선 y=f(x)는 y축에 대하여 대칭이므로 곡선 y=f(x)는 그림과 같다.



한편

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 \frac{1}{2}x(x-3)^2dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^2(x^3-6x^2+9x)dx$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2]_0^2$

$=\frac{1}{2}\{(4-16+18)-0\}=3$

$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 \frac{1}{2}x(x-3)^2dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^4(x^3-6x^2+9x)dx$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2]_0^4$

$=\frac{1}{2}\{(64-128+72)-0\}=4$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-10}^{10}f(x)dx$

$=2\int_0^{10}f(x)dx$

$=2\int_0^4 f(x)dx+2\int_4^8 f(x)dx+2\int_8^{10}f(x)dx$

$=2\int_0^4 f(x)dx+2\{\int_0^4 f(x)dx+(8-4)\times 2$

$+2\{\int_0^2 f(x)dx+(10-8)\times 4\}$

$=2\times 4+2(4+8)+2(3+8)=54$

25)

[정답/모범답안]

1

[해설]

{풀이}

$f(x)=f(x)=x^3-3x^2+3x-6$에서

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 f(x)의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	$f(1)$	↗

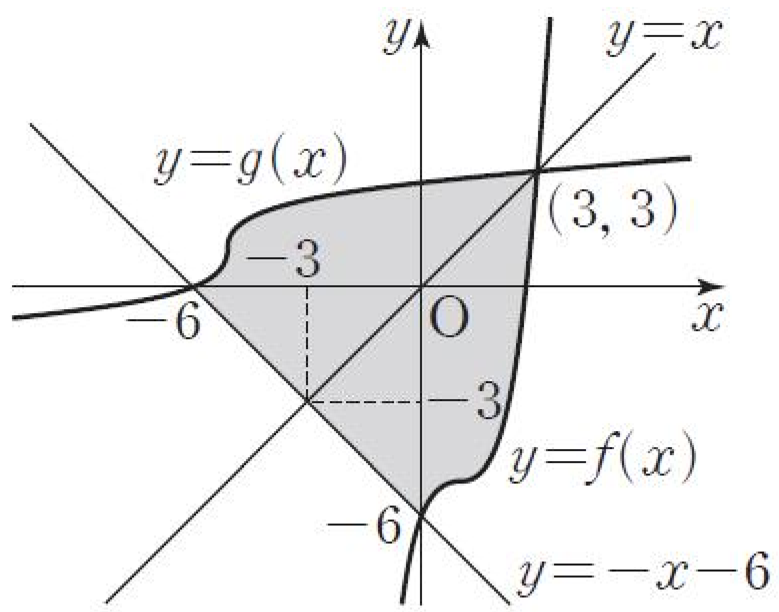
이때 f(0)=-6이고, 곡선 y=f(x)와 직선 y=x가 만나는 점의 x좌표는 f(x)=x에서

$x^3-3x^2+3x-6=x$, $x^3-3x^2+2x-6=0$

$(x-3)(x^2+2)=0$

$x^2\geq 0$이므로 x=3

즉, 곡선 y=f(x)와 직선 y=x는 점 (3, 3)에서만 만나고 두 곡선 y=f(x), y=g(x)는 직선 y=x에 대하여 대칭이므로 두 곡선 y=f(x), y=g(x)와 직선 y=-x-6으로 둘러싸인 부분은 그림의 색칠한 부분과 같다.



한편 두 직선 y=x, y=-x-6이 만나는 점의 x좌표는

x=-x-6에서 x=-3

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=2\int_{-3}^{0}\{x-(-x-6)\}dx$

$+2\int_{0}^{3}\{x-(x^3-3x^2+3x-6)\}dx$

$=2\int_{-3}^{0}(2x+6)dx+2\int_{0}^{3}(-x^3+3x^2-2x+6)dx$

$=2[x^2+6x]_{-3}^{0}+2[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2+6x]_{0}^{3}$

$=2\{0-(9-18)\}+2\{(-\frac{81}{4}+27-9+18)-0\}$

$=\frac{99}{2}$