

# 2019학년도 11월 고2 전국연합학력평가

## 정답 및 해설

### • 2교시 수학 영역 •

#### [가형]

1	5	2	4	3	1	4	5	5	3
6	4	7	5	8	4	9	2	10	2
11	3	12	1	13	2	14	4	15	1
16	3	17	3	18	2	19	2	20	3
21	1	22	4	23	10	24	11	25	22
26	5	27	64	28	192	29	61	30	7

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

$$2^3 \times 4^{\frac{1}{2}} = 2^3 \times (2^2)^{\frac{1}{2}} = 8 \times 2 = 16$$

2. [출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

$$\tan \frac{7}{6}\pi = \tan \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. [출제의도] 미분계수 이해하기

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{3h} = \frac{1}{3} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{1}{3} f'(4) = 7$$

따라서  $f'(4) = 3 \times 7 = 21$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$f(3) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + 1 = 2$$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{2}$$

따라서  $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$

6. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$\log_9 a^3 b = \log_9 9 + \log_9 (ab)^2$$

$$\log_9 a^3 b = \log_9 9a^2 b^2$$

$$a^3 b = 9a^2 b^2 \text{에서 } \frac{a}{b} = 9$$

7. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4,$$

$$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \times 4 - 1 = 7,$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 7 + 3 = 10,$$

$$a_5 = 2a_4 - 1 = 2 \times 10 - 1 = 19$$

8. [출제의도] 일반각과 호도법 이해하기

각  $\theta$ 를 나타내는 동경과 각  $6\theta$ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$6\theta - \theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수}), \quad \theta = \frac{2n}{5}\pi$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로 } n = 2 \text{일 때, } \theta = \frac{4}{5}\pi$$

9. [출제의도] 상용로그 이해하기

$$\log 10^n = n, \quad \log 10^{n+1} = n+1$$

$$\log 24^{10} = 10 \log 24$$

$$= 10(3 \log 2 + \log 3) = 13.801$$

$$n < 13.801 < n+1 \text{이므로 } n = 13$$

10. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를  $r$ 라 하면

$$\pi = r \times \frac{\pi}{3} \text{에서 } r = 3$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3^2 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

11. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

두 함수  $f(x) = 3^x$ ,  $g(x) = 3^{2-x} + a$ 의 그래프가

만나는 점의  $x$ 좌표가 2이므로

$$3^2 = 3^{2-2} + a, \quad a = 8$$

따라서 함수  $f(x)g(x) = 8 \times 3^x + 9$ 는

단원구간  $[1, 3]$ 에서  $x = 1$ 일 때, 최솟값 33을 갖는다.

12. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + ax + b}{x-1} & (x \neq 1) \\ 4 & (x = 1) \end{cases} \text{이고}$$

함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로  $x = 1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax + b}{x-1} = 4 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax + b) = 1 + a + b = 0, \quad b = -a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax - a - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + a + 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + a + 1) = 3 + a = 4$$

따라서  $a = 1$ ,  $b = -2$ 이므로  $a \times b = -2$

13. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

$$\log_2(x+4) = 0 \text{에서 } x = -3 \text{이므로 } A(-3, 0)$$

$$\log_2 x + 1 = 0 \text{에서 } x = \frac{1}{2} \text{이므로 } B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\log_2(x+4) = \log_2 x + 1 \text{에서 } x = 4 \text{이므로 } C(4, 3)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는  $\frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times 3 = \frac{21}{4}$

14. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$$\sum_{k=1}^{24} (-1)^k a_k$$

$$= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots - a_{23} + a_{24}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{24}) - 2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{23})$$

$$= \sum_{k=1}^{24} a_k - 2 \sum_{k=1}^{12} a_{2k-1}$$

$$= (6 \times 12^2 + 12) - 2 \times (3 \times 12^2 - 12)$$

$$= 36$$

15. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$$a^x - 1 = n \text{에서 } x = \log_a(n+1),$$

$$a^x - 1 = n+1 \text{에서 } x = \log_a(n+2) \text{이므로}$$

선분  $A_n A_{n+1}$ 을 대각선으로 하는 직사각형의 넓이  $S_n$ 은

$$S_n = \log_a(n+2) - \log_a(n+1)$$

$$= \log_a \frac{n+2}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{14} S_n = \sum_{n=1}^{14} \log_a \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \log_a \frac{3}{2} + \log_a \frac{4}{3} + \log_a \frac{5}{4} + \dots + \log_a \frac{16}{15}$$

$$= \log_a \left( \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{16}{15} \right) = \log_a 8$$

$$\sum_{n=1}^{14} S_n = 6 \text{에서 } \log_a 8 = 6, \quad a^6 = 8$$

따라서  $a > 1$ 이므로  $a = \sqrt[6]{8}$

16. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

함수  $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 치역은  $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이고,

주기가 4이다.

따라서  $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수  $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프가

직선  $y = k$ 와 두 점에서 만나려면

$-1 < k < 1$ 이어야 한다.

$0 \leq x \leq 4$ 에서 함수  $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프가

직선  $y = k$ 와 만나는 두 점의  $x$ 좌표를

각각  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ )라 하면

$\beta - \alpha > 1$ 일 때,

$f(t) = 2$ 를 만족시키는  $t$ 의 값은 존재하지 않고,

$\beta - \alpha < 1$ 일 때,

$f(t) = 2$ 를 만족시키는  $t$ 의 값이 유일하지 않다.

$\beta - \alpha = 1$ 일 때,

$$f(0) = 1 \text{이므로 } \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}$$

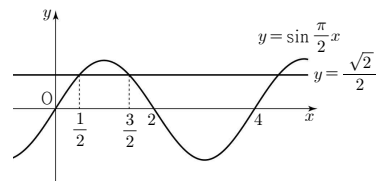
$$0 \leq t < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < t \leq \frac{3}{2} \text{일 때, } f(t) = 1$$

$$t = \frac{1}{2} \text{일 때, } f(t) = 2$$

$$\frac{3}{2} < t \leq 3 \text{일 때, } f(t) = 0$$

따라서  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{3}{2}$ ,  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$a^2 + b^2 + k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3$$



17. [출제의도] 수열을 이용하여 추론하기

세 자연수  $a$ ,  $b$ ,  $d$ 는  $2b = a + d$ 를 만족시키므로

이 순서대로 등차수열을 이룬다.

이 등차수열의 공차가 될 수 있는 가장 작은 값은 2, 가장 큰 값은 10이다.

이 등차수열의 공차를  $k$  ( $2 \leq k \leq 10$ )이라 하면

$1 \leq a < a+k < c < a+2k \leq 21$ 이므로

$c$ 가 될 수 있는 모든 자연수의 개수는  $k-1$ 이고

$a$ 가 될 수 있는 모든 자연수의 개수는

$$21 - 2k \text{이다.}$$

따라서 구하는 모든 순서쌍  $(a, b, c, d)$ 의 개수는

$$\sum_{k=2}^{10} \left\{ (k-1) \times (21 - 2k) \right\}$$

$$= \sum_{k=2}^{10} (-2k^2 + 23k - 21)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (-2k^2 + 23k - 21) - (-2 \times 1^2 + 23 \times 1 - 21)$$

$$= -2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 23 \times \frac{10 \times 11}{2} - 21 \times 10$$

= 285

따라서  $p=10$ ,  $f(k)=21-2k$ ,  $q=285$ 이므로  
 $p+q+f(3)=10+285+15=310$

18. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

함수  $f(x)=a\cos bx+c$ 의 최댓값이 3,  
 최솟값이  $-1$ 이고  $a$ 가 양수이므로  $a=2$ ,  $c=1$

함수  $f(x)=2\cos bx+1$ 의 주기가  $\frac{2\pi}{b}$ 이므로

$$\overline{AB} = \frac{2\pi}{b}$$

$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{b}$ 에서 방정식  $2\cos bx+1=0$ 의 해는

$$x = \frac{2\pi}{3b}, x = \frac{4\pi}{3b} \text{ 이므로 } \overline{CD} = \frac{2\pi}{3b}$$

사각형 ACDB의 넓이는  $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2\pi}{3b} + \frac{2\pi}{b}\right) \times 3 = 6\pi$

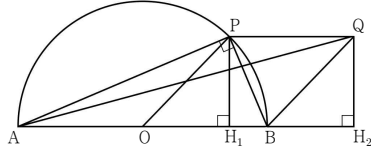
$$\text{이므로 } b = \frac{2}{3}$$

따라서  $f(x)=2\cos \frac{2}{3}x+1$

$0 \leq x \leq 4\pi$ 에서 방정식  $f(x)=2$ 의 모든 해는

$$\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi \text{ 이므로 합은 } \frac{13}{2}\pi$$

19. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기



그림과 같이 두 점 P, Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각  $H_1$ ,  $H_2$ 라 하자.

직각삼각형 APB에서  $\overline{AP} = \sqrt{4-t^2}$ 이고

직각삼각형 OH1P에서  $\overline{OH_1}^2 + \overline{PH_1}^2 = 1$ 이므로

직각삼각형 AH1P에서

$$\overline{AP}^2 = (\overline{OH_1} + \overline{PH_1})^2 + \overline{PH_1}^2, 4-t^2 = 2 + 2\overline{OH_1}$$

$$\text{따라서 } \overline{OH_1} = 1 - \frac{t^2}{2}$$

$$\overline{PH_1} = \sqrt{1 - \overline{OH_1}^2} = \frac{t}{2} \sqrt{4-t^2}$$

$\overline{BH_2} = \overline{OH_1}$ ,  $\overline{QH_2} = \overline{PH_1}$ 이므로

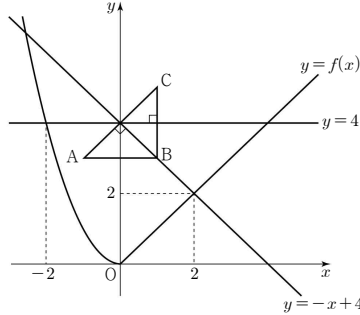
직각삼각형 AH2Q에서

$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= \sqrt{(\overline{OH_1} + \overline{QH_2})^2 + \overline{QH_2}^2} \\ &= \sqrt{(\overline{OH_1} + \overline{PH_1})^2 + \overline{PH_1}^2} \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} \sqrt{4-t^2}\right)^2 + \frac{t^2}{4}(4-t^2)} \\ &= \sqrt{9-2t^2} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3 - \overline{AQ}}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3 - \sqrt{9-2t^2}}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{9 - (9-2t^2)}{t^2(3 + \sqrt{9-2t^2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2}{3 + \sqrt{9-2t^2}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

20. [출제의도] 함수의 미분가능성 추론하기



그림과 같이 선분 BC의 수직이등분선  $y=4$ 는  
 함수  $y=f(x)$  ( $x < 0$ )의 그래프와 점  $(-2, 4)$ 에서  
 만나고, 선분 AC의 수직이등분선  $y=-x+4$ 는  
 함수  $y=f(x)$  ( $x \geq 0$ )의 그래프와 점  $(2, 2)$ 에서  
 만난다.

점  $P(x, f(x))$ 에 대하여

$\overline{PQ}^2$ 의 값이 최대가 되도록 하는 점 Q는

$x < -2$ 일 때 점  $B(1, 3)$ ,

$-2 \leq x < 2$ 일 때 점  $C(1, 5)$ ,

$x \geq 2$ 일 때 점  $A(-1, 3)$ 이다.

(i)  $x < -2$ 일 때

점  $P(x, x^2)$ 에 대하여  $g(x) = \overline{PB}^2$ 이므로

$$g(x) = (x-1)^2 + (x^2-3)^2 = x^4 - 5x^2 - 2x + 10$$

(ii)  $-2 \leq x < 0$ 일 때

점  $P(x, x^2)$ 에 대하여  $g(x) = \overline{PC}^2$ 이므로

$$g(x) = (x-1)^2 + (x^2-5)^2 = x^4 - 9x^2 - 2x + 26$$

(iii)  $0 \leq x < 2$ 일 때

점  $P(x, x)$ 에 대하여  $g(x) = \overline{PC}^2$ 이므로

$$g(x) = (x-1)^2 + (x-5)^2 = 2x^2 - 12x + 26$$

(iv)  $x \geq 2$ 일 때

점  $P(x, x)$ 에 대하여  $g(x) = \overline{PA}^2$ 이므로

$$g(x) = (x+1)^2 + (x-3)^2 = 2x^2 - 4x + 10$$

(i) ~ (iv)에 의하여

$$g(x) = \begin{cases} x^4 - 5x^2 - 2x + 10 & (x < -2) \\ x^4 - 9x^2 - 2x + 26 & (-2 \leq x < 0) \\ 2x^2 - 12x + 26 & (0 \leq x < 2) \\ 2x^2 - 4x + 10 & (x \geq 2) \end{cases}$$

∴  $g(0) = 26$  (참)

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 - 12x + 26) = 10,$$

$$g(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^2 - 4x + 10) = 10$$

이므로 함수  $g(x)$ 는  $x=2$ 에서 연속이다.

$0 \leq x \leq 2$ 에서 함수  $y=2(x-3)^2+8$ 은  
 $x=2$ 일 때 최솟값 10을 갖고,

$2 \leq x \leq 3$ 에서 함수  $y=2(x-1)^2+8$ 은  
 $x=2$ 일 때 최솟값 10을 가지므로

닫힌구간  $[0, 3]$ 에서 함수  $g(x)$ 의  
 최솟값은 10이다. (참)

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^4 - 5x^2 - 2x + 10 - 10}{x + 2} = -14$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^4 - 9x^2 - 2x + 26 - 10}{x + 2} = 2 \text{ 이므로}$$

함수  $g(x)$ 는  $x=-2$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 - 9x^2 - 2x + 26 - 26}{x} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 - 12x + 26 - 26}{x} = -12 \text{ 이므로} \end{aligned}$$

함수  $g(x)$ 는  $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 12x + 26 - 10}{x - 2} = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 4x + 10 - 10}{x - 2} = 4 \text{ 이므로} \end{aligned}$$

함수  $g(x)$ 는  $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 미분가능하지 않은 모든  $a$ 의 값의 합은  
 $-2+0+2=0$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

21. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

함수  $|f(x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^-} |2x+a| = |a|,$$

$$|f(0)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x^2+bx+c| = |c| \text{ 에서}$$

$a=c$  또는  $a=-c$

조건 (가)에서

4가 함수  $g(t)$ 의 치역의 원소 중 하나이므로

함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=t$ 가 서로 다른  
 네 점에서 만나도록 하는 실수  $t$ 가 존재해야 한다.

그러므로 직선  $y=t$ 가

$x < 0$ 에서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와

서로 다른 두 점에서 만나도록 하고,

$x \geq 0$ 에서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와

서로 다른 두 점에서 만나도록 하는

실수  $t$ 가 존재해야 한다.

따라서  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $c = a$ 이고

함수  $y=x^2+bx+c$  ( $x \geq 0$ )의 최솟값이 0보다  
 작아야 한다.

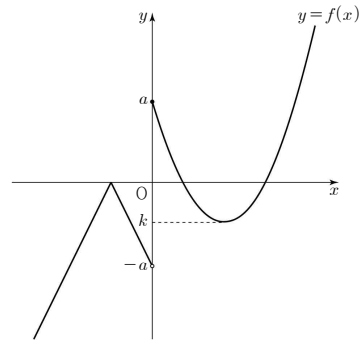
함수  $y=x^2+bx+c$  ( $x \geq 0$ )의 최솟값을  $k$ 라 하자.

(i)  $-a < k < 0$ 일 때

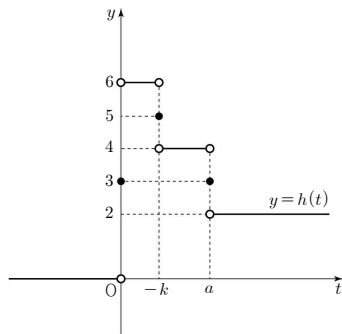
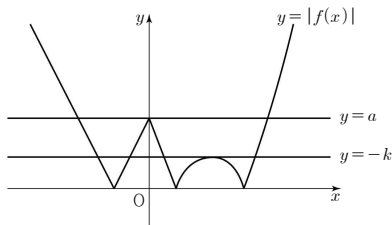
함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은

그림과 같으므로 함수  $g(t)$ 의

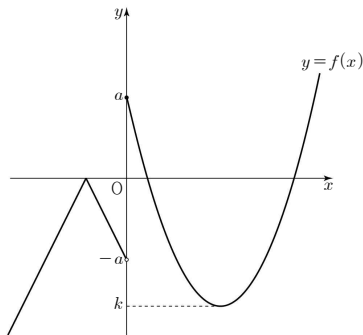
치역은  $\{1, 2, 3, 4\}$ 이다.



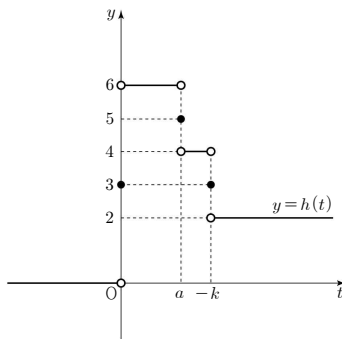
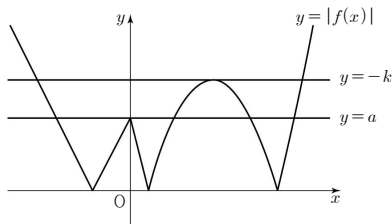
함수  $y=|f(x)|$ 의 그래프의 개형과  
 함수  $y=h(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



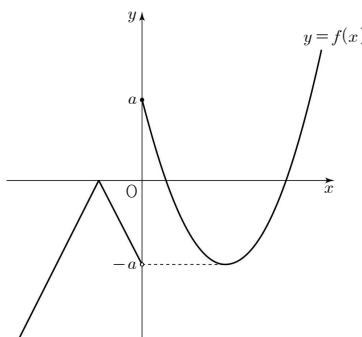
(ii)  $k < -a$  일 때  
 함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은  
 그림과 같으므로 함수  $g(t)$ 의  
 치역은  $\{1, 2, 3, 4\}$ 이다.



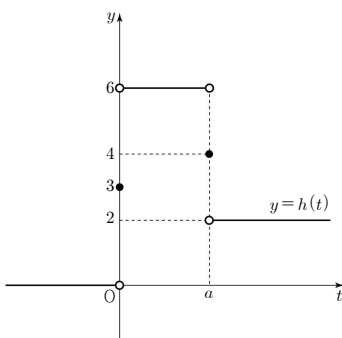
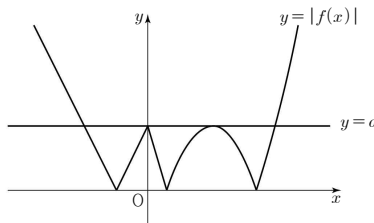
함수  $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형과  
 함수  $y = h(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



(iii)  $k = -a$  일 때  
 함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은  
 그림과 같으므로 함수  $g(t)$ 의  
 치역은  $\{1, 2, 3, 4\}$ 이다.



함수  $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형과  
 함수  $y = h(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



(i) ~ (iii)에 의하여  
 $k = -a$  일 때, 함수  $h(t)$ 가 조건 (나)를 만족시키므로  
 $a = 2$ 이고  $c = 2, k = -2$   
 $x^2 + bx + 2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 2 - \frac{b^2}{4}$  이므로  
 $2 - \frac{b^2}{4} = -2, b = -4 (b < 0)$

함수  $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} -|2x+2| & (x < 0) \\ x^2 - 4x + 2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

따라서  $f(-2) + f(6) = -2 + 14 = 12$

22. [출제의도] 도함수 계산하기

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \text{ 이므로 } f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4$$

23. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$$4^{x-2} \leq 32 \text{ 에서 } 2^{2x-4} \leq 2^5$$

$$2x - 4 \leq 5, x \leq \frac{9}{2}$$

따라서 구하는 모든 자연수  $x$ 의 값의 합은  
 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

24. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$$a_1 = S_1 = 3,$$

$$a_4 = S_4 - S_3 = (4^2 + 4 + 1) - (3^2 + 3 + 1) = 8$$

따라서  $a_1 + a_4 = 11$

25. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2 \text{ 이므로}$$

$f(x) = 2x^2 + ax + b$  ( $a, b$ 는 상수)라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 7 \text{ 에서 } \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$$

$$8 + 2a + b = 0, b = -2(a+4)$$

$$f(x) = (x-2)(2x+a+4) \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+a+4)}{x-2} = a+8 = 7$$

에서  $a = -1, b = -6$

따라서  $f(x) = 2x^2 - x - 6$  이므로

$$f(4) = 32 - 4 - 6 = 22$$

26. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

곡선  $y = 3^x + 1$ 을 직선  $y = x$ 에 대하여  
 대칭이동하면 곡선  $y = \log_3(x-1)$ 이고,  
 곡선  $y = \log_3(x-1)$ 을  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼,  
 $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동한 곡선이  
 $y = f(x)$  이므로

$$f(x) = \log_3(x-a-1) + b$$

곡선  $y = f(x)$ 의 점근선이  $x = 5$  이므로

$$a+1 = 5, a = 4$$

곡선  $y = f(x)$ 가 곡선  $y = 3^x + 1$ 의 점근선  $y = 1$ 과  
 만나는 점의  $x$ 좌표가 6 이므로 곡선  $y = f(x)$ 는  
 점 (6, 1)을 지난다.

$$1 = \log_3(6-5) + b, b = 1$$

따라서  $a+b = 5$

27. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제해결하기

$$\frac{1}{4}, a_1, a_2, \dots, a_n, 16 \text{ 이}$$

공비가 양수  $r$ 인 등비수열을 이루므로

$$16 = \frac{1}{4} r^{n+1}, r^{n+1} = 64 \dots \textcircled{a}$$

주어진 등비수열의 모든 항의 곱이 1024 이므로

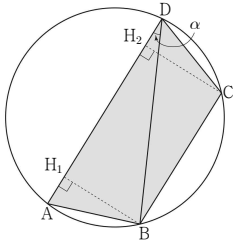
$$\frac{1}{4} \times a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \times 16$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} r \times \frac{1}{4} r^2 \times \dots \times \frac{1}{4} r^n \times 16$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \times 16 \times r^{1+2+\dots+n} \\
&= 2^{-2n-2} \times 2^4 \times r^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= 2^{-2n+2} \times (r^{n+1})^{\frac{n}{2}} = 1024 \dots \text{㉔} \\
&\text{㉔을 ㉔에 대입하면} \\
&2^{-2n+2} \times (2^6)^{\frac{n}{2}} = 1024, 2^{n+2} = 2^{10} \text{이므로 } n=8 \\
&\text{따라서 } n=8 \text{을 ㉔에 대입하면 } r^9 = 64
\end{aligned}$$

**28. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기**

삼각형 ABD에서  $\angle ADB = \alpha$ 라 할 때,  
삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로  
 $\frac{AB}{\sin \alpha} = 12$   
 $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}$  이므로  
 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$   
AB = CD 이므로  $\angle ADB = \angle CBD$   
선분 AD와 선분 BC는 평행하므로  
사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다.



두 점 B, C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을  
각각 H1, H2라 할 때,

$$\begin{aligned}
\overline{DH_1} &= \overline{BD} \cos \alpha = 8\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{13}}{4} = 2\sqrt{26} \\
\overline{BH_1} &= \overline{BD} \sin \alpha = 8\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{6} \\
\overline{AH_1} &= \overline{DH_2} \text{이므로 사각형 ABCD의 넓이} \\
S &= \frac{1}{2} \times (\overline{AD} + \overline{BC}) \times \overline{BH_1} \\
&= \frac{1}{2} \times \{(\overline{DH_1} + \overline{AH_1}) + (\overline{DH_2} - \overline{DH_1})\} \times \overline{BH_1} \\
&= \overline{DH_1} \times \overline{BH_1} \\
&= 2\sqrt{26} \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{39}
\end{aligned}$$

따라서  $\frac{S^2}{13} = 192$

**29. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기**

$f(x) = x^2 + bx + c$  ( $b, c$ 는 상수)라 하자.  
조건 (가)에서

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x + a)f(x) - f(x)}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x + a - 1)f(x)}{x-1} = 0
\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이므로  
 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + a - 1)f(x) = (a-1)f(1) = 0$   
따라서  $a = 1$  또는  $f(1) = 0$   
 $a \neq 1$ 이라 하면  $f(1) = 0$ 이어야 하므로  
 $c = -b - 1, f(x) = (x-1)(x+b+1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - f(x)}{x-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x + a - 1)(x-1)(x+b+1)}{x-1} \\
&= (a-1)(b+2) = 0 \\
&\text{이므로 } b = -2, f(x) = (x-1)^2 \\
&g'(x) = (2x-1)(x-1)^2 + (x^2 - x + a)(2x-2) \text{에서} \\
&g'(1) = 0 \text{이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.} \\
&f(1) \neq 0 \text{이라 하면 } a = 1 \text{이고} \\
&\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)f(x)}{x-1} = f(1) = 0 \\
&\text{이므로 모순이다.}
\end{aligned}$$

따라서  $a = 1$ 이고  $f(1) = 0$ 이며  $b \neq -2$   
 $f(x) = (x-1)(x+b+1)$ 에서  $f'(x) = 2x+b$   
 $g(x) = (x^2 - x + 1)f(x)$ 에서  
 $g'(x) = (2x-1)f(x) + (x^2 - x + 1)f'(x)$   
조건 (다)에서  
 $f(\alpha) = f'(\alpha)$ 이므로  
 $(\alpha-1)(\alpha+b+1) = 2\alpha+b \dots \text{㉑}$   
 $g'(\alpha) = (2\alpha-1)f(\alpha) + (\alpha^2 - \alpha + 1)f'(\alpha) = 2f'(\alpha)$   
 $(2\alpha-1)f'(\alpha) + (\alpha^2 - \alpha + 1)f'(\alpha) = 2f'(\alpha)$   
 $(\alpha^2 + \alpha - 2)f'(\alpha) = 0$   
 $(\alpha+2)(\alpha-1)(2\alpha+b) = 0$

따라서  $\alpha = -2$  또는  $\alpha = 1$  또는  $\alpha = -\frac{b}{2}$   
 $\alpha = 1$  또는  $\alpha = -\frac{b}{2}$  일 때  
㉑에서  $b = -2$ 이므로  $b \neq -2$ 인 것에 모순이다.

$\alpha = -2$ 이므로 ㉑에서  $b = \frac{7}{4}$   
 $g(x) = (x^2 - x + 1)(x-1)\left(x + \frac{11}{4}\right)$   
 $g(\alpha+4) = g(2) = 3 \times 1 \times \frac{19}{4} = \frac{57}{4}$

따라서  $p = 4, q = 57$ 이므로  $p+q = 61$

**30. [출제의도] 등차수열을 이용하여 추론하기**

$a_n + b_n = 2 + (n-1)(l+m)$ 이므로  
수열  $\{a_n + b_n\}$ 은 첫째항이 2이고  
공차가 정수  $l+m$ 인 등차수열이다.  
 $l+m \geq 0$ 이라 하면 수열  $\{|a_n + b_n|\}$ 은  
첫째항이 2이고 공차가  $l+m$ 인 등차수열이다.  
공차  $l+m$ 이 정수이므로

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10} |a_k + b_k| &= \frac{10\{2 \times 2 + 9(l+m)\}}{2} = 31 \text{에서} \\
l+m &= \frac{11}{45} \text{을 만족시키지는} \\
&\text{두 정수 } l, m \text{은 존재하지 않는다.} \\
l+m &\leq -2 \text{라 하면 수열 } \{|a_n + b_n|\} \text{은} \\
&\text{첫째항과 제2항이 각각 } 2, |a_2 + b_2| \text{이고,} \\
&\text{제2항부터 공차가 } |l+m| \text{인 등차수열이다.} \\
&\text{공차 } |l+m| \text{이 정수이므로} \\
\sum_{k=1}^{10} |a_k + b_k| &= 2 + \frac{9\{2|a_2 + b_2| + 8|l+m|\}}{2} = 31 \text{에서}
\end{aligned}$$

$|a_2 + b_2| + 4|l+m| = \frac{29}{9}$ 를 만족시키지는  
두 정수  $l, m$ 은 존재하지 않는다.  
 $l+m = -1$ 이라 하면 수열  $\{|a_n + b_n|\}$ 은  
첫째항, 제2항, 제3항이 각각 2, 1, 0이고,  
제3항부터 공차가 1인 등차수열이다.

이때  $\sum_{k=1}^{10} |a_k + b_k| = 2 + 1 + \frac{8 \times (2 \times 0 + 7 \times 1)}{2} = 31$   
따라서  $l+m = -1$

$m = -l - 1$ 에서  $b_n = -10 + (n-1)(-l-1)$   
 $|a_3| = |12 + 2l|, |b_3| = |-12 - 2l|$ 이므로  
두 정수  $l, m$ 에 관계없이  $|a_3| = |b_3|$ 이 성립한다.

(i)  $l \geq 0$ 일 때  
 $m < 0$ 이고  
모든 자연수  $k$ 에 대하여  $a_k > 0, b_k < 0$ 이다.  
 $|a_k| - |b_k| = a_k + b_k = 3 - k$ 이므로  
 $\sum_{k=1}^{10} (|a_k| - |b_k|) = \sum_{k=1}^{10} (3-k) = -25$

(ii)  $-4 \leq l \leq -1$ 일 때  
(a)  $l = -1$ 인 경우  
 $\sum_{k=1}^{10} (|a_k| - |b_k|)$   
 $= 2 + 1 + 0 + (-1) + (-2) + (-3) + (-4)$   
 $+ (-5) + (-6) + (-7)$   
 $= -25$

(b)  $l = -2$ 인 경우  
 $\sum_{k=1}^{10} (|a_k| - |b_k|)$   
 $= 2 + 1 + 0 + (-1) + (-2) + (-3) + (-4)$   
 $+ (-1) + 2 + 5$   
 $= -1$

(c)  $l = -3$ 인 경우  
 $\sum_{k=1}^{10} (|a_k| - |b_k|)$   
 $= 2 + 1 + 0 + (-1) + (-2) + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$   
 $= 25$

(d)  $l = -4$ 인 경우  
 $\sum_{k=1}^{10} (|a_k| - |b_k|)$   
 $= 2 + 1 + 0 + (-1) + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$   
 $= 29$

(iii)  $-11 \leq l \leq -5$ 일 때  
 $|a_1| - |b_1| = 2,$   
 $|a_2| - |b_2| = (12+l) - (11+l) = 1$ 이고,  
 $k \geq 3$ 인 자연수  $k$ 에 대하여  
 $|a_k| - |b_k|$   
 $= \{-12 - (k-1)l\} + \{10 + (k-1)(l+1)\}$   
 $= k - 3$

$\sum_{k=1}^{10} (|a_k| - |b_k|) = 2 + 1 + \sum_{k=3}^{10} (k-3) = 31$   
(iv)  $l \leq -12$ 일 때  
 $|a_1| - |b_1| = 2,$   
 $|a_2| - |b_2| = (-12-l) - (-11-l) = -1$ 이고,  
 $k \geq 3$ 인 자연수  $k$ 에 대하여  
 $|a_k| - |b_k|$   
 $= \{-12 - (k-1)l\} - \{-10 - (k-1)(l+1)\}$   
 $= k - 3$   
이므로

$\sum_{k=1}^{10} (|a_k| - |b_k|) = 2 + (-1) + \sum_{k=3}^{10} (k-3) = 29$

(i) ~ (iv)에서  
구하는 모든 순서쌍  $(l, m)$ 은  
 $(-11, 10), (-10, 9), (-9, 8), \dots, (-5, 4)$   
이므로 개수는 7이다.