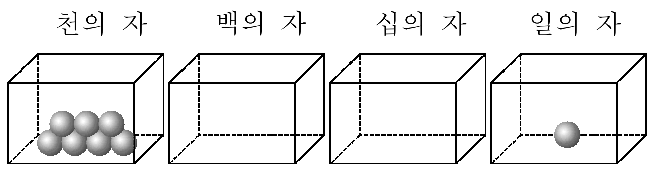
2005년 06월	평가원	가40	4점

1. $\{1, 2, 3, 4\}$에서 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$로의 함수 중에서 $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) \geq f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

2005년 07월	교육청	가39	4점

2. 7001의 각 자리의 숫자의 합은 8이 된다. 이때, 각 자리를 상자로 생각하면 7001은 네 개의 상자에 그림과 같이 8개의 공을 넣는 것으로 생각할 수 있다.



이를 이용하여 0부터 9999까지의 정수 중에서 각 자리의 숫자의 합이 8이 되는 정수의 개수를 구하면?

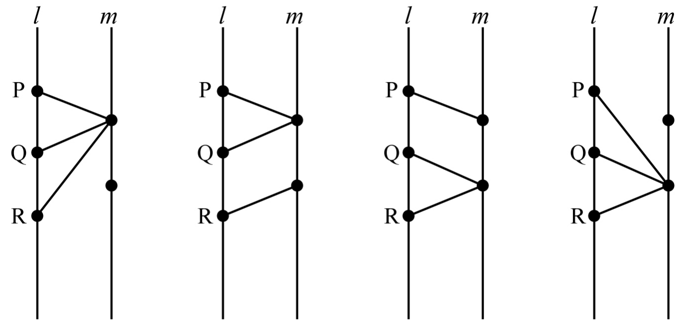
① 162 ② 165 ③ 168
④ 171 ⑤ 174

2006학년도	수능	가40	4점

3. 네 종류의 사탕 중에서 15개를 선택하려고 한다.
초콜릿사탕 은 4개 이하, 박하사탕은 3개 이상, 딸기사탕은 2개 이상, 버터사탕은 1개 이상을 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 사탕은 15개 이상씩 있다.)

2005년 10월	교육청	가40	4점

4. 평면 위에 평행한 두 직선 l, m과 직선 l위의 서로 다른 세 점 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$가 있다. 직선 l위의 세 점 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$에서 각각 하나의 선분으로 직선 m위의 점을 연결할 때, 세 선분이 교차하지 않는 경우의 수를 구하려고 한다. 예를 들어, 그림과 같이 직선 m 위에 두 점이 있을 때, 구하는 모든 경우의 수는 4(가지)이다.



직선 m위에 10개의 점이 있을 때, 위와 같이 세 선분이 교차하지 않는 모든 경우의 수를 구하시오.

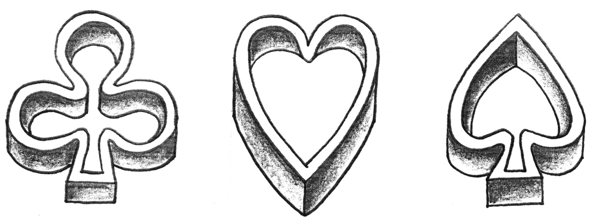
2007년 04월	교육청	가39	4점

5. 동전 한 개를 던져 앞면이 나오면 H, 뒷면이 나오면 T로 나타내자. 동전 한 개를 6번 던져 HTHTTT, THTHHT와 같이 H 바로 다음에 T가 나오는 경우가 2번만 나타나는 모든 경우의 수는?

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

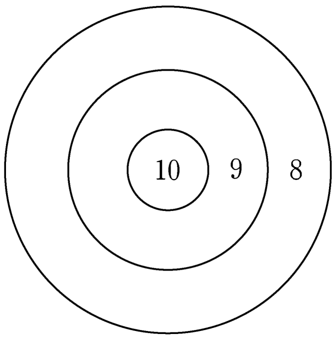
2007년 07월	교육청	가40	4점

6. 그림과 같이 서로 다른 3개의 상자에 같은 종류의 초콜릿 10개를 넣으려고 한다. 모든 상자에는 한 개 이상의 초콜릿을 넣는 방법의 수를 구하시오.



2007년 09월	평가원	가38	3점

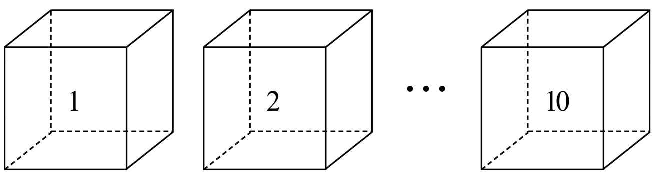
7. 점수가 표시된 그림과 같은 과녁에 6개의 화살을 쏘아 점수를 얻는 경기가 있다. 6개의 화살을 모두 과녁에 맞혔을 때, 점수의 합계가 51점 이상이 되는 경우의 수는? (단, 화살이 과녁의 경계에 맞는 경우는 없다.)



① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

2007년 10월	교육청	가40	4점

8. 1부터 10까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 10개의 상자가 있다. 똑같은 구슬 3개를 상자에 넣는 방법의 수를 구하시오. (단, 각 상자에 들어가는 구슬의 개수에는 제한이 없다.)



2008년 09월	평가원	가37	3점

9. 사과 주스, 포도 주스, 감귤 주스 중에서 8병을 선택하려고 한다. 사과 주스, 포도 주스, 감귤 주스를 각각 적어도 1병 이상씩 선택하는 경우의 수는? (단, 각 종류의 주스는 8병 이상씩 있다.)

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

2009년 10월	교육청	가36	3점

10. 빨간색, 파란색, 노란색, 검은색의 네 가지 색의 구슬이 각각 8개씩 들어있는 상자가 있다. 이 상자에서 다음 조건을 만족시키도록 8개의 구슬을 선택하는 방법의 수는? (단, 같은 색의 구슬은 구별하지 않는다.)

(가) 모든 색의 구슬을 적어도 1개씩 선택한다. (나) 빨간색 구슬은 홀수 개를 선택한다. (다) 파란색 구슬은 적어도 3개 선택한다.

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

2010년 07월	교육청	가36	3점

11. 크기와 모양이 같은 검은 구슬 5개와 흰 구슬 2개를 서로 다른 세 상자에 모두 넣는 방법의 가짓수는? (단, 비어 있는 상자가 있을 수 있다.)

① 125 ② 126 ③ 127
④ 128 ⑤ 129

2011년 06월	평가원	가22	3점

12. 방정식 $x+y+z=17$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z에 대하여 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오.

2011년 07월	교육청	가27	3점

13. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $Y=\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$로의 함수 f중 다음 조건을 만족하는 함수의 개수를 구하시오.

(가) $f(2)=5$
(나) 집합 X의 임의의 두 원소 i, j에 대하여
$i<j$ 이면 $f(i) \leq f(j)$

2011년 10월	교육청	가24	3점

14. 4명의 학생에게 8자루의 연필 모두를 나누어 주는 방법 중에서 연필을 한 자루도 받지 못하는 학생이 생기는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필은 서로 구별하지 않는다.)

2011년 10월	교육청	나27	3점

15. 축구공, 농구공, 배구공 중에서 4개의 공을 선택하는 방법의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 공은 4개 이상씩 있고, 같은 종류의 공은 서로 구별하지 않는다.)

2011년 10월	대전교육청	가24나23	3점

16. 세 수 2, 3, 5에서 중복을 허락하여 다섯 개의 수를 선택하고, 이들 선택된 다섯 개의 수를 곱하여 만들어지는 수 중에서 9의 배수가 아닌 것의 개수를 구하시오.

2012학년도	수능	가22	3점

17. 자연수 r에 대하여 ${}_3\mathrm{H}_r = {}_7\mathrm{C}_2$일 때, ${}_5\mathrm{H}_r$의 값을 구하시오.

2012년 05월	교육청	나27	4점

18. $(a+b+c)^4(x+y)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하시오.

2012년 06월	평가원	가25	3점

19. 방정식 $x+y+z+w=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수를 구하시오.

2012년 07월	교육청	나23	3점

20. 방정식 $x+y+z=20$을 만족시키는 양의 정수 중 짝수인 $x,\ y,\ z$에 대하여 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하시오.

2013학년도	수능	나12	3점

21. 같은 종류의 주스 4병, 같은 종류의 생수 2병, 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 1병도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)

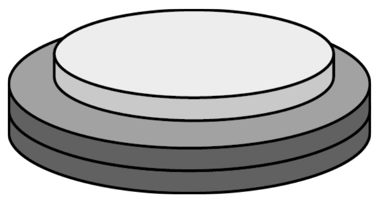
① 330 ② 315 ③ 300
④ 285 ⑤ 270

2012년 10월	교육청	나27	4점

22. 반지름의 길이가 서로 다른 여섯 종류의 원판이 각각 3개씩 18개가 있다. 원판을 다음과 같은 규칙으로 쌓으려고 한다.

> (가) 원판 3개를 택하여 원판의 중심이 일치하도록 쌓는다.
> (나) 반지름의 길이가 작은 원판은 반지름의 길이가 큰 원판 위에 쌓는다.
> (다) 반지름의 길이가 같은 원판은 구별하지 않으면서 쌓는다.

그림은 반지름의 길이가 같은 두 개의 원판과 반지름의 길이가 작은 한 개의 원판을 규칙에 따라 쌓은 예이다.



이와 같이 쌓는 방법의 수를 구하시오.

2013년 07월	교육청	나14	4점

23. 어느 지역의 5개 야구팀 A, B, C, D, E는 매년 각 팀이 서로 다른 팀들과 각각 9번씩 경기를 하여 승리한 경기 수가 많은 순서로 순위를 결정하는 대회를 한다.
어느 야구전문가는 각 팀의 전력을 분석하여 내년 대회의 최종결과 중 우선 A, B 두 팀이 승리할 것으로 예상되는 경기 수를 발표하였다. 그 발표를 바탕으로 나머지 세 팀의 결과를 예상하여 최종결과를 다음과 같이 표로 완성할 때, 만들 수 있는 서로 다른 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는? (단, x, y, z는 모두 5이상의 자연수이고, 모든 경기에서 무승부는 없다고 한다.)

팀 명	A	B	C	D	E
승리할 것으로 예상되는 경기 수	27	33	x	y	z

① 124 ② 130 ③ 136
④ 142 ⑤ 148

2013년 06월	평가원	가10	3점

24. 고구마피자, 새우피자, 불고기피자 중에서 m개를 주문하는 경우의 수가 36일 때, 고구마피자, 새우피자, 불고기피자를 적어도 하나씩 포함하여 m개를 주문하는 경우의 수는?
① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

2013년 09월	평가원	나10	3점

25. $3 \le a \le b \le c \le d \le 10$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?
① 240 ② 270 ③ 300
④ 330 ⑤ 360

2013년 09월	평가원	가08	3점

26. 방정식 $x+y+z=4$를 만족시키는 -1이상의 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 21 ② 28 ③ 36
④ 45 ⑤ 56

2013년 10월	교육청	나10	3점

27. 같은 종류의 선물 4개를 4명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 2명의 학생만 선물을 받는 경우의 수는? (단, 선물끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 18 ② 21 ③ 24
④ 30 ⑤ 36

2013년 10월	교육청	가08	3점

28. 같은 종류의 구슬 다섯 개를 서로 다른 세 개의 주머니에 나누어 넣으려고 한다. 각 주머니 안의 구슬이 세 개 이하가 되도록 넣는 방법의 수는? (단, 구슬끼리는 서로 구별하지 않고 빈 주머니가 있을 수도 있다.)

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

2014학년도	수능	가09	3점

29. 숫자 $1, 2, 3, 4$에서 중복을 허락하여 5개를 택할 때, 숫자 4가 한 개 이하가 되는 경우의 수는?

① 45 ② 42 ③ 39
④ 36 ⑤ 33

2014학년도	수능	나18	4점

30. 흰색 탁구공 8개와 주황색 탁구공 7개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 각 학생이 흰색 탁구공과 주황색 탁구공을 각각 한 개 이상 갖도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 295 ② 300 ③ 305
④ 310 ⑤ 315

2014년 06월	평가원	가20	4점

31. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

(가) $a+b+c=6$
(나) 좌표평면에서 세 점 $(1,\ a)$, $(2,\ b)$, $(3,\ c)$가 한 직선 위에 있지 않다.

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

2014년 07월	교육청	가10	3점

32. 한 개의 주사위를 3번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 x, y, z라 하자. 방정식 $x+y+z=6$을 만족시키는 해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 7 ② 10 ③ 13
④ 16 ⑤ 19

2014년 09월	평가원	나15	4점

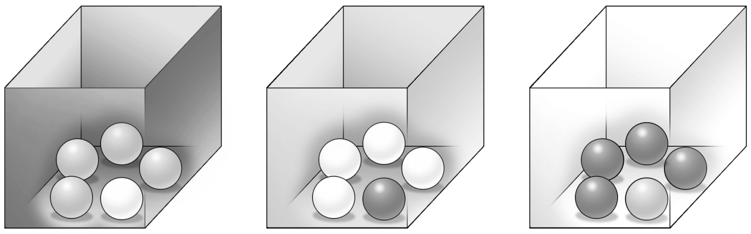
33. 네 개의 자연수 1, 2, 4, 8 중에서 중복을 허락하여 세 수를 선택할 때, 세 수의 곱이 100 이하가 되도록 선택하는 경우의 수는?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

2014년 10월	교육청	나20	4점

34. 빨간 공, 파란 공, 노란 공이 각각 5개씩 있다. 이 15개의 공만을 사용하여 빨간 상자, 파란 상자, 노란 상자에 상자의 색과 다른 색의 공을 5개씩 담으려고 한다. 공을 담는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.)

① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30



2014년 09월	평가원	가26	4점

35. 자연수 n에 대하여 $abc=2^n$을 만족시키는 1보다 큰 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수가 28일 때, n의 값을 구하시오.

2014년 10월	교육청	가14	4점

36. 주머니 안에 0, 2, 3, 5가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 넣는 시행을 3회 반복한다. 꺼낸 3개의 공에 적힌 수를 모두 곱한 값으로 가능한 서로 다른 정수의 개수는?

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

2015학년도	수능	나18	4점

37. 연립방정식

$$\begin{cases} x+y+z+3w=14 \\ x+y+z+w=10 \end{cases}$$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는?

① 40 ② 45 ③ 50
④ 55 ⑤ 60

2015학년도	수능	가26	4점

38. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

(가) $a \times b \times c$는 홀수이다.
(나) $a \leq b \leq c \leq 20$

2015년 06월	평가원	가27	4점

39. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, u의 모든 순서쌍 (x, y, z, u)의 개수를 구하시오.

(가) $x+y+z+u=6$
(나) $x \neq u$

2015년 07월	교육청	가21나30	4점

40. 검은 바둑돌 ●과 흰 바둑돌 ○을 일렬로 나열하였을 때, 이웃한 두 개의 바둑돌의 색이 나타날 수 있는 유형은

● ●	● ○	○ ●	○ ○
< A형>	< B형>	< C형>	< D형>

으로 4가지이다.
예를 들어, 6개의 바둑돌을 < A형> 2번, < B형> 1번, < C형> 1번, < D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 아래와 같이 5이다.

● ● ○ ○ ● ●
○ ● ● ● ○ ○
○ ○ ● ● ● ○
● ● ● ○ ○ ●
● ○ ○ ● ● ●

10개의 바둑돌을 < A형> 4번, < B형> 2번, < C형> 2번, < D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌은 각각 10개 이상씩 있다.)

2015년 09월	평가원	가27	4점

41. 다음 조건을 만족시키는 2이상의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c+d=20$
(나) a, b, c는 모두 d의 배수이다.

2015년 09월	평가원	나19	4점

42. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?

(가) $a+b+c+3d=10$
(나) $a+b+c \le 5$

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

2015년 10월	교육청	나24	3점

43. 서로 구별되지 않는 공 10개를 A, B, C 3명에게 남김없이 나누어 주려고 한다. A가 공을 3개만 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 1개의 공도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)

2015년 10월	교육청	가18	4점

44. 다음 조건을 만족시키는 네 자리 자연수의 개수는?

(가) 각 자리의 수의 합은 14이다.
(나) 각 자리의 수는 모두 홀수이다.

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

2016학년도	수능	나17	4점

45. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는?

(가) a, b, c, d, e 중에서 0의 개수는 2이다.
(나) $a+b+c+d+e=10$

① 240 ② 280 ③ 320
④ 360 ⑤ 400

2016학년도	수능	가14	4점

46. 세 정수 a, b, c에 대하여

$$1 \le |a| \le |b| \le |c| \le 5$$

를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는?

① 360 ② 320 ③ 280
④ 240 ⑤ 200

2016년 03월	교육청	가27	4점

47. 다음 조건을 만족시키는 자연수 N의 개수를 구하시오.

(가) N은 10 이상 9999 이하의 홀수이다.
(나) N의 각 자리 수의 합은 7이다.

2016년 04월	교육청	가나28	4점

48. 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구하시오.

(가) $x+y+z+w=18$
(나) x, y, z, w 중에서 2개는 3으로 나눈 나머지가 1이고,
2개는 3으로 나눈 나머지가 2이다.

2016년 06월	평가원	나18	4점

49. **방정식 $x+y+z+5w=14$를 만족시키는 양의 정수 $x,\ y,\ z,\ w$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는?**

① 27 ② 29 ③ 31
④ 33 ⑤ 35

2016년 06월	평가원	가27	4점

50. **사과, 감, 배, 귤 네 종류의 과일 중에서 8개를 선택하려고 한다. 사과는 1개 이하를 선택하고, 감, 배, 귤은 각각 1개 이상을 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 과일은 8개 이상씩 있다.)**

2016년 07월	교육청	나17	4점

51. **다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?**

(가) $a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 홀수의 개수는 2이다.
(나) $a+b+c+d=12$

① 108 ② 120 ③ 132
④ 144 ⑤ 156

2016년 07월	교육청	가18	4점

52. **다음 조건을 만족시키는 세 자연수 $a,\ b,\ c$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?**

(가) 세 수 $a,\ b,\ c$의 합은 짝수이다.
(나) $a \le b \le c \le 15$

① 320 ② 324 ③ 328
④ 332 ⑤ 336

2016년 09월	평가원	가15나19	4점

53. 각 자리의 수가 0이 아닌 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7인 모든 자연수의 개수는?

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

2016년 10월	경남교육청	나26	4점

54. 방정식 $x+y+z=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오.

2016년 10월	경남교육청	가16	4점

55. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

(가) $2b-1<a<2b+1$
(나) $a+b+c+d=7$

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

2017학년도	수능	가나27	4점

56. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c=7$
(나) $2^a \times 4^b$은 8의 배수이다.

2017년 04월	교육청	나30	4점

57. 자연수 n에 대하여 0부터 n까지 정수가 하나씩 적힌 $(n+1)$개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 과정을 5번 반복할 때, 확인한 5개의 수가 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 a_n 이라 하자.

(가) 꺼낸 공에 적힌 수는 먼저 꺼낸 공에 적힌 수보다 작지 않다.
(나) 세 번째 꺼낸 공에 적힌 수는 첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수보다 1이 더 크다.

$\sum_{n=1}^{18} \frac{a_n}{n+2}$ 의 값을 구하시오.

2017년 04월	교육청	가26	4점

58. 네 개의 자연수 2, 3, 5, 7 중에서 중복을 허락하여 8개를 선택할 때, 선택된 8개의 수의 곱이 60의 배수가 되도록 하는 경우의 수를 구하시오.

2017년 07월	교육청	나28	4점

59. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수의 개수를 구하시오.

(가) 네 자리의 홀수이다.
(나) 각 자리의 수의 합이 8보다 작다.

2017년 09월	평가원	나16	4점

60. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

(가) $x+y+z=10$
(나) $0<y+z<10$

① 39 ② 44 ③ 49
④ 54 ⑤ 59

2017년 10월	교육청	나28	4점

61. 다음 조건을 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

(가) $abc=180$
(나) $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$

2017년 10월	경남교육청	나28	4점

62. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구하시오.

(가) $x^2 \leq y \leq z \leq w \leq 5$
(나) $x+y+z+w \leq 15$

2017년 10월	경남교육청	가17	4점

63. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

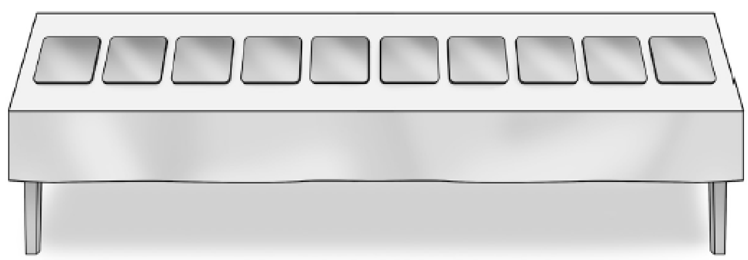
(가) $a+b+c+d=7$
(나) a, b, c중 두 수의 합은 3이다.

① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

2017년 10월	전북교육청	가15나17	3점

64. 어느 전시회장에 그림과 같이 일렬로 같은 종류의 설치대 10개가 놓여 있다. 이 10개의 설치대 중 3개의 설치대에 서로 다른 조형물을 설치하려고 한다. 조형물 사이에는 2개 이상의 빈 설치대가 있도록 조형물을 설치하는 방법의 수는?

① 100 ② 120 ③ 140 ④ 160 ⑤ 180



2018년 03월	교육청	가29	4점

65. **사과, 배, 귤 세 종류의 과일이 각각 2개씩 있다. 이 6개의 과일 중 4개를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 과일은 서로 구별하지 않고, 과일을 한 개도 받지 못하는 학생은 없다.)**

2018년 04월	교육청	나21	4점

66. **다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?**

(가) $a+b+c+d=12$
(나) 좌표평면에서 두 점 (a, b), (c, d)는 서로 다른 점이며 두 점 중 어떠한 점도 직선 $y=2x$ 위에 있지 않다.

① 125 ② 134 ③ 143
④ 152 ⑤ 161

2018년 04월	교육청	가26	4점

67. **숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 7개를 선택할 때, 짝수가 두 개가 되는 경우의 수를 구하시오.**

2018년 07월	교육청	나26	4점

68. **서로 같은 8개의 공을 남김없이 서로 다른 4개의 상자에 넣으려고 할 때, 빈 상자의 개수가 1이 되도록 넣는 경우의 수를 구하시오.**

2018년 07월	교육청	가26	4점

69. 3000보다 작은 네 자리 자연수 중 각 자리의 수의 합이 10이 되는 모든 자연수의 개수를 구하시오.

2018년 09월	평가원	나16	4점

70. 서로 다른 종류의 사탕 3개와 같은 종류의 구슬 7개를 같은 종류의 주머니 3개에 남김없이 나누어 넣으려고 한다. 각 주머니에 사탕과 구슬이 각각 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

2018년 10월	교육청	나26	4점

71. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오.

(가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.
(나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면
$f(x_1) \le f(x_2)$이다.

2018년 11월	대구교육청	나12	3점

72. 방정식 $x+y+z=-7$을 만족시키는 양이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x,y,z)의 개수는?

① 28 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 36

2018년 11월	대구교육청	가17	3점

73. 방정식 $2x+3y+3z=12$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

2019학년도	수능	가12	3점

74. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 초콜릿 8개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?

(가) 각 학생은 적어도 1개의 초콜릿을 받는다.
(나) 학생 A는 학생 B보다 더 많은 초콜릿을 받는다.

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

2019년 04월	교육청	나29	4점

75. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

(가) a, b, c는 모두 짝수이다.
(나) $a\times b\times c=10^5$

2019년 06월	평가원	가19	4점

76. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는?

(가) $n=1,\ 2,\ 3$일 때, $x_{n+1}-x_n \geq 2$이다.
(나) $x_4 \leq 12$

① 210 ② 220 ③ 230
④ 240 ⑤ 250

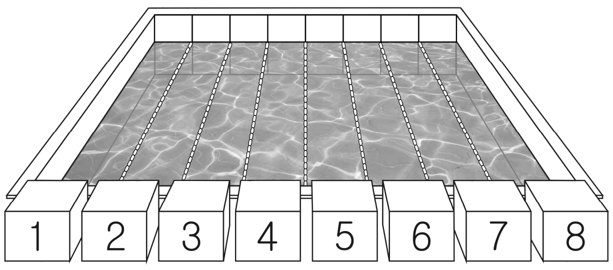
2019년 06월	평가원	나29	4점

77. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1,\ x_2,\ x_3$ 의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 의 개수를 구하시오.

(가) $n=1,\ 2$ 일 때, $x_{n+1}-x_n \ge 2$ 이다.
(나) $x_3 \le 10$

2019년 07월	교육청	가27나16	4점

78. 어느 수영장에 1 번부터 8 번까지 8 개의 레인이 있다.
3 명의 학생이 서로 다른 레인의 번호를 각각 1 개씩 선택할 때, 3 명의 학생이 선택한 레인의 세 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 선택하는 경우의 수를 구하시오.



2019년 09월	평가원	가28나29	4점

79. 연필 7자루와 볼펜 4자루를 다음 조건을 만족시키도록 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜끼리도 서로 구별하지 않는다.)

(가) 여학생이 각각 받는 연필의 개수는 서로 같고, 남학생이 각각 받는 볼펜의 개수도 서로 같다.
(나) 여학생은 연필을 1자루 이상 받고, 볼펜을 받지 못하는 여학생이 있을 수 있다.
(다) 남학생은 볼펜을 1자루 이상 받고, 연필을 받지 못하는 남학생이 있을 수 있다.

2019년 10월	교육청	나07	3점

80. 같은 종류의 공 6개를 남김없이 서로 다른 3개의 상자에 나누어 넣으려고 한다. 각 상자에 공이 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

2020학년도	수능	나29	4점

81. 세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 사탕 6개와 같은 종류의 초콜릿 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

(가) 학생 A가 받는 사탕의 개수는 1 이상이다.
(나) 학생 B가 받는 초콜릿의 개수는 1 이상이다.
(다) 학생 C가 받는 사탕의 개수와 초콜릿의 개수의 합은 1 이상이다.

2020학년도	수능	가16	4점

82. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?

(가) $a+b+c-d=9$
(나) $d \le 4$이고 $c \ge d$이다.

① 265 ② 270 ③ 275
④ 280 ⑤ 285

빠른 정답

----

1) 정답 210
2) 정답 ②
3) 정답 185
4) 정답 220
5) 정답 ②
6) 정답 36
7) 정답 ④
8) 정답 220
9) 정답 ③
10) 정답 ②

----

11) 정답 ②
12) 정답 171
13) 정답 12
14) 정답 130
15) 정답 15
16) 정답 11
17) 정답 126
18) 정답 60
19) 정답 35
20) 정답 36

----

21) 정답 ⑤
22) 정답 56
23) 정답 ③
24) 정답 ②
25) 정답 ④
26) 정답 ③
27) 정답 ①
28) 정답 ③
29) 정답 ④
30) 정답 ⑤

----

31) 정답 ⑤
32) 정답 ②
33) 정답 ③
34) 정답 ①
35) 정답 9
36) 정답 ②
37) 정답 ②
38) 정답 220
39) 정답 68
40) 정답 45

----

41) 정답 32
42) 정답 ①
43) 정답 8
44) 정답 ②
45) 정답 ④
46) 정답 ③
47) 정답 49
48) 정답 210
49) 정답 ③
50) 정답 36

----

51) 정답 ②
52) 정답 ⑤
53) 정답 ④
54) 정답 28
55) 정답 ④
56) 정답 32
57) 정답 760
58) 정답 35
59) 정답 80
60) 정답 ④

----

61) 정답 96
62) 정답 92
63) 정답 ③
64) 정답 ②
65) 정답 51
66) 정답 ②
67) 정답 63
68) 정답 84
69) 정답 100
70) 정답 ⑤

----

71) 정답 525
72) 정답 ⑤
73) 정답 ②
74) 정답 ②
75) 정답 126
76) 정답 ①

77) 정답 84
78) 정답 120
79) 정답 49
80) 정답 ⑤
----
81) 정답 285
82) 정답 ③

정답과 풀이

4-3 도함수의활용(1) (중급)- 정답

1. 정답 210
구하는 함수의 개수는 공역의 7개의 원소 중에서 4개를 뽑는 중복조합의 수와 같다.
$_{7+4-1}C_4 = {}_{10}C_4 = 210$
2. 정답 ②
0부터 9999까지의 정수 중에서 각 자리의 숫자의 합이 8이 되는 정수의 개수는 8개의 공을 서로 다른 4개의 상자에 넣는 방법의 수와 같다.
따라서 4개의 서로 다른 것에서 중복을 허락하여 8개를 택하는 조합의 수이므로
$_{4+8-1}C_8 = {}_{11}C_8 = 165$ 이다.
3. 정답 185
(ⅰ) 초콜릿사탕 4개를 택할 때,
박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 5개의 사탕을 추가로 택하면 된다. 이 때, 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로
$_{3+5-1}C_5 = {}_7C_2 = 21$
(ⅱ) 초콜릿사탕 3개를 택할 때,
박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 6개의 사탕을 추가로 택하면 되므로 이 경우의 수는
$_{3+6-1}C_6 = {}_8C_2 = 28$
(ⅲ) 초콜릿사탕 2개를 택할 때,
박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 7개의 사탕을 추가로 택하면 되므로 이 경우의 수는 $_{3+7-1}C_7 = {}_9C_2 = 36$
(ⅳ) 초콜릿사탕 1개를 택할 때,
박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 8개의 사탕을 추가로 택하면 되므로 이 경우의 수는 $_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$
(ⅴ) 초콜릿사탕 0개를 택할 때,
박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 9개의 사탕을 추가로 택하면 되므로 이 경우의 수는 $_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$
따라서 구하는 경우의 수는
$21+28+36+45+55=185$
4. 정답 220
10개에서 3개를 중복해서 택하는 조합의 수와 같으므로 구하는 모든 경우의 수는
$_{10+3-1}C_3 = {}_{12}C_3 = 220$
5. 정답 ②
(ⅰ) HTHT□□ 에서 3가지,
HT□□HT 에서 3가지,
□□HTHT 에서 3가지
(ⅱ) HT□HT□ 에서 4가지,
□HTHT□ 에서 4가지,
□HT□HT 에서 4가지
∴ 21가지
6. 정답 36
서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 7개를 뽑는 경우의 수와 같다.
∴ $_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$
7. 정답 ④
가능한 경우는 아래 표와 같다.

10점개수	9점개수	8점개수	가지수
6	0	0	1가지
5	0, 1	1, 0	2가지
4	0, 1, 2	2, 1, 0	3가지
3	0, 1, 2, 3	3, 2, 1, 0	4가지
2	0, 1, 2, 3, 4	4, 3, 2, 1, 0	5가지
1	1, 2, 3, 4, 5	4, 3, 2, 1, 0	5가지
0	3, 4, 5, 6	3, 2, 1, 0	4가지

따라서, 구하는 경우는 24가지이다.
8. 정답 220
$_{10+3-1}C_3 = {}_{12}C_3 = 220$ (가지)
9. 정답 ③
선택하는 사과주스 , 포도주스, 감귤주스 병의 개수를 각각 x, y, z라 하면 각 종류의 주스는 적어도 한 병 이상씩 선택해야 하므로 $x+y+z=5$를 만족하는 정수 x, y, z를 구한다. 따라서 구하는 경우의 수는 3개에서 중복을 허락하여 5개를 뽑는 방법의 수이므로
$_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7\times6}{2} = 21$
10. 정답 ②
빨간색, 파란색 구슬을 각각 a, b개씩 택한다고 하면
$a=1$, $b=3$일 때 3, $a=1$, $b=4$일 때 2
$a=1$, $b=5$일 때 1, $a=3$, $b=3$일 때 1
따라서 구하는 방법의 수는 $3+2+1+1=7$(가지)
11. 정답 ②
$_3H_5 \times {}_3H_2 = {}_7C_5 \times {}_4C_2 = 126$
12. 정답 171
서로 다른 세문자 x, y, z에서 중복을 허락하여 17개를 뽑는 조합의 수이므로
$_3H_{17} = {}_{19}C_{17} = {}_{19}C_2 = 171$
13. 정답 12
가능한 $f(1)$의 경우의 수는 2가지이고,
공역 5, 6, 7중에서 중복을 허용하여 2개를 택한 다음

작거나 같은 것부터 차례로 3, 4에 대응시키는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2=6$

따라서 함수 f의 개수는 12

14. 정답 130

${}_4\mathrm{H}_8-{}_4\mathrm{H}_4={}_{11}\mathrm{C}_3-{}_7\mathrm{C}_3=165-35=130$

15. 정답 15

${}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=\dfrac{6\times5}{2}=15$

16. 정답 11

[출제의도] 중복조합을 이해하고 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

3이 0개, 1개 포함되는 경우이므로

${}_2\mathrm{H}_5+{}_2\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_5+{}_5\mathrm{C}_4=11$이다.

17. 정답 126

${}_3\mathrm{H}_r={}_{r+2}\mathrm{C}_r={}_{r+2}\mathrm{C}_2={}_7\mathrm{C}_2 \quad \therefore r=5$

${}_3\mathrm{H}_r={}_5\mathrm{H}_5={}_9\mathrm{C}_5={}_9\mathrm{C}_4=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$

18. 정답 60

$(a+b+c)^4$에서 3개의 문자에서 중복을 허용하여 4개를 선택하는 경우의 수만큼 서로 다른 항이 존재하므로

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

마찬가지로 $(x+y)^3$에서 ${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3=4$

$\therefore 15\times4=60$

19. 정답 35

순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는 x, y, z, w의 4개 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_4\mathrm{H}_4={}_{4+4-1}\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$(개)

20. 정답 36

$x=2l$, $y=2m$, $z=2n$ (단, l, m, n은 자연수)라 하면, $l+m+n=10$이 된다.

${}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7=36$

21. 정답 ⑤

(i) 주스 4병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=\dfrac{6\times5}{2}=15$

(ii) 생수 2병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_{2+3-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\dfrac{4\times3}{2}=6$

(iii) 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

3이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $15\times6\times3=270$

22. 정답 56

쌓는 순서가 정해져 있으므로 세 개의 원판을 택하면 쌓는 방법은 한가지로 정해진다. 그러므로 구하는 방법의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_{6+3-1}\mathrm{C}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$

23. 정답 ③

총 경기 수는 ${}_5\mathrm{C}_2\times9=90$,

주어진 두 팀(A와 B)가 승리할 것으로 예상되는 경기 수의 합은 60이고 나머지 3개의 팀의 승리할 것으로 예상되는

경기 수의 합은 30이므로 $x+y+z=30$

x, y, z가 모두 5 이상이므로

$x=x'+5$, $y=y'+5$, $z=z'+5$라 하면

$x'+y'+z'=15\,(x'\ge0, y'\ge0, z'\ge0)$

$\therefore {}_{3+15-1}\mathrm{C}_{15}={}_{17}\mathrm{C}_{15}={}_{17}\mathrm{C}_2=136$

24. 정답 ②

서로 다른 3종류에서 중복을 허락하여 m가지를 선택하는 경우의 수가 36가지이므로

${}_3\mathrm{H}_m={}_{m+2}\mathrm{C}_m={}_{m+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{(m+2)(m+1)}{2}=36 \quad \therefore m=7$

고구마 피자, 새우피자, 불고기 피자를 적어도 하나씩 포함하여 7개를 선택하는 경우의 수는

$x+y+z=7$ (x, y, z는 자연수)의 해의 순서쌍과 같으므로

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

25. 정답 ④

3부터 10까지의 8개의 수중에서 4개의 수를 중복하여 뽑는 것이므로 ${}_8\mathrm{H}_4={}_{11}\mathrm{C}_4=330$

$\therefore 330$

26. 정답 ③

$x'=x+1, y'=y+1, z'=z+1$일 때,

$x'+y'+z'=7\,(x', y', z'\ge0)$

$\therefore {}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_{7-1}=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$

27. 정답 ①

(i) 4명의 학생 중에서 선물을 받을 2명을 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$이다.

(ii) (i)에서 택한 2명에게 4개의 선물을 적어도 하나씩

나누어 주는 방법의 수는 각각 하나씩 나누어 주고 남은

2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{2+2-1}\mathrm{C}_2=3$이다.

$\therefore {}_4\mathrm{C}_2\times3=18$

28. 정답 ③

세 개의 주머니 A, B, C에 넣은 공의 수를 각각 a, b, c라 하면 $a+b+c=5$ 이므로 가능한 모든 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$

(i) 2개의 주머니에 다섯 개의 공을 1개와 4개로 나누어 넣는

경우의 수 ${}_3\mathrm{P}_2=6$

(ii) 한 개의 주머니에 다섯 개의 공을 모두 넣는 경우의

수

$_{3}C_{1}=3$

따라서 구하는 경우의 수는 $21-(6+3)=12$이다.

다른풀이

한 주머니에 네 개 이상의 공을 넣을 수 없으므로 세 개의 주머니에 넣는 공의 수에 따라 경우를 나누면

(i) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 다른 주머니에 공을 두

개 넣는 경우는 3, 2, 0을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $3!=6$

(ii) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 한 개씩 넣는 경우는 3, 1, 1을 일렬로

나열하는 경우와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$

(iii) 한 개의 주머니에 공을 한 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 두 개씩 넣는 경우는 1, 2, 2를 일렬로

나열하는 경우와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$6+3+3=12$이다.

29. 정답 ④

[출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

숫자 1, 2, 3의 개수를 각각 a, b, c라 하자.

(i) 숫자 4가 택해지지 않은 경우

구하는 경우의 수는 $a+b+c=5$ 를 만족시키는 음이 아닌

정수의 순서쌍 (a, b, c)의 개수이므로

$_{3}H_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$

(ii) 숫자 4가 한 개 택해지는 경우

구하는 경우의 수는 $a+b+c=4$를 만족시키는 음이 아닌

정수의 순서쌍 (a, b, c)의 개수이므로

$_{3}H_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$21+15=36$

30. 정답 ⑤

3명의 학생이 흰색 탁구공을 각각 x, y, z개씩 받는다면

$x+y+z=8$ ($x\geq 1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$인 자연수)

$\therefore {}_{3+5-1}C_{5}={}_{7}C_{5}=21$ …… ㉠

주황색 탁구공을 각각 x', y', z'개씩 받는다면

$x'+y'+z'=7$ ($x'\geq 1$, $y'\geq 1$, $z'\geq 1$인 자연수)

$\therefore {}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}=15$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $21\times 15=315$

31. 정답 ⑤

$a+b+c=6$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $_{3}H_{6}={}_{8}C_{6}=28$개이다.

(나)조건에서 $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$는 한 직선 위에 있지 않으므로

$b-a\neq c-b$

즉, $2b\neq a+c$이다

$2b=a+c$를 만족하는 다음 5가지를 제외한다.

따라서 순서쌍 (a, b, c)를 구하면

$(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(0, 2, 4)$, $(4, 2, 0)$, $(2, 2, 2)$이다.

따라서 만족하는 개수는 $28-5=23$(개)

32. 정답 ②

$x\geq 1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$이고 $x+y+z=6$이므로

$x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$로 치환하면

$X+Y+Z=3$인 음이 아닌 정수해 (X, Y, Z)의 개수와 일치하므로

$_{3}H_{3}={}_{5}C_{3}=10$

33. 정답 ③

네 개의 자연수 중에서 중복을 허락하여 세 수를 선택하는 경우의 수는

$_{4+3-1}C_{3}={}_{6}C_{3}=\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}=20$ … ㉠

이때, 네 개의 자연수 1, 2, 4, 8은 각각 2^{0}, 2^{1}, 2^{2}, 2^{3}으로 나타낼 수 있고, $2^{6}=64$, $2^{7}=128$이므로 ㉠ 중에서

$(2^{3}, 2^{3}, 2^{3})$, $(2^{3}, 2^{3}, 2^{2})$, $(2^{3}, 2^{3}, 2)$, $(2^{3}, 2^{2}, 2^{2})$인 경우는 제외해야 하므로 구하고자 하는 경우의 수는

$20-4=16$

34. 정답 ①

한 상자에 공을 담는 경우가 결정되면 다른 상자에 공을 담는 경우도 한 가지로 결정된다.

예를 들어 각 상자에는 상자의 색과 다른 색의 공을 담아야 하므로 빨간 상자에 파란 공 1개와 노란 공 4개를 담으면 노란 상자에는 파란 공 4개와 빨간 공 1개를, 파란 상자에는 노란 공 1개와 빨간 공 4개를 담아야 한다.

즉, 빨간 상자에 공을 담는 경우가 결정되면 다른 상자에 공을 담는 경우도 한 가지로 결정된다.

그러므로 노란 공 5개와 파란 공 5개 중에서 빨간 상자에 담을 5개의 공을 선택하는 방법의 수가 구하는 경우의 수이다.

따라서 노란 공과 파란 공 2종류의 공에서 중복을 허락하여 5개의 공을 빨간 상자에 담는 방법의 수는

$_{2+5-1}C_{5}=6$이다.

35. 정답 9

자연수 n에 대하여 $abc=2^{n}$을 만족시키는

1보다 큰 자연수 a, b, c는 2^{p}(단, p는 자연수)꼴이므로

$a=2^{x}$, $b=2^{y}$, $c=2^{z}$이라 하면 $2^{x+y+z}=2^{n}$이고

$x+y+z=n$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍

$(x,\ y,\ z)$ 개수가 28일 때이다.

즉, ${}_{3}\mathrm{H}_{n-3} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{2} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = 28$

을 만족시키는 자연수 n의 값은 9이다.

36. 정답 ②

꺼낸 3개의 공에 적힌 수 중 네 수 0, 2, 3, 5의 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 하자.

세 수의 곱은 0 또는 $2^b3^c5^d$이고

$a+b+c+d=3$ ($a \ge 0,\ b \ge 0,\ c \ge 0,\ d \ge 0$) 이다.

(ⅰ) $a \ne 0$일 때

세 수의 곱은 항상 0이므로 구하는 정수는 1개이다.

(ⅱ) $a=0$일 때

순서쌍 $(b,\ c,\ d)$가 다르면 $2^b3^c5^d$의 값도 다르므로 구하는

정수의 개수는 $b+c+d=3$을 만족시키는 순서쌍

$(b,\ c,\ d)$의 개수와 같다. 즉, ${}_{3}\mathrm{H}_{3} = {}_{5}\mathrm{C}_{3} = 10$이다.

위의 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 정수의 개수는 11이다.

37. 정답 ②

$x+y+z+3w=14$ … (ㄱ)

$x+y+z+w=10$ … (ㄴ)

(ㄱ)에서 (ㄴ)을 변끼리 빼면

$2w=4 \qquad \therefore w=2$

(ㄴ)에서 $w=2$를 대입하여 정리하면 $x+y+z=8$

따라서, $x+y+z=8$을 만족하는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3+8-1}\mathrm{C}_{8} = {}_{10}\mathrm{C}_{2} = \dfrac{10\times9}{2\times1} = 45$

이때, w는 항상 2이므로 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수도 45이다

38. 정답 220

$a\times b\times c$가 홀수이므로, a, b, c는 모두 홀수이다

이때, $a \le b \le c \le 20$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)는 $1, 3, 5, \cdots, 19$에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_{10}\mathrm{H}_{3} = {}_{12}\mathrm{C}_{3} = \dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 220$

39. 정답 68

$x+y+z+u=6$인 경우의 수에서 $x=u$인 경우의 수를 빼면 된다.

$x+y+z+u=6$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해 개수는

${}_{4}\mathrm{H}_{6} = {}_{4+6-1}\mathrm{C}_{6} = {}_{9}\mathrm{C}_{6} = 84$이고

① $x=u=0$일 때

$y+z=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는

${}_{2}\mathrm{H}_{6} = {}_{7}\mathrm{C}_{6} = 7$가지

② $x=u=1$

$y+z=4$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는

${}_{2}\mathrm{H}_{4} = {}_{5}\mathrm{C}_{4} = 5$가지

③ $x=u=2$

$y+z=2$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는

${}_{2}\mathrm{H}_{2} = {}_{3}\mathrm{C}_{2} = 3$가지

④ $x=u=3$

$y+z=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는

$y=0,\ z=0$인 1가지

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수는

$84-(7+5+3+1)=68$가지이다.

40. 정답 45

[출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

<B형>과 <C형>이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열한 경우는 ●○●○● 또는 ○●○●○

(ⅰ) ●○●○●인 경우

1번의 <D형>을 만들기 위해서는 새로운 1개의 ○을 나열되어 있는 ○에 이웃하도록 나열하고, 4번의 <A형>을

만들기 위해서는 새로운 4개의 ●을 나열되어 있는 ●에

이웃하도록 나열하면 되므로

${}_{2}\mathrm{C}_{1} \times {}_{3+4-1}\mathrm{C}_{4} = {}_{2}\mathrm{C}_{1} \times {}_{6}\mathrm{C}_{4} = 30$

(ⅱ) ○●○●○인 경우

같은 방법으로

${}_{3}\mathrm{C}_{1} \times {}_{2+4-1}\mathrm{C}_{4} = {}_{3}\mathrm{C}_{1} \times {}_{5}\mathrm{C}_{4} = 15$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 경우의 수는 45

41. 정답 32

① $d=2$ 일 때,

$a=2p,\ b=2q,\ c=2r$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)로 놓으면

$2p+2q+2r=18$

$\Rightarrow p+q+r=9$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q,\ r)$의 개수가 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수와

같으므로 ${}_{3}\mathrm{H}_{9-3} = {}_{8}\mathrm{C}_{6} = {}_{8}\mathrm{C}_{2} = 28$ 가지이다.

② $d=3$일 때,

$a=3p,\ b=3q,\ c=3r$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)로 놓으면

$3p+3q+3r=17$을 만족시키는 자연수 $p,\ q,\ r$은 존재하지

않는다.

③ $d=4$ 일 때,

$a=4p,\ b=4q,\ c=4r$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)로 놓으면

$4p+4q+4r=16$

$\Rightarrow p+q+r=4$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)를 만족시키는 순서쌍

$(p,\ q,\ r)$의 개수가 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수와

같으므로 ${}_{3}H_{4-3} = {}_{3}C_{1} = 3$ 가지이다.

④ $d = 5$ 일 때,

$a = 5p$, $b = 5q$, $c = 5r$(단, p, q, r은 자연수)로 놓으면

$5p + 5q + 5r = 15$

$\Rightarrow p+q+r = 3$(단, p, q, r은 자연수)를 만족시키는 순서쌍

$(p,\ q,\ r)$은 $(1,\ 1,\ 1)$밖에 없으므로 순서쌍

$(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 1가지이다.

⑤ $d \geq 6$이면 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$은 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $28 + 3 + 1 = 32$가지이다.

42. 정답 ①

1) $d=0$일 때,

(가)조건으로부터 $a+b+c = 10$

(나)조건의 $a+b+c \leq 5$에 모순

2) $d=1$일 때,

(가)조건으로부터 $a+b+c = 7$

(나)조건의 $a+b+c \leq 5$에 모순

3) $d=2$일 때,

(가)조건으로부터 $a+b+c = 4$ $\quad \therefore\ {}_{3}H_{4} = 15$

4) $d=3$일 때,

(가)조건으로부터 $a+b+c = 1$ $\quad \therefore\ {}_{3}H_{1} = 3$

1), 2), 3), 4)로부터 구하고자 하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $15+3 = 18$

43. 정답 8

[출제의도] 조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.

A가 세 개의 공을 받으므로 남는 공의 수는 7이다.

7개의 공을 두 사람에게 나누어 주는 경우의 수이므로

${}_{2+7-1}C_{7} = {}_{8}C_{7} = 8$

44. 정답 ②

[출제의도] 중복조합의 성질을 이해하여 경우의 수를 구한다.

네 자리 자연수의 각 자리의 수를 각각 x, y, z, w라 하면

$x+y+z+w=14$

x, y, z, w가 모두 홀수이므로

$x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$, $w=2d+1$

(단, a, b, c, d는 0이상 4이하의 정수)

$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1)=14$

$a+b+c+d=5$

a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 5개를 택한다. 이때 a, b, c, d는 4이하의 정수이므로 한 가지만 5번 택하는 4가지 경우는 제외한다.

$${}_{4}H_{5} - 4 = {}_{4+5-1}C_{5} - 4 = {}_{8}C_{5} - 4 = \frac{8!}{5!3!} - 4 = 52$$

45. 정답 ④

[출제의도] 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

0인 것 2개를 정하는 경우의 수는

$${}_{5}C_{2} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10 \cdots\cdots \text{㉠}$$

$a=b=0$일 때 $c+d+e=10$을 만족시키는 자연수 c, d, e의 순서쌍 $(c,\ d,\ e)$의 개수는

$c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$

(단, c', d', e'는 음이 아닌 정수)

라 하면

$(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=10$

$c'+d'+e'=7$

을 만족시키는 순서쌍 $(c',\ d',\ e')$의 개수와 같으므로

$${}_{3+7-1}C_{7} = {}_{9}C_{7} = {}_{9}C_{2} = \frac{9\times8}{2\times1} = 36 \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하고자 하는 순서쌍의 개수는

$10\times36=360$

46. 정답 ③

[출제의도] 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

주어진 조건을 만족시키는 세 자연수 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 순서쌍 $(|a|,\ |b|,\ |c|)$의 개수는 5 이하의 자연수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

이때 a, b, c는 각각 음의 정수와 양의 정수의 값을 가질 수 있으므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $(|a|,\ |b|,\ |c|)$의 개수의 2^3배와 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_{5}H_{3}\times2^3 = {}_{5+3-1}C_{3}\times8 = {}_{7}C_{3}\times8 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times8 = 280$$

47. 정답 49

[출제의도] 중복조합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.

조건 (가)와 (나)를 만족시키는 자연수 N을

$N=10^3a+10^2b+10c+d$로 놓으면

$a+b+c+d=7$이고 a, b, c는 0 또는 자연수이고, d는 홀수이므로 d는 1, 3, 5 중 하나이다.

i) $d=1$인 경우

$a+b+c=6$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_{3}H_{6} = {}_{8}C_{6} = {}_{8}C_{2} = 28$

ii) $d=3$인 경우

$a+b+c=4$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_{3}H_{4} = {}_{6}C_{4} = {}_{6}C_{2} = 15$

iii) $d=5$인 경우

$a+b+c=2$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_{3}H_{2} = {}_{4}C_{2} = 6$

i), ii), iii)으로부터 구하는 자연수 N의 개수는

$28+15+6=49$

48. 정답 210

[출제의도] 중복조합 이해하기

(나)에서 자연수 x, y, z, w 중 3으로 나눈 나머지가 1인 수 2개를 선택하고 3으로 나눈 나머지가 2인 수 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_4C_2 \times {}_2C_2 = 6$

x, y가 3으로 나눈 나머지가 1인 수,

z, w는 3으로 나눈 나머지가 2인 수라 하면

$x=3x'+1$, $y=3y'+1$, $z=3z'+2$, $w=3w'+2$

(x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)

(가)에서 $x+y+z+w=18$

$(3x'+1)+(3y'+1)+(3z'+2)+(3w'+2)=18$

$x'+y'+z'+w'=4$ …… ㉠

이때 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는 4개의 문자 x', y', z', w'에서 4개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_4 = {}_{4+4-1}C_4 = {}_7C_4 = 35$

따라서 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$6 \times 35 = 210$

49. 정답 ③

(i) $w=1$일 때

$x+y+z=9$ (x, y, z는 자연수)이므로

${}_3H_6 = {}_8H_6 = 28$

(ii) $w=2$일 때

$x+y+z=4$ (x, y, z는 자연수)이므로

${}_3H_1 = {}_3H_1 = 3$

(i), (ii)로 부터 구하고자 하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 31

50. 정답 36

선택되는 8개 중에 사과의 개수를 x, 감의 개수를 y, 배의 개수를 z, 귤의 개수를 w 라 하면

$x+y+z+w=8$ $(x \le 1,\ y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 1)$

i) $x=0$ 일 때

$y+z+w=8$ $(y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 1)$이고

$y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$이라 하면

$y'+z'+w'=5$ $(y' \ge 0,\ z' \ge 0,\ w' \ge 0)$이므로

구하는 경우의 수는 ${}_3H_5 = {}_7C_5 = 21$

ii) $x=1$일 때

$y+z+w=7$ $(y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 1)$이고

$y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$이라 하면

$y'+z'+w'=4$ $(y' \ge 0,\ z' \ge 0,\ w' \ge 0)$이므로

구하는 경우의 수는 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$

i), ii)에서 36가지이다.

51. 정답 ②

[출제의도] 중복조합을 활용하여 추론하기

네 자연수 a, b, c, d 중 홀수가 2개인 경우의 수는

${}_4C_2 = 6$

a, b, c, d 중 두 홀수를 $2x+1$, $2y+1$, 두 짝수를 $2z+2$, $2w+2$라 하자.

(단, x, y, z, w는 음이 아닌 정수)

$(2x+1)+(2y+1)+(2z+2)+(2w+2)=12$

$x+y+z+w=3$

${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$

따라서 $6 \times 20 = 120$

52. 정답 ⑤

[출제의도] 중복조합 이해하기

(i) a, b, c가 모두 짝수인 경우

${}_7H_3 = {}_9C_3 = 84$

(ii) a, b, c 중 1개만 짝수인 경우

짝수 1개를 선택하는 경우의 수는 7

홀수 8개 중 중복을 허락하여 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_8H_2$

선택한 세 수를 크기순으로 나열하는 경우의 수는 1이므로 $7 \times {}_8H_2 \times 1 = 252$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 336

53. 정답 ④

천의 자리수를 x, 백의 자리수를 y, 십의 자리수를 z, 일의 자리수를 w라 하면

$x+y+z+w=7$ 이고 $x \ge 1$, $y \ge 1$, $z \ge 1$, $w \ge 1$이므로

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$

라 하면 (단, x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)

$x'+y'+z'+w'=3$ 을 만족하는 해의 개수는

${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$

54. 정답 28

[출제의도] 중복조합을 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2} = 28$

55. 정답 ④

[출제의도] 중복조합을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$b=0$일 때 $a=0$이므로 $c+d=7$인 경우 :

${}_2H_7 = {}_8C_7 = 8$

$b=1$일 때 $a=2$이므로 $c+d=4$인 경우 :

${}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$

$b=2$일 때 $a=4$이므로 $c+d=1$인 경우 :

${}_2H_1 = {}_2C_1 = 2$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $8+5+2=15$

참고

(가)에서 $a=2b$이므로 (나)에서 $3b+c+d=7$

56. 정답 32

[출제의도] 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

조건 (나)에서

$2^a\times4^b=2^{a+2b}$이고 이 수가 8의 배수이어야 하므로
$a+2b\ge3$
(i) $b=0$일 때,
$a\ge3$이어야 하므로
조건 (가)에서 $a=a'+3$ (a'은 음이 아닌 정수)으로 놓으면
$a+b+c=(a'+3)+c=7$
$a'+c=4$
그러므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$
(ii) $b=1$일 때,
$a\ge1$이어야 하므로 조건 (가)에서
$a=a'+1$ (a'은 음이 아닌 정수)로 놓으면
$a+b+c=(a'+1)+1+c=7$
$a'+c=5$
그러므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$
(iii) $b\ge2$일 때,
$a\ge0$이면 되므로 조건 (가)에서
$b=b'+2$ (b'은 음이 아닌 정수)로 놓으면
$a+b+c=a+(b'+2)+c=7$
$a+b'+c=5$
그러므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$
따라서, (i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$5+6+21=32$

57. **정답** 760
[출제의도] 중복조합을 활용하여 추론하기
자연수 n에 대하여 0부터 n까지 정수가 하나씩 적힌 $(n+1)$개의 공이 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 5번의 과정 중 m번째 꺼낸 공에 적힌 수를 $f(m)$이라 할 때,
조건 (가)에 의하여
$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$
조건 (나)에 의하여 $f(3)=f(1)+1$
$f(1)=a$ $(a=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$이라 하면
$f(3)=a+1$
$a\le f(2)\le a+1\le f(4)\le f(5)$
(i) $a=0$일 때,
$0\le f(2)\le1\le f(4)\le f(5)$
$f(2)$를 선택하는 경우는 0 또는 1의 두 가지이고
$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_nH_2={}_{n+1}C_2$
$\therefore\ 2\times{}_{n+1}C_2$
(ii) $a=1$일 때,
$1\le f(2)\le2\le f(4)\le f(5)$
$f(2)$를 선택하는 경우는 1 또는 2의 두 가지이고
$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n$ 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{n-1}H_2={}_nC_2$
$\therefore\ 2\times{}_nC_2$
(iii) $a=k$일 때,
$k\le f(2)\le k+1\le f(4)\le f(5)$
$f(2)$를 선택하는 경우는 k 또는 $k+1$의 두 가지이고
$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는 $k+1,\ k+2,\ k+3,\ \cdots,\ n$ 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{n-k}H_2={}_{n-k+1}C_2$
$\therefore\ 2\times{}_{n-k+1}C_2$
$0\le k\le n-1$이므로
$$\begin{aligned}a_n&=2({}_{n+1}C_2+{}_nC_2+{}_{n-1}C_2+\cdots+{}_3C_2+{}_2C_2)\\&=2({}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_2+{}_{n+1}C_2)\\&=2({}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_2+{}_{n+1}C_2)\end{aligned}$$
한편, ${}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r$ $(1\le r\le n)$이므로
$$a_n=2\times{}_{n+2}C_3=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{18}\frac{a_n}{n+2}=\sum_{n=1}^{18}\frac{n(n+1)}{3}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{18}(n^2+n)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{18\times19\times37}{6}+\frac{18\times19}{2}\right)=760$$

다른풀이
자연수 n에 대하여 0부터 n까지 정수가 하나씩 적힌 $(n+1)$개의 공이 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 5번의 과정 중 m번째 꺼낸 공에 적힌 수를 $f(m)$이라 할 때,
조건 (가)에 의하여
$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$
조건 (나)에 의하여 $f(3)=f(1)+1$
$f(1)=a$ $(a=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$이라 하면
$f(3)=a+1$
$a\le f(2)\le a+1\le f(4)\le f(5)$
(i) $f(2)$를 선택하는 경우는
$f(2)=a$ 또는 $f(2)=a+1$이므로
이 경우의 수는 2 …… ㉠
(ii) $f(3)$이 결정되면 $f(1)$은 유일하므로
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우만 고려하면 된다.
$f(3)=a+1\ge1$이므로
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우는

1부터 n까지 수 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

이 경우의 수는 ${}_{n}H_{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a_n = 2\times{}_{n}H_{3} = 2\times{}_{n+2}C_{3} = 2\times\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$= \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{18}\frac{a_n}{n+2} = 760$

58. 정답 35

[출제의도] 중복조합을 활용하여 추론하기

자연수 2, 3, 5, 7이 선택되어진 개수를 각각 a, b, c, d라 하면 $a+b+c+d=8$ (단, a, b, c, d는 음이 아닌 정수)

8개의 수의 곱은

$2^a\times3^b\times5^c\times7^d = 60k$ (단, k는 자연수)

$2^a\times3^b\times5^c\times7^d = (2^2\times3\times5)\times k$이므로

$a\ge2$, $b\ge1$, $c\ge1$, $d\ge0$

$a'=a-2$, $b'=b-1$, $c'=c-1$, $d'=d$라 하면

$a'+b'+c'+d'=4$

(단, a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)

순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_{4}H_{4} = {}_{7}C_{4} = 35$

59. 정답 80

[출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

조건을 만족시키는 자연수는 각 자리의 수의 합이 8보다 작은 네 자리의 홀수이므로 일의 자리의 수는 1, 3, 5이다.

이 네 자리의 자연수를

$a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$ $(a\ne0)$이라 하자.

(ⅰ) $d=1$인 경우

부등식 $a+b+c\le6$ $(a\ge1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

$a+b+c=6$ $(a\ge1)$일 때, ${}_{3}H_{5}$

$a+b+c=5$ $(a\ge1)$일 때, ${}_{3}H_{4}$

⋮

$a+b+c=1$ $(a\ge1)$일 때, ${}_{3}H_{0}$

${}_{3}H_{5}+{}_{3}H_{4}+\cdots+{}_{3}H_{0} = {}_{7}C_{5}+{}_{6}C_{4}+\cdots+{}_{2}C_{0} = 56$

(ⅱ) $d=3$인 경우

부등식 $a+b+c\le4$ $(a\ge1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

(ⅰ)과 같은 방법으로

${}_{3}H_{3}+{}_{3}H_{2}+{}_{3}H_{1}+{}_{3}H_{0} = {}_{5}C_{3}+{}_{4}C_{2}+{}_{3}C_{1}+{}_{2}C_{0} = 20$

(ⅲ) $d=5$인 경우

부등식 $a+b+c\le2$ $(a\ge1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

(ⅰ)과 같은 방법으로

${}_{3}H_{1}+{}_{3}H_{0} = {}_{3}C_{1}+{}_{2}C_{0} = 4$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 80

다른풀이

(ⅰ) $d=1$인 경우

$a+b+c\le6$ $(a\ge1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$a+b+c+e=6$ $(a\ge1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, e의 순서쌍 (a, b, c, e)의 개수와 같다.

그러므로 ${}_{4}H_{5} = {}_{8}C_{5} = 56$

(ⅱ) $d=3$인 경우

$a+b+c\le4$ $(a\ge1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$a+b+c+e=4$ $(a\ge1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, e의 순서쌍 (a, b, c, e)의 개수와 같다.

그러므로 ${}_{4}H_{3} = {}_{6}C_{3} = 20$

(ⅲ) $d=5$인 경우

$a+b+c\le2$ $(a\ge1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$a+b+c+e=2$ $(a\ge1)$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, e의 순서쌍 (a, b, c, e)의 개수와 같다.

그러므로 ${}_{4}H_{1} = {}_{4}C_{1} = 4$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 80

60. 정답 ④

$x+y+z=10$에서 ${}_{3}H_{10} = 66$

$y+z=0$에서 $(0,0)$ 1가지

$y+z=10$에서 ${}_{2}H_{10} = 11$

$\therefore$ $66-(1+11) = 66-12 = 54$

61. 정답 96

[출제의도] 중복조합을 이해하여 순서쌍의 개수를 구한다.

$180 = 2^2\times3^2\times5$이므로

조건 (가)를 만족하는 (a, b, c)의 개수는

$a = 2^{x_1}3^{y_1}5^{z_1}$, $b = 2^{x_2}3^{y_2}5^{z_2}$, $c = 2^{x_3}3^{y_3}5^{z_3}$에서

(단, $i=1, 2, 3$에 대하여 x_i, y_i, z_i는 음이 아닌 정수)

$x_1+x_2+x_3=2$, $y_1+y_2+y_3=2$, $z_1+z_2+z_3=1$

${}_{3}H_{2}\times{}_{3}H_{2}\times{}_{3}H_{1} = {}_{4}C_{2}\times{}_{4}C_{2}\times{}_{3}C_{1} = 108$ …… ㉠

조건 (나)는 $a\ne b$, $b\ne c$, $c\ne a$이므로

이를 만족하지 않는 경우는

$a=b$ 또는 $a=c$ 또는 $b=c$이다.

이 중 $a=b=c$인 경우는 존재하지 않는다.

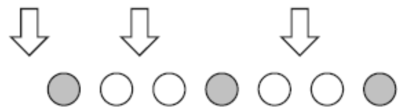
a, b, c 중 두 수가 같은 순서쌍은

$(1, 1, 180)$, $(2, 2, 45)$, $(3, 3, 20)$, $(6, 6, 5)$

$(1, 180, 1)$, $(2, 45, 2)$, $(3, 20, 3)$, $(6, 5, 6)$

$(180, 1, 1)$, $(45, 2, 2)$, $(20, 3, 3)$, $(5, 6, 6)$이므로

조건 (나)를 만족하지 않는 순서쌍의 개수는 12 ⋯⋯ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $108-12=96$
62. 정답 92
[출제의도] 중복조합을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.
(1) $x=0$일 때,
$0 \le y \le z \le w \le 5$이므로
$y+z+w \le 15$를 만족하려면
0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 3개를 중복해서 선택하는 경우의
수이므로 ${}_6\mathrm{H}_3=56$
(2) $x=1$일 때,
$1 \le y \le z \le w \le 5$이므로
$y+z+w \le 14$를 만족하려면
1, 2, 3, 4, 5중에서 3개를 중복해서 선택하는 경우의 수에서
(5, 5, 5)인 1가지 경우를 빼야 하므로 ${}_5\mathrm{H}_3-1=34$
(3) $x=2$일 때,
$4 \le y \le z \le w \le 5$이므로
$y+z+w \le 13$을 만족하는 순서쌍은 (4, 4, 4), (4, 4, 5) 2가지 뿐이므로 경우의 수는 2
따라서 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는
$56+34+2=92$
63. 정답 ③
[출제의도] 중복조합을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.
조건 (나)에서 $a+b=3$ 또는 $b+c=3$ 또는 $c+a=3$이다.
(1) $a+b=3$일 때 $c+d=4$이므로
${}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_4={}_4\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_4=20$
(2) $b+c=3$일 때 $a+d=4$이므로
${}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_4={}_4\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_4=20$
(3) $a+c=3$일 때 $b+d=4$이므로
${}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_4={}_4\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_4=20$
(4) 위의 (1), (2), (3)에서 중복되는 경우를 구하면
① $a+b=3, b+c=3$인 경우
$(a, b, c)=(0, 3, 0), (1, 2, 1), (2, 1, 2), (3, 0, 3)$
② $a+b=3, a+c=3$인 경우
$(a, b, c)=(0, 3, 3), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (3, 0, 0)$
③ $a+c=3, b+c=3$인 경우
$(a, b, c)=(0, 0, 3), (1, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 3, 0)$
따라서 조건 (가), (나)을 만족시키는 순서쌍
(a, b, c, d)의 개수는 $20+20+20-4-4-4=48$
64. 정답 ②
[출제의도] 수학 외적 문제 해결능력-순열과 조합
조형물 사이에 2개 이상의 빈 설치대가 있어야 하므로 그림과 같이 배치시킨 다음 화살표로 표시된 4개의 위치에 나머지 3개의 설치대를 임의로 배치하면 된다.



이 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 경우의 수이므로 ${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$
한편 조형물의 순서를 정하는 방법의 수는 $3!=6$이다.
따라서 구하는 방법의 수는 $6 \times 20=120$
65. 정답 51
[출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.
6개의 과일에서 선택한 4개의 과일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z라 하자.
(i) $(x, y, z)=(0, 2, 2)$인 경우
배 2개와 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 각각 ${}_2\mathrm{H}_2$, ${}_2\mathrm{H}_2$이고, 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_2 \times {}_2\mathrm{H}_2-2={}_3\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2-2=3 \times 3-2=7$
$(x, y, z)=(2, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$인 경우의 수도 모두 7이다.
(ii) $(x, y, z)=(1, 1, 2)$인 경우
사과 1개, 배 1개, 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 차례로 ${}_2\mathrm{H}_1$, ${}_2\mathrm{H}_1$, ${}_2\mathrm{H}_2$이고, 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_1 \times {}_2\mathrm{H}_1 \times {}_2\mathrm{H}_2-2={}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2-2=2 \times 2 \times 3-2$
$=10$
$(x, y, z)=(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$인 경우의 수도 모두 10이다.
위의 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$3 \times 7+3 \times 10=51$

다른풀이

6개의 과일에서 선택한 4개의 과일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z라 하고, 2명의 학생을 각각 A, B라 하자.
이때 과일을 하나도 받지 못하는 학생이 없어야 하고, 학생 A가 받는 과일이 정해지면 학생 B가 받는 과일도 정해진다.
(i) $(x, y, z)=(0, 2, 2)$인 경우
학생 A가 받는 배와 귤의 수를 순서쌍으로 나타내면 (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1) 이므로 구하는 경우의 수는 7이다.
이때 $(x, y, z)=(2, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$인 경우의 수도 모두 7이다.
(ii) $(x, y, z)=(1, 1, 2)$인 경우
학생 A가 받는 사과, 배, 귤의 수를 순서쌍으로

나타내면
$(0,\ 0,\ 1)$, $(0,\ 0,\ 2)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 2)$,
$(1,\ 0,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 2)$, $(1,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 1,\ 1)$
이므로 구하는 경우의 수는 10이다.
이때 $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 1)$인 경우의 수도 모두 10이다.
위의 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$3\times7+3\times10=51$

66. 정답 ②
[출제의도] 중복조합을 활용하여 경우의 수 추론하기
조건에 맞는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하려면
(가)를 만족시키는 경우에서
두 점 (a, b), (c, d)가 서로 같은 경우와 점 (a, b) 또는 점 (c, d)가 직선 $y=2x$ 위에 있는 경우를 제외하면 된다.
$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$이라 하면
$a+b+c+d=12$를 만족시키는 자연수 해의 개수는
$a'+b'+c'+d'=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로
${}_4H_8={}_{11}C_3=165$
(ⅰ) 두 점 (a, b), (c, d)가 같은 경우
$a=c$, $b=d$이므로 $a+b=6$이고
순서쌍의 개수는 ${}_2H_4=5$
즉, 순서쌍은 $(1, 5, 1, 5)$, $(2, 4, 2, 4)$, $(3, 3, 3, 3)$, $(4, 2, 4, 2)$, $(5, 1, 5, 1)$의 5가지이다.
(ⅱ) 점 (a, b)가 직선 $y=2x$ 위에 있는 경우
$b=2a$이므로 $3a+c+d=12$
$a=1$인 경우 $c+d=9$의 자연수 해의 개수는 ${}_2H_7=8$
$a=2$인 경우 $c+d=6$의 자연수 해의 개수는 ${}_2H_4=5$
$a=3$인 경우 $c+d=3$의 자연수 해의 개수는 ${}_2H_1=2$
따라서 점 (a, b)가 직선 $y=2x$ 위에 있을 때의 순서쌍의 개수 $8+5+2=15$에서
(ⅰ)과 중복되는 순서쌍 $(2, 4, 2, 4)$를 제외한 순서쌍의 개수는 14이다.
(ⅲ) 점 (c, d)가 직선 $y=2x$ 위에 있는 경우
(ⅱ)와 같이 순서쌍의 개수는 14이다.
(ⅳ) 두 점 (a, b), (c, d)가 모두 직선 $y=2x$ 위에 있는 경우
$3a+3c=12$이므로 $a+c=4$
따라서 두 점 (a, b), (c, d)가 모두 직선 $y=2x$ 위에 있을 때의 순서쌍의 개수 ${}_2H_2=3$에서
(ⅰ)과 중복되는 순서쌍 $(2, 4, 2, 4)$를 제외한 순서쌍의 개수는 2이다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는
$165-5-(14+14-2)=134$

67. 정답 63
[출제의도] 중복조합 이해하기
두 수 2, 4에서 중복을 허락하여 두 개를 선택하는 경우의 수는 ${}_2H_2={}_3C_2=3$
세 수 1, 3, 5에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3H_5={}_7C_5=21$
따라서 구하는 경우의 수는 $3\times21=63$

68. 정답 84
[출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기
서로 다른 4개의 상자 중 빈 상자의 개수가 1인 경우의 수는 4
빈 상자가 아닌 서로 다른 3개의 상자에 넣은 공의 개수를 각각 a, b, c라 하자. 공을 넣는 경우의 수는 방정식 $a+b+c=8$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같으므로
${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$
따라서 $4\times21=84$

69. 정답 100
[출제의도] 중복조합 이해하기
9 이하의 음이 아닌 정수 a, b, c, d에 대하여 네 자리 이하의 자연수를
$a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$라 하자.
3000보다 작은 네 자리 자연수 중 각 자리의 수의 합이 10이므로
$1\le a\le2$이고 $a+b+c+d=10$
(ⅰ) $a=1$인 경우
$b+c+d=9$를 만족시키는 음이 아닌 세 정수 b, c, d의 순서쌍 $(b,\ c,\ d)$의 개수는
${}_3H_9={}_{11}C_9=55$
(ⅱ) $a=2$인 경우
$b+c+d=8$을 만족시키는 음이 아닌 세 정수 b, c, d의 순서쌍 $(b,\ c,\ d)$의 개수는
${}_3H_8={}_{10}C_8=45$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 경우의 수는 100

70. 정답 ⑤
먼저 서로 다른 종류의 사탕 3개를 각 주머니에 1개씩 넣으면 주머니는 구별이 가능하게 된다.
각 주머니에 구슬을 1개씩 넣은 후 나머지 4개의 구슬을 각 주머니에 나누어 넣으면 된다.
따라서 서로 다른 3개의 주머니에 서로 같은 4개의 구슬을 나누어 넣는 중복조합이다.
구하는 경우의 수는 ${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$이다.

71. 정답 525
[출제의도] 중복조합의 수를 이용하여 함수의 개수를 구한다.
조건 (가)에서 함수 f의 치역에 속하는 집합 X의 원소 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$ …… ㉠
치역에 속하는 3개의 수에 각각 대응하는 집합 X의

원소의 개수를 각각 a, b, c라 하고 조건 (나)를
만족시키려면
$a+b+c=7$ (a, b, c는 자연수)
$a'+1=a$, $b'+1=b$, $c'+1=c$로 놓으면
$a'+b'+c'=4$ (a', b', c'은 음이 아닌 정수)
이때 순서쌍 (a', b', c')의 개수는
$_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 구하는 함수 f의 개수는 $35\times15=525$

72. **정답** ⑤
[출제의도] 중복조합 이해하기
음이 아닌 정수 x', y', z'에 대하여
$x=-x'$, $y=-y'$, $z=-z'$라 하면
$x+y+z=-7$에서 $-x'-y'-z'=-7$
$x'+y'+z'=7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수
x', y', z'의 모든 순서쌍 (x', y', z')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$\therefore {}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

73. **정답** ②
[출제의도] 중복조합을 활용하여 경우의 수 문제해결하기
ⅰ) $x=0$인 경우 : $y+z=4$이므로 $_2H_4={}_5C_4=5$
ⅱ) $x=3$인 경우 : $y+z=2$이므로 $_2H_2={}_3C_2=3$
ⅲ) $x=6$인 경우 : $y+z=0$이므로 $_2H_0={}_1C_0=1$
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 구하는 모든 순서쌍의 개수는 9

74. **정답** ②
[출제의도] 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?
네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 초콜릿의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면 $a+b+c+d=8$
이때, 조건 (가)에 의하여 네 명의 학생이 각각 적어도 1개의 초콜릿을 받으므로 a, b, c, d는 자연수이다.
이때, $a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1, d=d'+1$ 이라 하면
$a'+b'+c'+d'=4$ (a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)
조건 (나)에 의하여 $a'>b'$이어야 하므로
(ⅰ) $b'=0$일 때
$a'=1$인 경우 $c'+d'=3$이므로 경우의 수는
$_2H_3={}_4C_3=4$
$a'=2$인 경우 $c'+d'=2$이므로 경우의 수는
$_2H_2={}_3C_2=3$
$a'=3$인 경우 $c'+d'=1$이므로 경우의 수는
$_2H_1={}_2C_1=2$
$a'=4$인 경우 $c'+d'=0$이므로 경우의 수는 1
(ⅱ) $b'=1$일 때
$a'=2$인 경우 $c'+d'=1$이므로 경우의 수는
$_2H_1={}_2C_1=2$
$a'=3$인 경우 $c'+d'=0$이므로 경우의 수는 1
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 경우의 수는
$10+3=13$

75. **정답** 126
[출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기
$a\times b\times c=10^5=2^5\times5^5$이므로
$a=2^{x_1}\times5^{y_1}$, $b=2^{x_2}\times5^{y_2}$, $c=2^{x_3}\times5^{y_3}$이라 하자.
a, b, c가 짝수이므로 x_1, x_2, x_3은 자연수이고
y_1, y_2, y_3은 음이 아닌 정수이다.
방정식 $x_1+x_2+x_3=5$의 양의 정수해의 개수는
$_3H_{5-3}={}_4C_2=6$
방정식 $y_1+y_2+y_3=5$의 음이 아닌 정수해의 개수는
$_3H_5={}_7C_5=21$
따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$6\times21=126$

76. **정답** ①
[출제의도] 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?
$x_{n+1}-x_n=a_n$ ($n=1$, 2, 3)이라 하면
조건 (가)에서 $a_n\ge2$이고
$(x_4-x_3)+(x_3-x_2)+(x_2-x_1)=x_4-x_1$이므로
$a_1+a_2+a_3=x_4-x_1$
이때
$x_1+a_1+a_2+a_3=x_4\le12$이므로
$12-x_4=a_4$라 하면 $a_4\ge0$이고
$x_1+a_1+a_2+a_3+a_4=12$ … ㉠
이때, $a_n'=a_n-2$ ($n=1$, 2, 3)이라 하면
$x_1+a_1'+a_2'+a_3'+a_4=6$ … ㉡
이때
$x_1\ge0$, $a_1'\ge0$, $a_2'\ge0$, $a_3'\ge0$, $a_4\ge0$이므로 ㉡을 만족시키는 순서쌍 $(x_1, a_1', a_2', a_3', a_4)$의 개수는
$_5H_6={}_{5+6-1}C_6={}_{10}C_6={}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

다른풀이
$x_{n+1}-x_n=a_n$ ($n=1$, 2, 3)이라 하면
조건 (가)에서 $a_n\ge2$이고
$(x_4-x_3)+(x_3-x_2)+(x_2-x_1)=x_4-x_1$이므로
$a_1+a_2+a_3=x_4-x_1$ … ㉠
이때, $a_n'=a_n-2$ ($n=1$, 2, 3)이라 하면
$a_n'\ge0$이고,
$a_1'+a_2'+a_3'=x_4-x_1-6$ … ㉡
한편, 등식
$a_1'+a_2'+a_3'=k$ ($k\ge0$)을 만족시키는 순서쌍
(a_1', a_2', a_3')의 개수는
$_3H_k={}_{3+k-1}C_k={}_{k+2}C_k$

(ⅰ) $x_4=12$일 때

㉡에서

$a_1'+a_2'+a_3'=6-x_1$

이때, $0\le x_1\le 6$이므로 파스칼의 삼각형의 성질에 의해 순서쌍 $(a_1',\ a_2',\ a_3')$의 개수는

$$\sum_{k=0}^{6}{}_3\mathrm{H}_k=\sum_{k=0}^{6}{}_{k+2}\mathrm{C}_k={}_9\mathrm{C}_6$$

(ⅱ) $x_4=11$일 때

㉡에서

$a_1'+a_2'+a_3'=5-x_1$

이때, $0\le x_1\le 5$이므로 파스칼의 삼각형의 성질에 의해 순서쌍 $(a_1',\ a_2',\ a_3')$의 개수는

$$\sum_{k=0}^{5}{}_3\mathrm{H}_k=\sum_{k=0}^{5}{}_{k+2}\mathrm{C}_k={}_8\mathrm{C}_5$$

이와 같은 방법으로

$x_4=7$일 때

㉡에서

$a_1'+a_2'+a_3'=1-x_1$

이때, $0\le x_1\le 1$이므로 파스칼의 삼각형의 성질에 의해 순서쌍 $(a_1',\ a_2',\ a_3')$의 개수는

$$\sum_{k=0}^{1}{}_3\mathrm{H}_k=\sum_{k=0}^{1}{}_{k+2}\mathrm{C}_k={}_4\mathrm{C}_1$$

$x_4=6$일 때

㉡에서

$a_1'+a_2'+a_3'=-x_1$, 즉 $a_1'+a_2'+a_3'=0$이므로 순서쌍 $(a_1',\ a_2',\ a_3')$의 개수는

${}_3\mathrm{H}_0={}_2\mathrm{C}_0={}_3\mathrm{C}_0$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

${}_9\mathrm{C}_6+{}_8\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_4+\cdots+{}_4\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_0$

$={}_{10}\mathrm{C}_6={}_{10}\mathrm{C}_4$

$=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

77. **정답** 84

[출제의도] 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

조건 (가)에 의하여

$x_1\le x_2-2,\ x_2,\ x_3-2$ 이고,

조건 (나)에 의하여

$x_3\le 10$ 이므로

$0\le x_1\le x_2-2\le x_3-4\le 6$

이때, $x_2-2=x_2',\ x_3-4=x_3'$ 이라 하면

$0\le x_1\le x_2'\le x_3'\le 6$ ⋯ ㉠

이고, 주어진 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1,\ x_2,\ x_3$의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 의 개수는 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1,\ x_2',\ x_3'$의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2',\ x_3')$의 개수와 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

0, 1, 2, ⋯, 6의 7개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_7\mathrm{H}_3={}_{7+3-1}\mathrm{C}_3={}_9\mathrm{C}_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

78. **정답** 120

[출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

8개의 레인 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 선택한 3개의 레인 번호를 각각 $X,\ Y,\ Z(X<Y<Z)$라 하자.

$X,\ Y,\ Z$를 선택하는 경우의 수는 다음과 같다.

X보다 작은 레인 번호의 개수를 a,

X보다 크고 Y보다 작은 레인 번호의 개수를 b,

Y보다 크고 Z보다 작은 레인 번호의 개수를 c,

Z보다 큰 레인 번호의 개수를 d라 하면

$a+b+c+d=5\ (a\ge0,\ b\ge1,\ c\ge1,\ d\ge0)$

$b=b'+1,\ c=c'+1$

$a+b'+c'+d=3(a\ge0,\ b'\ge0,\ c'\ge0,\ d\ge0)$

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

3개의 레인 번호 $X,\ Y,\ Z$를

3명의 학생이 선택하는 경우의 수는 $3!$

따라서 $20\times3!=120$

79. **정답** 49

조건에 의하여 네가지 경우로 나눌 수 있다.

1) 여학생이 연필 한자루씩 가지고 남학생은 볼펜 한자루씩 가지는 경우
   나머지 연필 4자루를 남학생에게 나눠주는 방법은 ${}_2\mathrm{H}_4=5$이고, 나머지 볼펜 두자루를 여학생에게 나눠주는 방법은 ${}_3\mathrm{H}_2=6$이므로 30가지
2) 여학생이 연필 한자루씩 가지고 남학생은 볼펜 2자루씩 가지는 경우
   연필 4자루만 남학생에게 나눠줘야 하므로 ${}_2\mathrm{H}_4=5$가지
3) 여학생이 연필 두자루씩 가지고 남학생이 볼펜 한자루씩 가지는경우
   나머지 연필 한자루를 남학생에게 나눠주는 방법은 ${}_2\mathrm{H}_1=2$, 나머지 볼펜 두자루를 여학생에게 나눠주는 방법은 ${}_3\mathrm{H}_2=6$이므로 12가지
4) 여학생이 연필 두자루씩 가지고 남학생은 볼펜 2자루씩 가지는 경우
   나머지 연필 한자루를 남학생에게 나눠주는 방법은 ${}_2\mathrm{H}_1=2$가지

따라서 모든 가지수는 $30+5+12+2=49$

80. **정답** ⑤

[출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

각 상자에 공이 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣어야

하므로 3개의 상자에 공을 1개씩 미리 넣고 남은 공 3개를 3개의 상자에 넣는다.
따라서 구하는 경우의 수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{3}=10$

81. 정답 285

[출제의도] 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?
조건 (가), (나)에 의하여 학생 A에게 사탕 1개, 학생 B에게 초콜릿 1개를 먼저 나누어주고 나머지 사탕 5개와 초콜릿 4개를 세 명의 학생에게 나누어주는 경우의 수를 구하면 된다.
그런데 조건 (다)에 의하여 학생 C가 사탕이나 초콜릿을 적어도 1개 받아야 하므로 학생 C가 아무것도 받지 못하는 경우의 수를 빼면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는

${}_{3}\mathrm{H}_{5}\times{}_{3}\mathrm{H}_{4}-{}_{2}\mathrm{H}_{5}\times{}_{2}\mathrm{H}_{4}$

$={}_{7}\mathrm{C}_{5}\times{}_{6}\mathrm{C}_{4}-{}_{6}\mathrm{C}_{5}\times{}_{5}\mathrm{C}_{4}$

$={}_{7}\mathrm{C}_{2}\times{}_{6}\mathrm{C}_{2}-{}_{6}\mathrm{C}_{1}\times{}_{5}\mathrm{C}_{1}$

$=21\times15-6\times5$

$=285$

82. 정답 ③

[출제의도] 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?
$a+b+c-d=9$ 에서 $a+b+c=9+d$
이때, $c\geq d$이므로 $c-d=c'$이라 하면 방정식 $a+b+c'=9$의 음이 아닌 정수 a, b, c'의 순서쌍의 개수를 구하는 경우와 같다.
$a+b+c'=9$를 만족하는 음이 아닌 정수 a, b, c'의 순서쌍의 개수는

${}_{3}\mathrm{H}_{9}={}_{11}\mathrm{C}_{9}={}_{11}\mathrm{C}_{2}=55$

이고 $d\leq4$이므로 $d=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 각각의 경우에 위의 수만큼 순서쌍이 존재하므로 순서쌍의 개수는

$55\times5=275$