

제 2 교시 **평가원 나형 킬러 모음 (~2021. 9)**

21. 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} 2a_n + a_{n+1} & (a_n \leq a_{n+1}) \\ a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3 = 2$, $a_6 = 19$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은? [4점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

30. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(1) = f(3) = 0$
 (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1 \text{ 이고 } f'(x) = 0\}$ 의 원소의 개수는 1이다.

상수 a 에 대하여 함수 $g(x) = |f(x)f(a-x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\frac{g(4a)}{f(0) \times f(4a)}$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. 두 곡선 $y=2^x$ 와 $y=-2x^2+2$ 가 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, <보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고는 것은? [4점]

<보 기>

$$\neg. x_2 > \frac{1}{2}$$

$$\neg. y_2 - y_1 < x_2 - x_1$$

$$\neg. \frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$$

- ① \neg ② \neg, \neg ③ \neg, \neg
 ④ \neg, \neg ⑤ \neg, \neg, \neg

30. 이차함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$ 는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 0) \\ g(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

- (가) 방정식 $h(x)=h(0)$ 의 모든 실근의 합은 1이다.
 (나) 닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$ 이다.

21. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $a_{2n} = a_n - 1$
- (나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$

$a_{20} = 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 704 ② 712 ③ 720 ④ 728 ⑤ 736

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $f(x) - x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
- (나) 방정식 $f(x) + x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0) = 0, f'(1) = 1$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x) + (x-1)f'(x)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

— <보 기> —

ㄱ. 함수 $h(x)$ 가 $h(x) = (x-1)f(x)$ 이면 $h'(x) = g(x)$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 극값 0을 가지면

$$\int_0^1 g(x)dx = -1 \text{이다.}$$

ㄷ. $f(0) = 0$ 이면 방정식 $g(x) = 0$ 은 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 네 개의 수 $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선과 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선이 점 $(k, 0)$ 에서 만난다. $f(2k) = 20$ 일 때, $f(4k)$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.) [4점]

21. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

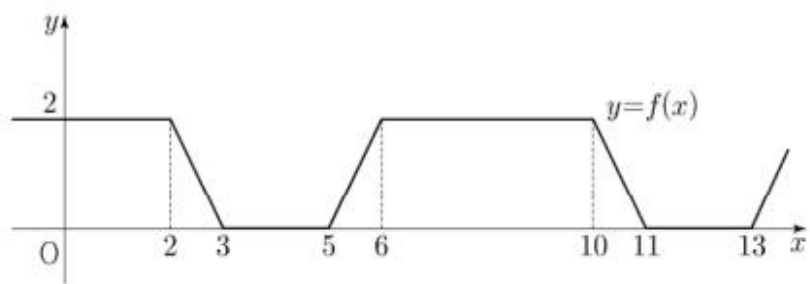
$$(가) f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x < 2) \\ -2x+6 & (2 \leq x < 3) \\ 0 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이고 $f(x) = f(x-8)$ 이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} + n & (x \neq 0) \\ n & (x = 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $(f \circ g)(x)$ 가 상수함수가 되도록 하는 60 이하의 자연수 n 의 개수는? [4점]



- ① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

30. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax-9}{x-1} & (x < 1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t 의 값의 집합은 $\{t \mid t = -1 \text{ 또는 } t \geq 3\}$ 이다.

$(g \circ g)(-1)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [4점]

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)g(x) = x(x+3)$ 이다.
 (나) $g(0) = 1$

$f(1)$ 이 자연수일 때, $g(2)$ 의 최솟값은? [4점]

- ① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선과
 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, 0)$ 에서의 접선은 모두 x 축이다.
 (나) 점 $(2, 0)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 개수는 2이다.
 (다) 방정식 $f(x)=g(x)$ 는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq kx - 2 \leq f(x)$ 를 만족시키는 실수 k 의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β 라 할 때, $\alpha - \beta = a + b\sqrt{2}$ 이다. $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.) [4점]

21. 사차함수 $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ 에 대하여 $x \geq 0$ 에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_{-x}^{2x} \{f(t) - |f(t)|\} dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $0 < x < 1$ 에서 $g(x) = c_1$ (c_1 은 상수)
- (나) $1 < x < 5$ 에서 $g(x)$ 는 감소한다.
- (다) $5 < x$ 에서 $g(x) = c_2$ (c_2 는 상수)

$f(\sqrt{2})$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

- ① 40
- ② 42
- ③ 44
- ④ 46
- ⑤ 48

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 $0, 1, a, 2, b$ 이다.

$$f'(1) < 0, f'(2) < 0, f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$ 의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$) [4점]

21. 상수 a, b 에 대하여 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(-1) > -1$
 (나) $f(1) - f(-1) > 8$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

— <보 기> —

- ㄱ. 방정식 $f'(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 ㄴ. $-1 < x < 1$ 일 때, $f'(x) \geq 0$ 이다.
 ㄷ. 방정식 $f(x) - f'(k)x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k 의 개수는 4이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

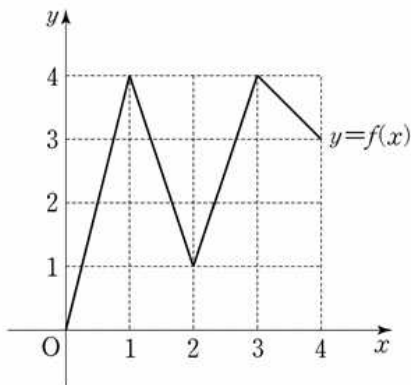
- (가) 5 이하의 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n f(k) = f(n)f(n+1) \text{이다.}$$

- (나) $n = 3, 4$ 일 때, 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 n 에서 $n+2$ 까지 변할 때의 평균변화율은 양수가 아니다.

$128 \times f\left(\frac{5}{2}\right)$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. 그림과 같이 닫힌 구간 $[0, 4]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 그래프는 점 $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$ 을 이 순서대로 선분을 연결한 것과 같다.



다음 조건을 만족시키는 집합 $X = \{a, b\}$ 의 개수는?
(단, $0 \leq a < b \leq 4$) [4점]

X 에서 X 로의 함수 $g(x) = f(f(x))$ 가 존재하고 $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$ 를 만족시킨다.

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

30. 이차함수 $f(x) = \frac{3x-x^2}{2}$ 에 대하여 구간 $[0, \infty)$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 1$ 일 때, $g(x) = f(x)$ 이다.

(나) $n \leq x < n+1$ 일 때,

$$g(x) = \frac{1}{2^n} \{f(x-n) - (x-n)\} + x \text{ 이다. (단, } n \text{은 자연수이다.)}$$

어떤 자연수 k ($k \geq 6$)에 대하여 함수 $h(x)$ 는

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & (0 \leq x < 5 \text{ 또는 } x \geq k) \\ 2x - g(x) & (5 \leq x < k) \end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_n = \int_0^n h(x)dx$ 라 할 때,

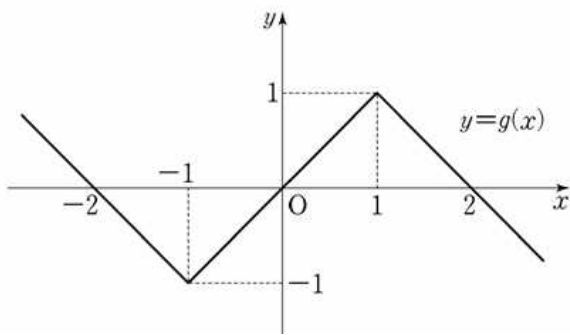
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - n^2) = \frac{241}{768} \text{ 이다. } k \text{의 값을 구하시오. [4점]}$$

21. 실수 a, b, c 와 두 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+a & (x < -1) \\ bx & (-1 \leq x < 1) \\ x+c & (x \geq 1) \end{cases}$$

$$g(x) = |x+1| - |x-1| - x$$

에 대하여 합성함수 $g \circ f$ 는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다. $a+b+2c$ 의 값은? [4점]



30. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x(2-x) & (|x-1| \leq 1) \\ 0 & (|x-1| > 1) \end{cases}$$

이다. 양의 실수 k, a, b ($a < b < 2$)에 대하여, 함수 $h(x)$ 를

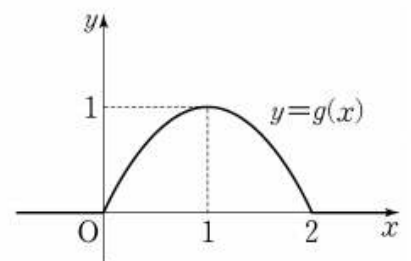
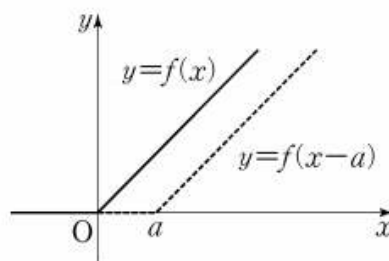
$$h(x) = k\{f(x) - f(x-a) - f(x-b) + f(x-2)\}$$

라 정의하자.

모든 실수 x 에 대하여 $0 \leq h(x) \leq g(x)$ 일 때,

$\int_0^2 \{g(x) - h(x)\} dx$ 의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b 에 대하여

$60(k+a+b)$ 의 값을 구하시오. [4점]



21. 함수 $f(x) = \frac{k}{x-11} + 6$ ($k \geq 36$)에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 개수는? [4점]

$|f(x)| \leq y \leq -x+5$ 인 두 자연수 x, y 의 모든 순서쌍 (x, y) 의 개수는 2 이상 4 이하이다.

- ① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha) = g(\alpha)$ 이고 $f'(\alpha) = g'(\alpha) = -16$ 인 실수 α 가 존재한다.
 (나) $f'(\beta) = g'(\beta) = 16$ 인 실수 β 가 존재한다.

$g(\beta+1) - f(\beta+1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. 좌표평면에서 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x+10 & (x < 10) \\ (x-10)^2 & (x \geq 10) \end{cases}$$

과 자연수 n 에 대하여 점 $(n, f(n))$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_n 이 있다. x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 O_n 의 내부에 있고 함수 $f(x)$ 의 그래프의 아랫부분에 있는 모든 점의 개수를 A_n , 원 O_n 의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 윗부분에 있는 모든 점의 개수를 B_n 이라 하자.

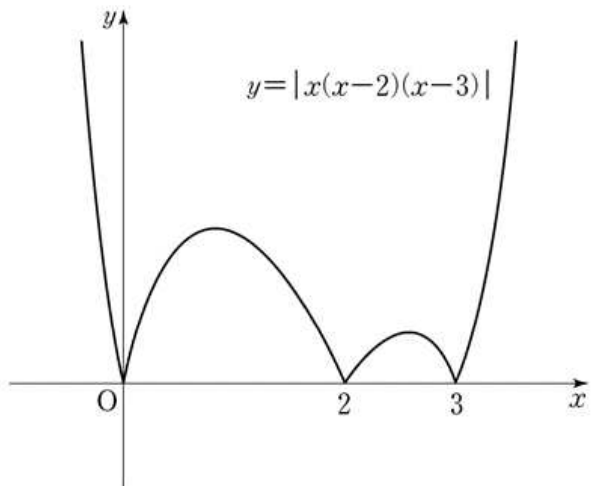
$\sum_{n=1}^{20} (A_n - B_n)$ 의 값은? [4점]

- ① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

30. 실수 k 에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + k$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 방정식 $4f'(x) + 12x - 18 = (f' \circ g)(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 실근을 갖기 위한 k 의 최솟값을 m , 최댓값을 M 이라 할 때, $m^2 + M^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)$ 의 최댓값은? [4점]

(가) 방정식 $f(x)=0$ 의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
 (나) 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분 가능하다.



- ① $\frac{7}{6}$
- ② $\frac{4}{3}$
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ $\frac{5}{3}$
- ⑤ $\frac{11}{6}$

30. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 영역

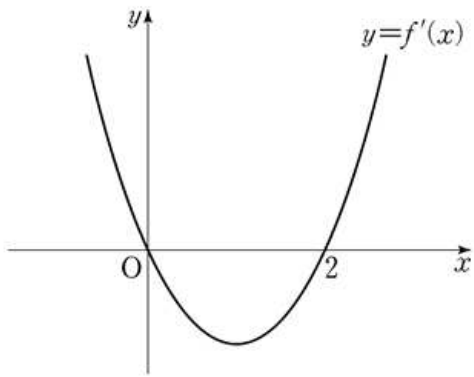
$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{x+3}}{2}\}$$

에 포함되는 정사각형 중에서 다음 조건을 만족시키는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$ 이라 하자.

(가) 각 꼭짓점의 x 좌표, y 좌표가 모두 정수이다.
 (나) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하이다.

예를 들어 $f(14) = 15$ 이다. $f(n) \leq 400$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값을 구하시오. [4점]

21. 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $f(0) < 0$ 이면 $|f(0)| \leq |f(2)|$ 이다.
 ㄴ. $f(0)f(2) \geq 0$ 이면 함수 $|f(x)|$ 가 $x=a$ 에서 극소인 a 값의 개수는 2이다.
 ㄷ. $f(0)+f(2)=0$ 이면 $|f(x)|=f(0)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. 다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\log_2(na - a^2)$ 과 $\log_2(nb - b^2)$ 은 같은 자연수이고
 $0 < b - a \leq \frac{n}{2}$ 인 두 실수 a, b 가 존재한다.

21. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $\frac{f'(0)}{f(0)}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. Mm 의 값은?

[4점]

(가) 함수 $|f(x)|$ 는 $x=-1$ 에서만 미분가능하지 않다.
 (나) 방정식 $f(x)=0$ 은 닫힌구간 $[3, 5]$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

- ① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{15}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

30. $x \geq \frac{1}{100}$ 인 실수 x 에 대하여 $\log x$ 의 소수부분을 $f(x)$ 라 하자. 다음 조건을 만족시키는 두 실수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 를 좌표평면에 나타낸 영역을 R 라 하자.

(가) $a < 0$ 이고 $b > 10$ 이다.
 (나) 함수 $y=9f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=ax+b$ 가 한 점에서만 만난다.

영역 R 에 속하는 점 (a, b) 에 대하여 $(a+20)^2 + b^2$ 의 최솟값은 $100 \times \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]