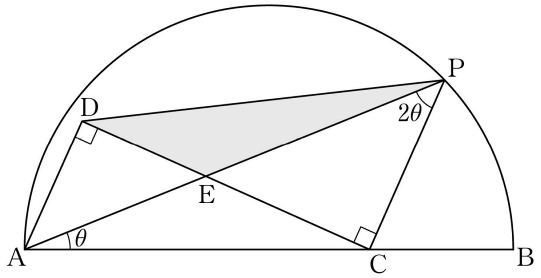
2020년 10월 교육청
가형
주요문항 해설 및
변형-미완성

랑데뷰 수학

1) **[2020년 10월 모의고사 가형 21번]**

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P와 선분 AB위의 점 C에 대하여 $\angle PAC = \theta$일 때, $\angle APC = 2\theta$이다. $\angle ADC = \angle PCD = \frac{\pi}{2}$인 점 D에 대하여 두 선분 AP와 CD가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 DEP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단 $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) **[랑데뷰수학]**

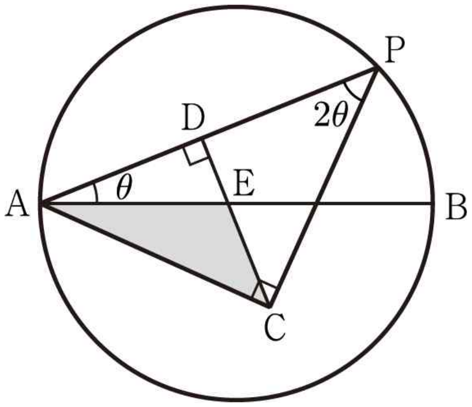


① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ 1

2) **[2020년 10월 모의고사 가형 21번]-변형**

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원주 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$일 때, $\angle \mathrm{APC} = 2\theta$, $\angle \mathrm{ACP} = \frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 점 C에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 점 D라 하고 선분 CD와 선분 AB의 교점을 점 E라 하자. 삼각형 ACE의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단 $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$)

[랑데뷰수학]



3) **[2020년 10월 모의고사 가형 28번]**

세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 빵 3개와 같은 종류의 우유 4개를 남김없이 나누어 주려고 한다. 빵만 받는 학생은 없고, 학생 A는 빵을 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 우유를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

[랑데뷰수학]

4) **[2020년 10월 모의고사 가형 28번]-변형**

세 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 빵 4개와 같은 종류의 우유 5개를 남김없이 나누어 주려고 한다. 빵만 받는 학생은 없고, 학생 A와 학생 B는 빵을 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 우유를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

[랑데뷰수학]

5) **[2020년 10월 모의고사 가형 29번]**

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

(가) $a < b < c \leq 20$
(나) 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

[랑데뷰수학]

6) **[2020년 10월 모의고사 가형 29번]-변형**

다음 조건을 만족시키는 서로 다른 10이하의 세 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

[랑데뷰수학]

7) **[2020년 10월 모의고사 가형 30번]**

최고차항의 계수가 k $(k>0)$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=f(-2)$, $f(0)\neq 0$이다. 함수 $g(x)=(ax+b)e^{f(x)}$ $(a<0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $(x+1)\{g(x)-mx-m\} \leq 0$을 만족시키는 실수 m의 최솟값은 -2이다. (나) $\displaystyle\int_{0}^{1} g(x)\,dx=\int_{-2f(0)}^{1} g(x)dx=\frac{e-e^{4}}{k}$

[랑데뷰수학]

$f(ab)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

8) **[2020년 10월 모의고사 가형 30번]-변형**

최고차항의 계수가 $a(a>0)$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=f'(x)\ln f(x)$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=f(2)$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\{g(x)-f'(x)\}\geq 0$이다.

[랑데뷰수학]

함수 $f(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, $\int_{m}^{b} g(x)dx \geq 0$을 만족시키는 실수 b의 최댓값은 $pe+q$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, $b<m$, p, q는 정수이다.)

1) 정답 ④
[풀이 : 황보백]

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{PC}}\cdots㉠$

삼각형 APB에서 $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=2\cos\theta$

삼각형 ACP에서 $\angle\mathrm{ACP}=\pi-3\theta$이므로 사인법칙을 적용하면

$\frac{2\cos\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin2\theta}=\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin\theta}$

따라서 $\overline{\mathrm{PC}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\sin3\theta}\cdots㉡$, $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{2\cos\theta\sin2\theta}{\sin3\theta}$ 이다.

직각삼각형 ACD에서 $\angle\mathrm{CAD}=3\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AC}}\cos3\theta=\frac{2\cos\theta\sin2\theta\cos3\theta}{\sin3\theta}$

직각삼각형 EAD에서

$\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{AD}}\tan2\theta=\frac{2\cos\theta\sin2\theta\cos3\theta\tan2\theta}{\sin3\theta}\cdots㉢$

㉠, ㉡, ㉢에서

$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times2\times\frac{2}{3}\times2=\frac{8}{9}$

[다른 풀이]-1

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PE}}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\sin(\angle\mathrm{DEP})\cdots㉠$

삼각형 APB에서 $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=2\cos\theta$

삼각형 ACP에서 $\angle\mathrm{ACP}=\pi-3\theta$이므로 사인법칙을 적용하면

$\frac{2\cos\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin2\theta}=\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin\theta}$

따라서 $\overline{\mathrm{CP}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\sin3\theta}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{2\cos\theta\sin2\theta}{\sin3\theta}$이다.

직각삼각형 PEC에서

$\overline{\mathrm{PE}}=\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{\cos2\theta}=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos2\theta\sin3\theta}\cdots㉡$

$\overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{CP}}\tan2\theta=\frac{2\cos\theta\sin\theta\tan2\theta}{\sin3\theta}$이고

직각삼각형 ACD에서 $\angle\mathrm{CAD}=3\theta$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AC}}\sin 3\theta=2\cos\theta\sin 2\theta$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{DE}}&=\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{EC}}\\&=2\cos\theta\sin 2\theta-\frac{2\cos\theta\sin\theta\tan 2\theta}{\sin 3\theta}\\&=2\cos\theta\sin 2\theta-\frac{\sin 2\theta\tan 2\theta}{\sin 3\theta}\\&=\sin 2\theta\left(2\cos\theta-\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}\right)\cdots㉢\end{aligned}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 $\sin(\angle\mathrm{DEP})=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)=\cos 2\theta$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times 2\left(2-\frac{2}{3}\right)\times 1=\frac{8}{9}$$

[다른 풀이]-2

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{PE}}\times\sin(\angle\mathrm{DEP})$

$\angle\mathrm{DAE}=2\theta$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{AE}}\times\sin 2\theta$

$\angle\mathrm{DEP}=\frac{\pi}{2}+2\theta$

이므로

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{EP}}\times\sin 2\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)\\&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{EP}}\times\sin 2\theta\times\cos 2\theta\end{aligned}$$

$\lim_{\theta\to 0}\overline{\mathrm{AE}}=\lim_{\theta\to 0}\overline{\mathrm{AC}}=\frac{4}{3}$, $\lim_{\theta\to 0}\overline{\mathrm{EP}}=\lim_{\theta\to 0}\overline{\mathrm{PC}}=\frac{2}{3}$이므로

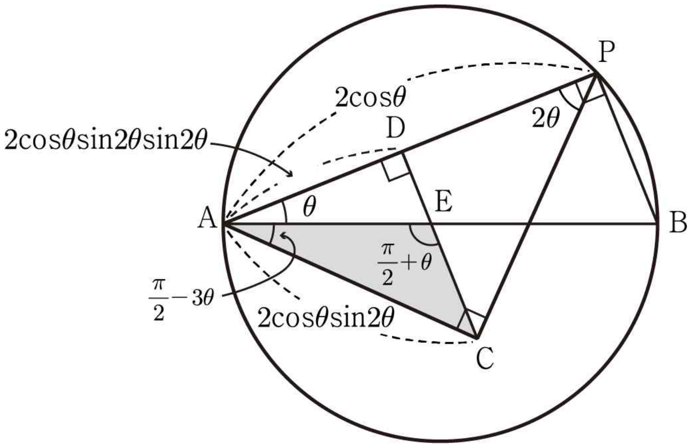
$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times 2=\frac{8}{9}$$

2) 정답 16

[출제자 : 황보 백 송원학원 010-5673-8601]

직각삼각형 APB에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=2\cos\theta$이다.



[그림도움 : 최성훈T]

직각삼각형 APB에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AP}}\sin2\theta=2\cos\theta\sin2\theta$이고

$\angle\mathrm{CAP}=\dfrac{\pi}{2}-2\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AC}}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)=2\cos\theta\sin2\theta\sin2\theta$

한편, 삼각형 AEC에서 $\angle\mathrm{AEC}=\dfrac{\pi}{2}+\theta$, $\angle\mathrm{EAC}=\dfrac{\pi}{2}-3\theta$이므로

사인법칙을 적용하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}=\dfrac{\overline{\mathrm{EC}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3\theta\right)}$에서

$\overline{\mathrm{EC}}=\dfrac{2\cos\theta\sin2\theta\cos3\theta}{\cos\theta}=2\sin2\theta\cos3\theta$

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EC}}\times\overline{\mathrm{AD}}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times2\sin2\theta\cos3\theta\times2\cos\theta\sin2\theta\sin2\theta$

이다.

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{1}{2}\times2\times2\times2\times2\times2=16$

3) 정답 37

[풀이 황보백]

직접 세어 보자
A, B, C가 받은 빵의 개수를 각각 a, b, c라 하고 A, B, C가 받은 우유의 개수를 각각 x, y, z라 할 때,
$a+b+c=3$, $x+y+z=4$
(i) $(a, b, c)=(1, 1, 1)$일 때,
$x+y+z=4$에서 $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$인 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_1=3$

(ii) $(a, b, c)=(1, 2, 0)$일 때,
$x+y+z=4$에서 $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 0$인 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
$(1, 0, 2)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$일 때 도 마찬가지 이므로
$6 \times 4=24$

(iii) $(a, b, c)=(3, 0, 0)$일 때,
$x+y+z=4$에서 $x \geq 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$인 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

(i), (ii), (iii)에서 $3+24+10=37$

[다른 풀이]
학생 A에게 빵을 1개를 준 상황으로 생각하자.
빵 2개, 우유 4개를 남김없이 세 학생에게 나누어 주는 경우이므로
A, B, C가 받은 빵의 개수를 각각 a, b, c라 하고 A, B, C가 받은 우유의 개수를 각각 x, y, z라 할 때,
$a+b+c=2$, $x+y+z=4$
(개수를 나타내는 모든 문자는 0이상)
따라서 ${}_3\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{H}_4={}_4\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_4=6 \times 15=90$
여기서 빵만 받는 학생이 있는 경우의 수는 아무것도 받지 못하는 사람이 없는 경우와 있는 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(1) 아무것도 받지 못하는 사람이 없는 경우
(i) 한 명만 있는 경우
㉠ A가 빵 1개 이상, 우유 0개
즉, $a \geq 0$, $x=0$이고 $y \geq 1$, $z \geq 1$이므로
$a+b+c=2$, $y'+z'=2$
${}_3\mathrm{H}_2 \times {}_2\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2=6 \times 3=18$

㉡ B가 빵 1개 이상, 우유 0개
즉, $b \geq 1$, $y=0$이고 $x \geq 1$, $z \geq 1$이므로
$a+b'+c=1$, $x'+z'=2$
${}_3\mathrm{H}_1 \times {}_2\mathrm{H}_2 = {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 3 \times 3 = 9$

㉢ C가 빵만 받는 경우
⇨ ㉡과 같은 경우이므로 9

따라서 $18+9+9=36$

(ii) 두 명이 빵만 받는 경우
㉠ A, B가 빵만 받을 때,
즉, $a \geq 0$, $x=0$, $b \geq 1$, $y=0$
$a+b'+c=1$
${}_3\mathrm{H}_1 = 3$
㉡ A, C가 빵만 받을 때,
⇨ ㉡과 같은 경우이므로 3
㉢ B, C가 빵만 받을 때,
1가지
따라서 $3+3+1=7$
(i), (ii)에서 $36+7=43$

(2) 아무것도 받지 못하는 사람이 있는 경우
B가 아무것도 받지 못하는 경우
$a+b+c=2$, $x+y+z=4$에서 $b=0$, $y=0$

$a+c=2$, $x+z=4$
에서
$a=0$, $c=2$, $x=0$, $z=4$
$a=1$, $c=1$, $x=0$, $z=4$
$a=2$, $c=0$, $x=0$, $z=4$
$a=0$, $c=2$, $x=4$, $z=0$
$a=1$, $c=1$, $x=4$, $z=0$
로 5가지이고
C가 아무것도 받지 못하는 경우도 마찬가지 5가지이다.

따라서 10가지

(1), (2)에서 $43+10=53$

따라서 $90-53=37$

4) 정답 124
[출제자 : 황보 백 송원학원 010-5673-8601]

직접 세어 보자
A, B, C, D가 받은 빵의 개수를 각각 a, b, c, d라 하고 A, B, C, D가 받은 우유의 개수를 각각 x, y, z, u라 할 때,
$a+b+c+d=4$, $x+y+z+u=5$
(i) $(a, b, c, d)=(1, 1, 1, 1)$일 때,
$x+y+z+u=5$에서 $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$, $u \geq 1$인 경우의 수는
${}_4\mathrm{H}_1=4$

(ii) $(a, b, c, d)=(1, 1, 2, 0)$일 때,
$x+y+z+u=5$에서 $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$, $u \geq 0$인 경우의 수는
${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$
$(1, 1, 0, 2)$, $(1, 2, 0, 1)$, $(1, 2, 1, 0)$, $(2, 1, 0, 1)$, $(2, 1, 1, 0)$
는 모두 같은 경우의 수이므로
$10\times6=60$

(iii) $(a, b, c, d)=(1, 3, 0, 0)$
$x+y+z+u=5$에서 $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 0$, $u \geq 0$인 경우의 수는
${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$
$(3, 1, 0, 0)$, $(2, 2, 0, 0)$
는 모두 같은 경우의 수이므로
$20\times3=60$

(i), (ii), (iii)에서 $4+60+60=124$

5) 정답 525
(가) 조건을 만족하는 경우의 수는 ${}_{20}\mathrm{C}_3=\dfrac{20\times19\times18}{3\times2\times1}=1140$
(나) 조건은 자연수 a, b, c에 대하여 $a+b>c$를 만족하는 경우이다.
1140가지의 각 경우의 만족하는 순서쌍 (a, b, c)의 수는

$a+b>c$, $a+b=c$, $a+b<c$인 경우의 수로 나눌 수 있고
대칭에 의해 $a+b>c$와 $a+b<c$의 경우의 수는 같다.

따라서 $a+b=c$의 경우의 수를 구하고 1140에서 뺀 뒤 $\frac{1}{2}$배 하면 된다.

$1 \leq a<b<c \leq 20$
$a+b=c$인 경우
$c=20$일 때, $(a, b) \Rightarrow (1,19)$, $(2,18)$, $\cdots$ $(9,11)$ $\rightarrow$ 9가지
$c=19$일 때, $(a, b) \Rightarrow (1,18)$, $(2,17)$, $\cdots$ $(9,10)$ $\rightarrow$ 9가지
$c=18$일 때, $(a, b) \Rightarrow (1,17)$, $(2,16)$, $\cdots$ $(8,10)$ $\rightarrow$ 8가지
$c=17$일 때, $(a, b) \Rightarrow (1,16)$, $(2,15)$, $\cdots$ $(8,9)$ $\rightarrow$ 8가지
$\vdots$ $\vdots$
$c=4$일 때, $(a, b) \Rightarrow (1,3) \rightarrow$ 1가지
$c=3$일 때, $(a, b) \Rightarrow (1,2) \rightarrow$ 1가지
따라서 경우의 수는

$2\times(1+2+3+\cdots+9)=2\times\frac{9\times10}{2}=90$

$\frac{1140-90}{2}=525$

[다른 풀이]
$x \geq 1$, $y \geq 1$인 x, y에 대하여
$b=a+x$, $c=a+x+y$라 할 수 있다.
$c \leq 20$이므로 $a+x+y \leq 20$이다.$\cdots$㉠
$a+x+y+w=20$
$(a \geq 1, x \geq 1, y \geq 1, w \geq 0)$
$a=a'+1$, $x=x'+1$, $y=y'+1$라 두면
$(a' \geq 0, x' \geq 0, y' \geq 0)$
$a'+x'+y'+w=17$

그러므로 만족하는 경우의 수는 ${}_{4}\mathrm{H}_{17}={}_{20}\mathrm{C}_{3}=\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}=1140$

(나)에서 $a+b>c$이므로
$a+a+x>a+x+y$에서 $a>y$이다.
㉠에서 만족하는 경우의 수에는 $a>y$, $a=y$, $a<y$인 경우가 있고
대칭성에 의해 $a>y$, $a<y$인 경우는 같은 경우의 수가 된다.
따라서 1140에서 $a=y$인 경우를 제외한 뒤 반으로 나누면 되겠다.
그러므로 $a+b>c$인 경우는 $2a+x>a+x+y$인 경우이고 $a>y$이다.
대칭에 의해 $a>y$인 경우와 $a<y$인 경우는 같은 경우의 수가 나오므로
$a=y$인 경우의 수를 구한 뒤 제외하자.

$a+x+y \leq 20$
$2a+x \leq 20$
$2a+x+w=20$
$2a+x'+w=19$
$a=1$일 때 $x'+w=17 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_{17}={}_{18}\mathrm{C}_1=18$
$a=2$일 때 $x'+w=15 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_{15}={}_{16}\mathrm{C}_1=16$
$\vdots$
$a=9$일 때 $x'+w=1 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_1={}_2\mathrm{C}_1=2$
따라서 $2\times(1+2+\cdots+9)=90$
그러므로
$\frac{1140-90}{2}=525$

6) 정답 300
[풀이 황보 백]

a, b, c가 서로 다른 자연수이므로
$1 \leq a<b<c \leq 10$인 경우를 생각하자.$\cdots$㉠

$1 \leq a<b<c \leq 10$ 조건을 만족하는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$
$a<b<c \leq 10$ 자연수 a, b, c에 대하여 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재하기 위해서는 $a+b>c$를 만족해야 한다.

120가지의 각 경우의 만족하는 순서쌍 (a, b, c)의 수는
$a+b>c$, $a+b=c$, $a+b<c$인 경우의 수로 나눌 수 있고
대칭에 의해 $a+b>c$와 $a+b<c$의 경우의 수는 같다.
따라서 $a+b=c$의 경우의 수를 구하고 120에서 뺀 뒤 $\frac{1}{2}$배 하면 된다.
$1 \leq a<b<c \leq 10$
$a+b=c$인 경우
$c=10$일 때, $(a, b) \Rightarrow (1,9)$, $(2,8)$, $(3,7)$, $(4,6)$ $\rightarrow$ 4가지
$c=9$일 때, $(a, b) \Rightarrow (1,8)$, $(2,7)$, $(3,6)$, $(4,5)$ $\rightarrow$ 4가지
$c=8$일 때, $(a, b) \Rightarrow (1,7)$, $(2,6)$, $(3,5)$ $\rightarrow$ 3가지

$c=7$일 때, $(a,\ b)$ ⇨ $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$ $\rightarrow$ 3가지

⋮ ⋮

$c=4$일 때, $(a,\ b)$ ⇨ $(1,3)\rightarrow$ 1가지

$c=3$일 때, $(a,\ b)$ ⇨ $(1,2)\rightarrow$ 1가지

따라서 경우의 수는

$2\times(1+2+3+4)=20$

$\dfrac{120-20}{2}=50$이다.

그런데 ㉠의 경우의 수가 $3!=6$이므로

$50\times6=300$이다.

[다른 풀이]

a, b, c가 서로 다른 자연수이므로

$1\le a<b<c\le 10$인 경우를 생각하자.…㉠

$b=a+x$, $c=a+x+y$

$x\ge1$, $y\ge1$이고

$a+x+y\le10$에서

$a+x+y+w=10$

$a'+x'+y'+w=7$

${}_4\mathrm{H}_7={}_{10}\mathrm{C}_7={}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

삼각형이 결정되기 위해서는 $a+b>c$

즉, $a+(a+x)>a+x+y$이 성립한다.

따라서 $a>y$이다.

대칭성에 고려하면 $a=y$인 경우를 제외한 값의 $\dfrac{1}{2}$이 $a+b>c$의 조건을 만족하는 경우의 수이다.

$c=a+x+y=2a+y\le10$

$2a+y+w=10$

$2a+y'+w=9$

$a=1$일 때, $y'+w=7$ ⇨ ${}_2\mathrm{H}_7={}_8\mathrm{C}_1=8$

$a=2$일 때, $y'+w=5$ ⇨ ${}_2\mathrm{H}_5={}_6\mathrm{C}_1=6$

$a=3$일 때, $y'+w=3$ ⇨ ${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

$a=4$일 때, $y'+w=1$ ⇨ ${}_2\mathrm{H}_1={}_2\mathrm{C}_1=2$

따라서 $2+4+6+8=20$

그러므로 $\dfrac{120-20}{2}=50$이다.

그런데 ㉠의 경우의 수가 $3!=6$이므로

$50 \times 6 = 300$이다.

7) 정답 25

$f(x)$는 $f(0)=f(-2)$이므로 $x=-1$이 축인 이차함수이다.

이차항의 계수가 양수 k이므로 $f(x)=k(x+1)^2+l$, $f'(x)=2k(x+1)$이다.

(가)에서

$x \leq -1$이면 $g(x) \geq m(x+1) \cdots$ ㉠

$x \geq -1$이면 $g(x) \leq m(x+1) \cdots$ ㉡

을 만족하고 두 식에 각각 $x=-1$을 대입하면 $0 \leq g(-1) \leq 0$이므로

$g(-1)=0$이다.

따라서 $g(x)=(ax+b)e^{f(x)}$에서 $g(-1)=(-a+b)e^{f(-1)}=0$이고 $e^{f(-1)}>0$이므로

$-a+b=0$에서 $a=b$이다.

그러므로

$g(x)=a(x+1)e^{f(x)}$

$g'(x)=ae^{f(x)}+a(x+1)e^{f(x)}f'(x)$

$\quad =ae^{f(x)}+2ak(x+1)^2e^{f(x)} \cdots$ ㉢

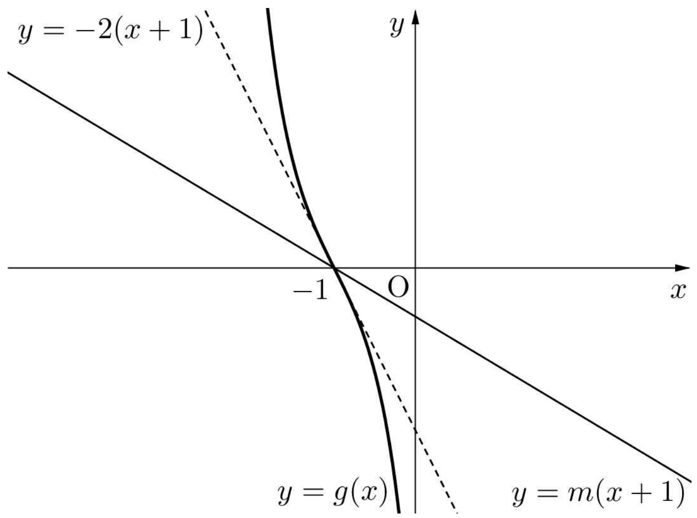
$a<0$이므로 모든 실수 x에서 $g'(x)<0$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체 집합에서 감소하는 그래프이다.

㉠, ㉡에서

다음 그림과 같이 직선 $y=m(x+1)$이 $x=-1$에서 $y=g(x)$에 접할 때의 기울기가 m의 최솟값 -2이다.

즉, $g'(-1)=-2$

㉢에서 $g'(-1)=ae^{f(-1)}=-2 \cdots$ ㉣



[그림도움 : 이현일T]

또한 $f(x)=a(x+1)^2+q$에서

$f(-2-x)=a(-2-x)^2+q=a(x+1)^2+q=f(x)$이므로

$g(-2-x)=a(-x-1)e^{f(-2-x)}=-a(x+1)e^{f(x)}$이다.

따라서

$g(x)+g(-2-x)=0$에서

함수 $g(x)$는 $(-1,\ 0)$에 대칭이다.

따라서

$\int_{-2}^{0} g(x)dx=0$이므로 $\int_{-2}^{1} g(x)dx=\int_{-2}^{0} g(x)dx+\int_{0}^{1} g(x)dx$

(나)에서

$\int_{0}^{1} g(x)\,dx=\int_{-2f(0)}^{1} g(x)dx$이므로

$-2f(0)=-2$에서 $f(0)=1$이다.

$\therefore\ f(x)=k(x+1)^2-k+1$

㉣에서 $ae^{-k+1}=-2$에서

$\therefore\ a=-2e^{k-1}$

따라서

$g(x)=-2e^{k-1}(x+1)e^{k(x+1)^2-k+1}$

$\quad=-2(x+1)e^{k(x+1)^2}$

이므로

$\int_{0}^{1} g(x)\,dx$

$=-2\int_{0}^{1}\left\{(x+1)e^{k(x+1)^2}\right\}dx$

$k(x+1)^2=t$라 두면

$=-2\int_{k}^{4k}\left(\frac{1}{2k}e^{t}\right)dt$

$=-\frac{1}{k}\Big[\ e^{t}\Big]_{k}^{4k}$

$=\frac{e^{k}-e^{4k}}{k}=\frac{e-e^{4}}{k}$

에서 $k=1$이다.

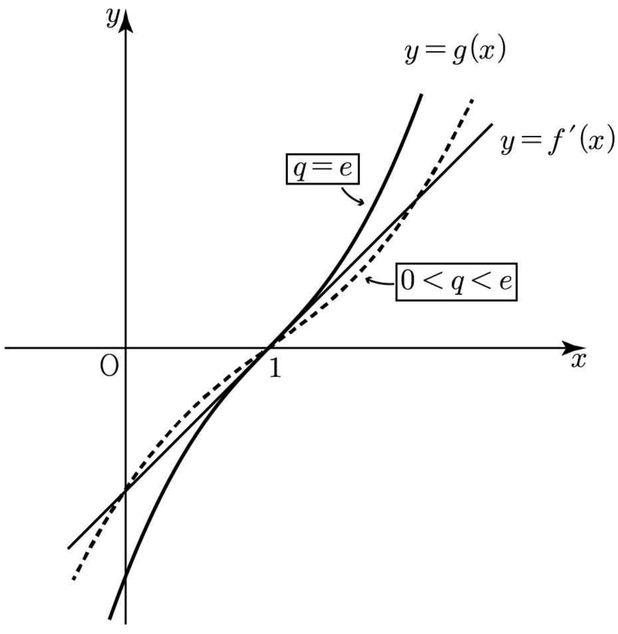
따라서 $a=b=-2$이고

$f(x)=(x+1)^2$이다.

$f(ab)=f(4)=5^2=25$

8) 정답 5
[출제자 : 황보 백 송원학원 010-5673-8601]

이차항의 계수가 $a(a>0)$인 이차함수 $f(x)$는 (가) 조건에서 축의 방정식이 $x=1$이므로
$f(x)=a(x-1)^2+q$이다.
$f'(x)=2a(x-1)$이므로
$g(x)=2a(x-1)\ln\{a(x-1)^2+q\}$이다.
(나)의 $2a(x-1)\{g(x)-2a(x-1)\} \geq 0$에서
$x \leq 1$일 때, $g(x) \leq 2a(x-1)$
$x \geq 1$일 때, $g(x) \geq 2a(x-1)$
을 만족해야 한다.
$g'(x)=2a\ln\{a(x-1)^2+q\}+\dfrac{4a^2(x-1)^2}{a(x-1)^2+q}$이다.
모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$이므로 $g(x)$는 증가함수이다.
따라서 다음 그림과 같이 $x=1$에서의 함수 $g(x)$의 접선의 기울기 $g'(1)$와 $y=2a(x-1)$의 기울기를 비교했을 때, $g'(1) \geq 2a$이면 조건 (나)를 만족한다.



[그림도움 : 최성훈T]

따라서

$g'(1)=2a\ln q$이므로

$2a\ln q \geq 2a$

$\ln q \geq 1$

$q \geq e$이다.

따라서 이차함수 $f(x)$의 최솟값은 e이다.

한편, $g(1)=0$이고

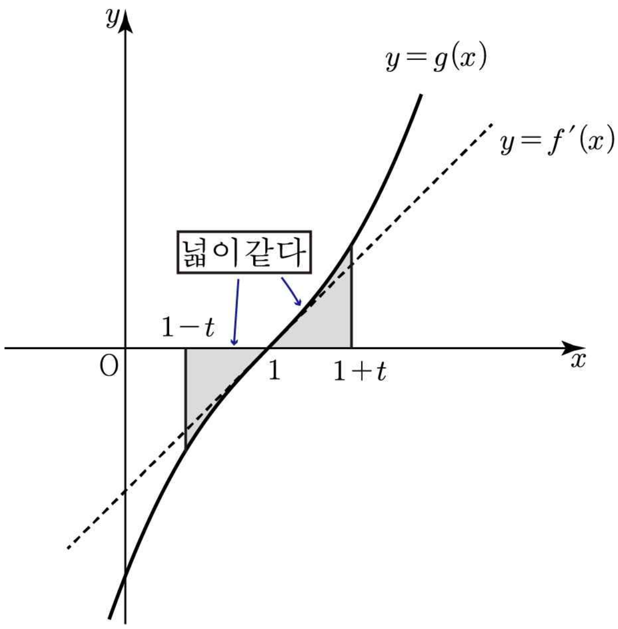
$g(x)=2a(x-1)\ln\{a(x-1)^2+q\}$에서

$g(2-x)=2a(1-x)\ln\{a(1-x)^2+q\}$

$\qquad=-2a(x-1)\ln\{a(x-1)^2+q\}=-g(x)$ 이므로

$g(2-x)+g(x)=0$이 성립한다.

즉, 함수 $g(x)$는 양수 a의 값에 관계없이 $(1, 0)$에 대칭인 함수이다.



[그림도움 : 최성훈T]

그러므로 $\int_{1-t}^{1+t} g(x)dx=\int_{1+t}^{1-t} g(x)dx=0$ 이다.

$\int_{m}^{b} g(x)dx=\int_{e}^{b} g(x)dx=0$을 만족하는 $b=2-e$이다.

$b<2-e$이면 $\int_{e}^{2-e} g(x)dx>0$이므로

$\int_{e}^{b} g(x)dx \geq 0$을 만족하는 b의 범위는 $b \leq 2-e$

따라서 b의 최댓값은 $-e+2$이다.

$p=-1$, $q=2$이므로 $p^2+q^2=5$이다.