

2021학년도 Only one 모의고사

# 수학 영역 (가형)

성명		수험 번호																		
----	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

**그까짓거 겁나지 않아, 넘어지면 일어설테니까**

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고 하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.
- 본 모의고사의 저작권은 Only one에게 있습니다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

## 2021학년도 Only one 모의고사

출제자 : Only one

범위 : 수학 가형 (수학1, 미적분, 확률과 통계)

2021학년도 9월 모의고사와 유사하게 문제를 배치하였고, 준킬러와 킬러의 난이도 격차를 줄이며 최근 트렌드를 따라갔습니다. 바뀐 교육과정에 따라 중요한 부분의 문제들을 주로 넣었고, 수능 발상에 어긋나지 않아 2021학년도 대학수학능력시험 수학 가형을 준비하는 학생들에게 실전연습을 할 수 있도록 하였습니다.

본 모의평가에 대한 저작권은 Only one에게 있으며, 저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 영리적 목적으로 사용하거나 2차적 저작물 작성 등으로 이용하는 행위는 정보통신망이용촉진 및 정보보호, 저작권 관련 법률에 따라 금지되어 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1.  $\sqrt{32} \times 2^{-3}$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ③ 1      ④  $\sqrt{2}$       ⑤ 2

2. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k - \frac{2k^2+3}{k^2} \right) = 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은? [2점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

3.  $f(x) = 8 \ln(x+3) + 3$ 일 때,  $f'(-1)$ 의 값은? [2점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

4.  $f(x) = a^{-x}$ 이고 두 자연수  $m, n$ 에 대해  $f(m) = 216f(n)$ 일 때, 자연수  $a$ 의 최솟값은? [3점]

- ① 2      ② 3      ③ 4      ④ 5      ⑤ 6

# 2

## 수학 영역(가형)

5. 두 사건  $A, B$ 는 서로 독립이고, 다음 조건들을 만족한다.

(가)  $P(A-B) = P(B-A^c)$   
 (나)  $P(A^c \cap B)P(A \cap B^c) > 0$

$P(A^c \cap B^c) = kP(B-A)$ 일 때,  $k$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{2}$       ② 1      ③  $\frac{3}{2}$       ④ 2      ⑤  $\frac{5}{2}$

6.  $x=4$ 에서  $x=9$ 까지 곡선  $y = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ 의 길이는? [3점]

- ① 12      ②  $\frac{37}{3}$       ③  $\frac{38}{3}$       ④ 13      ⑤  $\frac{40}{3}$

7. 이산확률변수  $X$ 가 가지는 값이 1, 2, 3, 4이고,

$P(X=4) = \frac{1}{4}$ 이다.  $P(X=1) = 2P(X=2) = 3P(X=3)$ 일 때,  
 $P(X=2)$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{7}{44}$       ②  $\frac{2}{11}$       ③  $\frac{9}{44}$       ④  $\frac{5}{22}$       ⑤  $\frac{1}{4}$

8. 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 은 수렴하지 않고  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2$ 은 수렴한다.  $a_1 = 2$ 일 때,  $\sum_{k=1}^5 a_k$ 의 값은? [3점]

- ① 2      ② 6      ③ 10      ④ 14      ⑤ 18

9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+8} + \frac{9}{n^3+27} + \dots + \frac{n^2}{2n^3} \right)$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{3} \ln 2$     ②  $\frac{1}{2} \ln 2$     ③  $\ln 2$     ④  $\frac{1}{3} \ln 3$     ⑤  $\frac{1}{2} \ln 3$

10. 자연수  $x$ 의 소인수의 개수를  $f(x)$ 라고 하자. 수열  $\{a_n\}$ 이 임의의 자연수  $n$ 에 대하여 다음 조건을 만족한다.

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + n & (f(a_n) \neq 1) \\ a_n + n^2 & (f(a_n) = 1) \end{cases}$$

$a_1 = 8$ 일 때,  $a_7$ 의 값은? [3점]

- ① 55      ② 58      ③ 61      ④ 64      ⑤ 67

11. 한 주사위를 4번 던져 나온 수를 순서대로  $a, b, c, d$ 라고 하자. 이 때,  $a-b=0$ ,  $(b-c)(c-d)(d-a)=0$ 일 확률은?

[3점]

- ①  $\frac{1}{18}$       ②  $\frac{2}{27}$       ③  $\frac{5}{54}$       ④  $\frac{1}{9}$       ⑤  $\frac{7}{54}$

12. 실수 전체에서 정의되는 함수  $f(x)$ 가  $0 \leq k \leq 2\pi$ 에 대해

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (x \leq k) \\ (\cos k)(x-k) + \sin k & (x > k) \end{cases}$$

이다.  $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값이 존재할 때,  $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ 의 최댓값은? [3점]

- ①  $\frac{\pi}{2}+1$       ②  $\pi+1$       ③  $\frac{3\pi}{2}+1$   
 ④  $\frac{\pi}{2}+2$       ⑤  $\pi+2$



# 6

## 수학 영역(가형)

15. 다음은 임의의 자연수  $n$ 에 대하여

$\sum_{k=1}^m \sqrt{k(k+3)} < \frac{4}{5}(m+1)^{\frac{5}{2}}$  가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

i)  $m=1$ 일 때  
 (좌변)=4, (우변)= $\frac{16}{5}\sqrt{2}$ .

ii)  $m=2$ 일 때  
 (좌변)= $4+5\sqrt{2} \approx 11$ , (우변)= $\frac{36}{5}\sqrt{3} \approx 12$

iii)  $m=3$ 일 때  
 (좌변)= $4+5\sqrt{2}+6\sqrt{3} \approx 21$ , (우변)= (가)

이므로  $m=1, 2, 3$ 일 때 성립한다.

iv)  $m=n$ (단,  $n \geq 3$ )일 때 주어진 식이 성립한다고 가정 하자.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k(k+3)} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k(k+3)} + \text{(나)}$$

$$< \frac{4}{5}(n+1)^{\frac{5}{2}} + \text{(나)}$$

$$= \frac{4}{5}\sqrt{n+1} \times \text{(다)}$$

$$< \frac{4}{5}\sqrt{n+1}(n+2)^2$$

$$< \frac{4}{5}\sqrt{n+2}(n+2)^2 = \frac{4}{5}(n+2)^{\frac{5}{2}}$$

따라서 수학적 귀납법에 의해

$$\sum_{k=1}^m \sqrt{k(k+3)} < \frac{4}{5}(m+1)^{\frac{5}{2}}$$

(가)에 들어갈 수를  $p$ , (나), (다)에 들어갈 식을 각각  $f(n), g(n)$ 이라고 할 때,  $\frac{p \times g(4)}{f(3)}$ 의 값은? [4점]

- ① 32      ② 48      ③ 64      ④ 80      ⑤ 96

16.  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 에서 정의된 함수  $f(x)=\sin x$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 하자.  $\int_0^1 e^x \cos^2 g(x) dx$ 의 값은? [4점]

- ① 1      ②  $e$       ③  $e^2$       ④  $e^3$       ⑤  $e^4$

17.  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고  $X \rightarrow X$ 로의 함수  $f$ 에 대하여 치역의 임의의 원소  $k$ 에 대하여  $f(x) = k$ 의 서로 다른 근이  $n$ 개 존재하도록 하는 함수  $f$ 의 개수를  $a_n$ 이라고 하자.

이 때,  $\sum_{k=1}^6 a_k$ 의 값은?

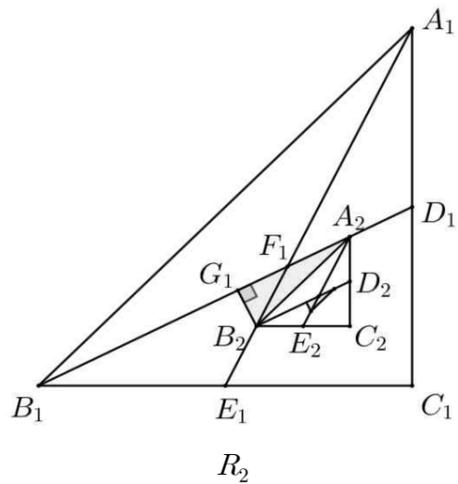
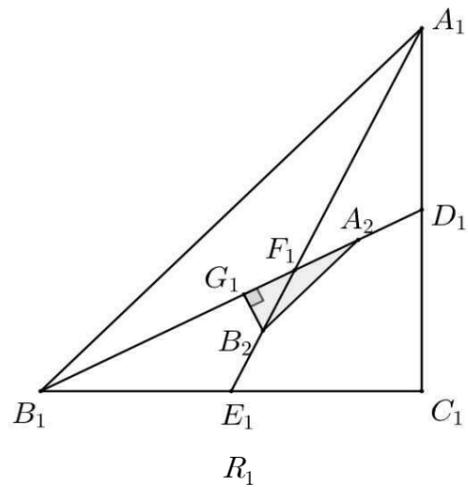
[4점]

- ① 2526                      ② 2626                      ③ 2726  
 ④ 2826                      ⑤ 2926

18. 그림과 같이  $\overline{A_1C_1} = \overline{B_1C_1} = 2$ 인 직각이등변삼각형  $A_1B_1C_1$ 가 있다.  $A_1C_1$ 의 중점을  $D_1$ ,  $B_1C_1$ 의 중점을  $E_1$ 이라 하고  $A_1E_1$ 과  $B_1D_1$ 의 교점을  $F_1$ 이라고 하자.  $D_1F_1$ 의 중점을  $A_2$ ,  $E_1F_1$ 의 중점을  $B_2$ 라고 하자.  $B_2$ 에서  $B_1D_1$ 에 내린 수선의 발을  $G_1$ 이라고 했을 때 삼각형  $A_2B_2G_1$ 을 색칠하여 얻은 도형을  $R_1$ 이라고 하자.

$A_1C_1$ 과 평행하면서  $A_2$ 를 지나는 직선과  $B_1C_1$ 과 평행하면서  $B_2$ 를 지나는 직선의 교점을  $C_2$ 라고 하고,  $A_2C_2$ 의 중점을  $D_2$ ,  $B_2C_2$ 의 중점을  $E_2$ 이라 하고  $A_2E_2$ 과  $B_2D_2$ 의 교점을  $F_2$ 이라고 하자.  $D_2F_2$ 의 중점을  $A_3$ ,  $E_2F_2$ 의 중점을  $B_3$ 라고 하자.  $B_3$ 에서  $B_2D_2$ 에 내린 수선의 발을  $G_2$ 이라고 했을 때 삼각형  $A_3B_3G_2$ 을 색칠하여 얻은 도형을  $R_2$ 이라고 하자.

이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



⋮

- ①  $\frac{1}{50}$                       ②  $\frac{1}{25}$                       ③  $\frac{3}{50}$                       ④  $\frac{2}{25}$                       ⑤  $\frac{1}{10}$



21. 자연수로 이루어진 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 조건들이 성립한다.

- (가)  $n \geq 9$ 일 때만  $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이다.
- (나) 임의의 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{a_n} = n$ 이다.
- (다)  $a_{(a_n)^2} \neq n^2$ 을 만족시키는  $n$ 은  $\alpha, \beta, \gamma$ 이다.

이 때,  $\alpha\beta\gamma + \sum_{k=1}^5 a_k$ 의 값을 구하시오. (단,  $\alpha, \beta, \gamma$ 은 서로 다른 자연수이다.) [4점]

- ① 42      ② 44      ③ 46      ④ 48      ⑤ 50

단답형

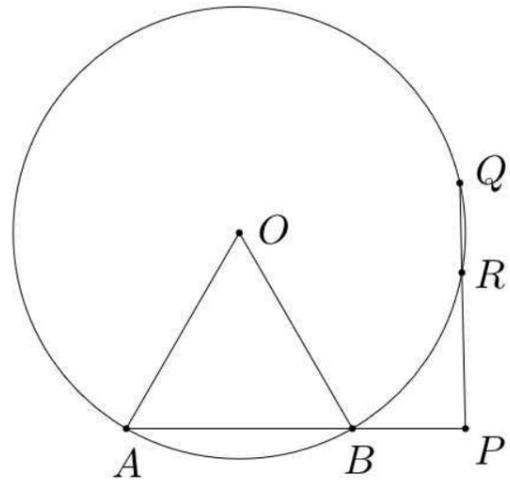
22. 상수  $a, b$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x-a)}{x^2-9} = b$ 일 때,  $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하시오. [3점]

23.  $\left(x^8 + 3x^6 + 3x + \frac{1}{x}\right)^5$ 의  $x$ 의 계수를 구하시오. [3점]

24. 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_1 = 54$ 이고,  $n \geq 4$ 일 때,  $a_n \leq 6$ 이다. 공비의 최솟값을  $m$ 이라고 할 때,  $\frac{1}{m^6}$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 정규분포  $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가  $n$ 인 표본을 임의추출하여 신뢰도  $\alpha\%$ 로 모평균을 추정할 때, 표본평균이  $\bar{x}_1$ , 신뢰구간이  $2a \leq m \leq b$ 이다. 이후에 같은 모집단에서 크기가  $4n$ 인 표본을 임의추출하여 신뢰도  $\alpha\%$ 로 모평균을 추정할 때, 표본평균이  $\bar{x}_2$ , 신뢰구간이  $b \leq m \leq 75 - a$ 이다. 이 때,  $\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + 3b$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 반지름이 20인 원 C의 중심이 O이고 점 A와 B가 원 C 위에 있으며 삼각형 OAB는 정삼각형이다. 직선 AB위에 점 P가 있고  $\overline{BP} = 10$ 이다. 원 위의 점 Q에 대하여 직선 PQ와 원 C의 교점을 R이라고 하자. 이 때,  $\overline{PR} : \overline{RQ} = 3 : 1$ 이다. 사각형 OAPQ의 넓이를  $a\sqrt{3} + b\sqrt{7}$ 이라고 할 때,  $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, 점 P는 원 밖에 있고, 점 Q는 점  $\overline{PQ} > \overline{PR}$ 이며,  $a$ 와  $b$ 는 유리수이다.) [4점]

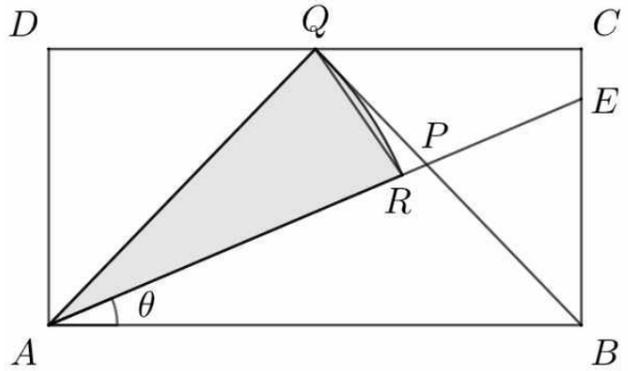


27.  $y = \log_a x$  위에 있는 점 A, B가 각각 제 4사분면, 제 1사분면에 있다. 점 O, A, B를 지나는 원 C가  $x$ 축과 만나는 점 중 O가 아닌 점을 D라고 할 때, 다음 조건들이 성립한다.

- (가) 원 C는  $y$ 축과 접한다.
- (나)  $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$

삼각형 OAB의 넓이가  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 일 때,  $a^2$ 의 값을 구하시오. (단 점 O는 원점이고,  $a > 1$ 이다.) [4점]

28.  $\overline{AB} = 2$ 이고,  $\overline{BC} = \tan 2\theta$ 인 직사각형 ABCD가 있다.  $\angle EAB = \theta$ 이고 점 P는 선분 AE를  $\tan 2\theta : \tan \theta$ 로 내분하는 점이다. 직선 BP와 DC의 교점을 Q라고 하고 선분 AE 위의 점 R에 대하여  $\overline{AQ} = \overline{AR}$ 이다. 부채꼴 AQR의 넓이를  $f(\theta)$ ,  $\overline{RQ} = g(\theta)$ ,  $\overline{QP} = h(\theta)$ 라고 할 때,  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)h(\theta)}{g(\theta)} = \frac{p}{q}$ 이다.  $p+q$ 의 값은? (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로 소이고,  $0 < \theta < \frac{\pi}{8}$ 이다.) [4점]



29. 계수가 모두 정수인 3차함수  $f(x)$ 에 대하여 다음 조건을 만족한다.

임의의 0이상의 정수  $n$ 에 대하여  $f^{(n)}(0) + n \geq 0$  이 성립한다.

$f(k) = 15$ 이 되는 함수  $f(x)$ 의 경우의 수를  $a_k$ 라고 할 때,

$\sum_{k=1}^5 a_k$ 의 값을 구하시오.

(단,  $f^{(0)}(x) = f(x)$ 이고,  $f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n)}(x)$ 이다.) [4점]

30.  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 이고  $a^2 \leq 3b + 9$ 이다.

$0 \leq t \leq 2$ 에서 정의되는 연속함수  $g(t), h(t)$ 에 대하여  $0 < t < 2$ 에서 다음 조건들이 성립한다.

(가)  $f(t) = f(g(t)) = f(h(t))$   
 (나)  $g(t) < t < h(t)$

$x = 5t - 4g(t), y = f(t)$ 를 매개변수로 하는  $(x, y)$ 곡선과,  
 $x = 4h(t) - 3t, y = f(t)$ 를 매개변수로 하는  $(x, y)$ 곡선과,  
 $0 \leq x \leq 2$ 에서의  $f(x)$ 곡선으로 이루어진 도형의 넓이를 구하시오. [4점]

\* 확인 사항  
 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.



※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.