

1. 음함수 미분? 편미분!

* 문제 미리보기

이번 부분은 자작문제가 필요 없다고 생각합니다.

기출문제만 수록하도록 하겠습니다.

7. 곡선 $e^x - xe^y = y$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기는?

[3점]

- ① $3-e$ ② $2-e$ ③ $1-e$ ④ $-e$ ⑤ $-1-e$

➤2019 수능 가형 7번 문제

11. 곡선 $e^y \ln x = 2y + 1$ 위의 점 $(e, 0)$ 에서의 접선의 방정식을

$y = ax + b$ 라 할 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① $-2e$ ② $-e$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{e}$ ⑤ $-\frac{1}{e}$

➤2019 9월 가형 7번 문제

9. 곡선 $e^x - e^y = y$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 1일 때,

$a+b$ 의 값은? [3점]

- ① $1 + \ln(e+1)$ ② $2 + \ln(e^2+2)$ ③ $3 + \ln(e^3+3)$
④ $4 + \ln(e^4+4)$ ⑤ $5 + \ln(e^5+5)$

➤2019 6월 가형 9번 문제

제 책 내용 대부분이 그렇지만, 이번 단원의 내용을 꼭 알아야 수능 문제들을 풀 수 있는 것은 아닙니다.

하지만 이 방법을 쓰게 되면 간단하고 빠르게 계산이 가능하기 때문에 계산 실수 등이 적어지는 게 아주 큰 장점이라서 소개를 하려고 합니다.

이번 단원에서 소개할 것은 음함수 미분 문제를 대학에서 쓰는 편미분이라는 방법을 통해서 계산을 단축하는 기술입니다.

편미분에 대해서 먼저 이야기해 보겠습니다. 어떤 문자 x 에 대해서 편미분을 한다는 것은 x 를 제외한 다른 모든 변수들을 상수 취급한 채로 x 에 대해서만 미분을 한다는 겁니다. 기호로는 $\frac{\delta}{\delta x}f(x,y)$ 로 표현할 수 있습니다.

백문이 불여일견이므로 예시를 들어 드리겠습니다.

$f(x,y) = x^2y + 1$ 이면 $\frac{\delta}{\delta x}f(x,y) = 2xy$ 입니다. x 에 대해서만 미분한 형태임을 알 수 있습니다.

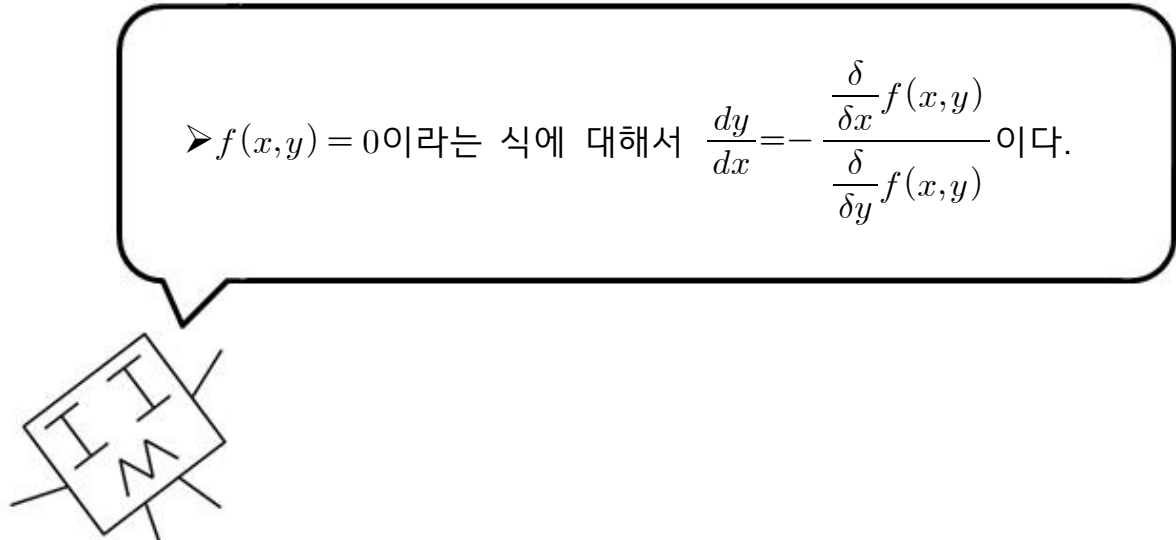
하나 더

$f(x,y) = x^3y^2 + xy + 2x + 1$ 이면 $\frac{\delta}{\delta x}f(x,y) = 3x^2y^2 + y + 2$ 입니다.

y 에 대해서도 편미분할 수 있습니다.

$f(x,y) = x^3y^2 + xy + 2x + 1$ 이면 $\frac{\delta}{\delta y}f(x,y) = 2x^3y + x$ 입니다.

편미분의 개념을 알게 되었으니, 편미분을 통해 음함수 미분을 표현해 보겠습니다.
공식 보여드립니다.



➤ $f(x,y) = 0$ 이라는 식에 대해서 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta}{\delta x}f(x,y)}{\frac{\delta}{\delta y}f(x,y)}$ 이다.

형태상으로 복잡해 보이지만 실제로는 간단합니다.

문제 미리보기에 나온 문제들을 풀어보도록 하겠습니다.

7. 곡선 $e^x - xe^y = y$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기는?

[3점]

- ① $3-e$ ② $2-e$ ③ $1-e$ ④ $-e$ ⑤ $-1-e$

이 문제에서 $f(x, y) = 0$ 의 형태로 바꾸면 $e^x - xe^y - y = 0$ 입니다.

$$\text{즉 } f(x, y) = e^x - xe^y - y \text{이므로 } \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\delta}{\delta x} f(x, y)}{\frac{\delta}{\delta y} f(x, y)} = - \frac{e^x - e^y}{-xe^y - 1} = \frac{e^x - e^y}{xe^y + 1} \text{입니다.}$$

0,1을 대입하면 답은 4번임을 알 수 있습니다.

11. 곡선 $e^y \ln x = 2y + 1$ 위의 점 $(e, 0)$ 에서의 접선의 방정식을

$y = ax + b$ 라 할 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① $-2e$ ② $-e$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{e}$ ⑤ $-\frac{1}{e}$

저는 이 문제 현장에서 응시할 때 모양 보고 순간 '아 극혐 자연로그 씹어야지'라는 생각이 바로 나서 자연로그 씹워서 정리했습니다.

그러면 $f(x, y) = y + \ln(\ln x) - \ln(2y + 1)$ 가 되므로

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\delta}{\delta x} f(x, y)}{\frac{\delta}{\delta y} f(x, y)} = - \frac{\frac{1}{x \ln x}}{1 - \frac{2}{2y + 1}} \text{이므로 여기에 바로 } e, 0 \text{을 대입해주면 기울기가 } \frac{1}{e} \text{임}$$

을 알 수 있습니다. 후속 계산은 생략하고 답은 5입니다.

9. 곡선 $e^x - e^y = y$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 1일 때,

$a+b$ 의 값은? [3점]

- ① $1 + \ln(e+1)$ ② $2 + \ln(e^2+2)$ ③ $3 + \ln(e^3+3)$
④ $4 + \ln(e^4+4)$ ⑤ $5 + \ln(e^5+5)$

$$f(x, y) = e^x - e^y - y \text{이므로 } \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\delta}{\delta x} f(x, y)}{\frac{\delta}{\delta y} f(x, y)} = - \frac{e^x}{-e^y - 1} = \frac{e^x}{e^y + 1} \text{이며 따라서}$$

$$\frac{e^x}{e^y + 1} = 1 \text{이고 } e^x - e^y = 1 \text{이므로 } y=1, x=\ln(e+1) \text{이므로 답은 1번입니다.}$$

직접 해보시면 빠르다는 게 체감될 겁니다.

물론 체화를 위해서는 노력이 약간 필요하지만 제가 소개할 기술들 중에서는 그나마 체화가 쉬운 기술입니다.

자 아래 문제 2개로 연습해봅시다!

24. 곡선 $2x + x^2y - y^3 = 2$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의

기울기를 구하시오. [3점]

➤2018 수능 가형 24번 문제

24. 곡선 $5x + xy + y^2 = 5$ 위의 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의

기울기를 구하시오. [3점]

➤2018 9월 가형 24번 문제

다음 챕터로 넘어가겠습니다.

2. 미분방정식

* 문제 미리보기

21. $\frac{3}{5} < x < 4$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=2$ 이고

$$f'(x) = \frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

$$\neg. g'(2) = -\frac{4}{7}$$

$$\neg. g(x) = \frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 - \frac{5}{3}$$

$$\neg. 2 < g(1) < \frac{5}{2}$$

① $\neg$

② $\neg, \neg$

③ $\neg, \neg$

④ $\neg, \neg$

⑤ $\neg, \neg, \neg$

➤2018 4월 가형 21번 문제

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \leq b$ 일 때, $f(x) = a(x-b)^2 + c$ 이다. (단, a, b, c 는 상수이다.)

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)} dt$ 이다.

$$\int_0^6 f(x) dx = \frac{q}{p} \text{ 일 때, } p+q \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

➤2016 수능 B형 30번 문제

이번 단원에서는 미분방정식으로 풀 수 있는 문제들을 다뤄 보겠습니다.

2019 수능 21번도 간단한 형태의 미분방정식 문제인데 난이도가 비킬러급으로 매우 쉽게 출제되었습니다.

이 문제입니다.

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$ 의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$2\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1) \text{이다.}$$

(나) $f\left(-\frac{1}{8}\right) = 1, f(6) = 2$

- ① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}$

(가)에서 주어진 것이 미분방정식입니다. 양변 적분하고 싶게 생겼습니다.

저런 미분방정식은 너무 풀기가 쉽습니다. 출제 의도가 명백히 드러나기 때문입니다.

미분방정식은 간단히 말하자면 $x, f(x), f'(x), f''(x) \dots$ 등으로 이루어진 방정식입니다. 사전상의 정의로는 좀 더 복잡하지만 수능 및 기출문제에서 나오는 문제들은 이 정도로만 정의를 이해해도 문제없습니다.

여기 간단한 미분방정식들 보여드립니다.

- ① $f'(x) = 3$ ② $f'(x) = 3f(x)$ ③ $f'(x) = 3(f(x))^2$

3개 다 비슷한 형태를 띠고 있습니다.

한 번 풀어보겠습니다.

① 쉽습니다. 양변 적분하면 $f(x) = 3x + C$ (단, C 는 적분상수)입니다.

② 비슷한 다른 예시를 들어 보겠습니다. $f'(x) = f(x)$ 라는 식이 있다고 칩시다. 미분해도 같은 꼴이 나오므로 $f(x) = ke^x$ 일거라는 예상이 가능합니다. 실제로도 $f'(x) = f(x)$ 를 만족하는 모든 $f(x)$ 는 $f(x) = ke^x$ 꼴입니다.

$f'(x) = 3f(x)$ 의 $f(x)$ 을 구해보겠습니다. 식을 변형하면 $\frac{f'(x)}{f(x)} = 3$ 으로 나타낼 수가 있습니다. 그런데 여기서 $\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$ 이므로 $(\ln f(x))' = 3$ 입니다.

따라서 ①에 의해서 $\ln f(x) = 3x + C$ 입니다. 즉 $f(x) = e^{3x+C}$ 입니다.

③ 이것도 비슷하게 변형하면 풀립니다. $-\frac{f'(x)}{(f(x))^2} = -3$ 로 변형하면 $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -3$ 임을

알 수 있고 따라서 $f(x) = \frac{1}{-3x+C}$ 입니다.

이런 게 바로 미분방정식입니다.

사실 고교 과정에서 미분방정식을 정식으로 배우는 것이 아니기에 직접적으로 미분방정식과 관련된 문제를 내려면 저 위의 문제처럼 내놓고 묻는 바를 드러내거나 미분방정식 풀이가 아닌 다른 풀이가 존재하는 경우가 대부분입니다.

하지만 미분방정식 풀이가 재미도 있고, 재미도 있고. 재미도 있고.....

재미만 있는 것 같습니다. 숙련되지 않는다면 정석적으로 하시는 게 나을 수도 있습니다.

21. $\frac{3}{5} < x < 4$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=2$ 이고

$$f'(x) = \frac{1 - x^2 \{f(x)\}^3}{x^3 \{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $g'(2) = -\frac{4}{7}$

ㄴ. $g(x) = \frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 - \frac{5}{3}$

ㄷ. $2 < g(1) < \frac{5}{2}$

- ① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f(x)$ 를 구해 봅시다.

양변을 변형하면 $x^3(f(x))^2 f'(x) + x^2(f(x))^3 = 1$ 입니다.

양변에 3을 곱하면 $3x^3(f(x))^2 f'(x) + 3x^2(f(x))^3 = 3$ 입니다. 이제 좌변 우변을 적분해 버리면 $x^3(f(x))^3 = 3x + C$ 의 형태가 됩니다. 물론 C는 적분상수입니다.

$f(1) = 2$ 니까 $C = 5$ 입니다. 따라서 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x+5}}{x}$ 임을 알 수 있습니다.

보기의 선지를 확인하자 $g(x)$ 에 대해 다루고 있으므로 $x^3(f(x))^3 = 3x + 5$ 라는 식에서 x를 $g(x)$ 로 치환하여 정리합시다.

$x^3(g(x))^3 = 3g(x) + 5$ 가 되고, 적당히 변형하면 ㄴ 선지에 나온 식이 됩니다.

따라서 ㄴ은 옳은 선지임을 알 수 있습니다!

나머지 선지는 어렵지 않으므로 스스로 해결해 주시기 바랍니다. 귀찮아서 그렇습니다.

ㄱ은 식에 대입하면 나올 것이고 ㄷ은 사이값 정리 쓰면 됩니다.

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \leq b$ 일 때, $f(x) = a(x-b)^2 + c$ 이다. (단, a, b, c 는 상수이다.)

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)} dt$ 이다.

$\int_0^6 f(x) dx = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

이 문제도 풀어보겠습니다.

(나) 조건을 정리합시다. 양변 미분하면 $f'(x) = \sqrt{4-2f(x)}$ 이므로 $f(x) = 2$ 이거나 $\frac{f'(x)}{\sqrt{4-2f(x)}} = 1$ 임을 알 수 있습니다.

이 상태에서 잘 만져주면 $\frac{-2f'(x)}{2\sqrt{4-2f(x)}} = -1$ 입니다. 이렇게 한 이유는 $(\sqrt{4-2f(x)})' = \frac{-2f'(x)}{2\sqrt{4-2f(x)}}$ 이기 때문입니다.

이렇게 양변 적분 가능하게 만든 후 적분하면 $\sqrt{4-2f(x)} = -x + C$ 가 됩니다.

또한 $f(0) = 0$ 임을 (나) 조건에서 확인할 수 있습니다. 따라서 $C = 2$ 입니다.

즉 $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$ 이거나 $f(x) = 2$ 임이 나왔습니다. $f'(x) = \sqrt{4-2f(x)}$ 이므로 $f'(x)$ 는 언제나 양수거나 0입니다.

따라서 $x \leq 2$ 일 때 $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$ 이고 $x > 2$ 일 때 $f(x) = 2$ 입니다. $x > 2$ 일

때 $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$ 일 수 없는 이유는 $f'(x)$ 가 0 이상이기 때문입니다.

전체 그래프가 구해졌으니 적분해서 푸시면 됩니다.

미분방정식이 교육과정에 있진 않지만, 그 개념이 들어간 문제들은 정말 많습니다!

교육과정에 나온 방식대로 풀어도 문제없지만, 미분방정식 풀이도 알아두면 유용할 수 있습니다.

다음 쪽에 있는 문제들로 연습해 봅시다!

(참고로 연습용 문제라서 제 자작문제는 조금 괴상망측한 면이 있습니다)

정의역이 $x > 0$ 인 미분 가능한 함수 $y = f(x)$ 의 점 $P(t, f(t))$ 에서 접하는 접선이 있다. 그 접선의 y절편이 $t \cos(\ln t)$ 으로 표현된다. $y = f(x)$ 는 $(e^\pi, 0)$ 을 지난다. 이때 $f(x)$ 를 구하시오.

➤테플로탁슬 자작문제

모든 실수에서 정의된 미분 가능한 함수 $y = f(x)$ 는 다음 조건을 만족한다.

(가) $2f'(x) = f(x) - \frac{2}{f(x)}$

(나) $f(2) = \sqrt{3}$

이때 $f(x)$ 를 구하시오.

➤테플로탁슬 자작문제(교육청 기출 변형)

다음 챕터로 넘어갑니다.

3. 함수방정식

*문제 미리보기

26. 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x, y 에 대하여

$$f(x+y) = f(x)f(y) + 4f(x) + 4f(y) + 12$$

(나) $f(\ln 2) = 0$, $f'(0) = 2$

이때, $f'(\ln 2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

➤ 2011년 3월 수학 가형 26번

사실 저는 함수방정식이 수능에 나올 수 있을까 상상해 본 적 있고 관련 칼럼을 써서 오르비에 올린 적이 있습니다.

그런데 상상이 현실이 되었습니다... ~~상상 모의고사 풀러갑...~~

함수 방정식 정리

• $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 이면 $f(x) = kx$

• $f(xy) = f(x) + f(y)$ 이면 $f(x) = \log_a x$

• $f(x+y) = f(x)f(y)$ 이면 $f(x) = a^x$

• $f(xy) = f(x)f(y)$ 이면 $f(x) = x^n$

• $f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$ 이면 $f(x) = \frac{k}{x}$

• $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2\sqrt{f(x)f(y)}$ 이면 $f(x) = ax^2$

• $(f(x))^2 + (f(y))^2 = \{f(x+y)\}^2$ 이면 $f(x) = a\sqrt{x}$

• $f(x+y) = f(x) + f(y) + kxy$ 이면 $f(x) = ax^2 + bx$

• $f(x-y) + f(x+y) = 2f(x)$ 이면 $f(x) = ax + b$

• $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ 이면 $f(x) = ax + b$

제가 예전에 정리해 둔 대표적인 함수방정식들입니다. 읽어보시고 왜 그럴까 이해해보려고 하면 좋겠습니다.

이제 첫 번째 문제를 풀어보겠습니다.

26 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x, y 에 대하여

$$f(x+y) = f(x)f(y) + 4f(x) + 4f(y) + 12$$

(나) $f(\ln 2) = 0$, $f'(0) = 2$

이때, $f'(\ln 2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

(가)에 양변에 4를 더하고 정리하면 $f(x+y)+4 = (f(x)+4)(f(y)+4)$ 임을 알 수 있습니다. $f(x)+4 = g(x)$ 로 치환하면 $g(x+y) = g(x)g(y)$ 입니다. 위에 함수방정식들 정리 해놓은 것을 참고하면 $g(x)$ 는 지수함수임을 알 수 있습니다. 이때 $f(x) = g(x) - 4 = a^x - 4$ 이므로 $f(\ln 2) = 0$ 에서 $a = e^2$ 임을 알 수 있고 따라서 $f(x) = e^{2x} - 4$ 입니다. 왜 (나)에 조건이 두 개나 있을까요? 저는 모르겠습니다. 나머지는 단순계산이므로 생략합니다.

아래에 있는 문제가 제가 직접 현장응시하며 풀은 문제입니다.

대입만 잘 해서 정리하면 되는 쉬운 문제입니다.

16. $x > 0$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 모든 양수 x 에 대하여

$$2f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{2}$ ② $\frac{2\ln 2}{3} + \frac{1}{2}$ ③ $\frac{\ln 2}{3} + 1$
 ④ $\frac{2\ln 2}{3} + 1$ ⑤ $\frac{2\ln 2}{3} + \frac{3}{2}$

➤2019학년도 수능 수학 가형 16번

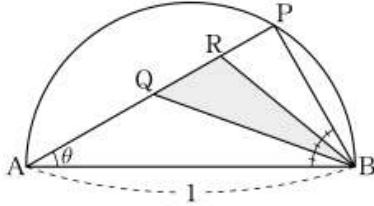
다음 챕터로 넘어갑니다.

6. 삼각함수 극한 박살내기 기본편

*문제 미리보기

19. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 $\angle ABP$ 를 삼등분하는 두 직선이 선분 AP와 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. $\angle PAB = \theta$ 일 때, 삼각형 BRQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

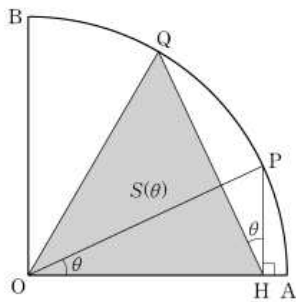
➤ 2018년도 3월 19번 문제

16. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인

부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, 호 BP 위에 점 Q를 $\angle POH = \angle PHQ$ 가 되도록 잡는다. $\angle POH = \theta$ 일 때,

삼각형 OHQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [4점]



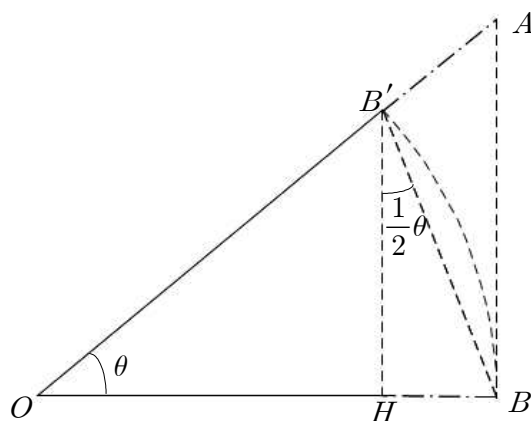
- ① $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$
 ④ $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$

➤ 2019년도 6월 16번 문제

제가 수학 모의고사를 풀 때 13번까지 푼 후 삼각함수 극한 문제를 찾아서 먼저 푼다. 저한테는 거의 모든 삼각함수 극한 문제가 정말 쉽게 느껴지기 때문입니다.

제가 이번 챕터에서 쓸 내용은 '삼각함수 극한 직관으로 훑어보기'입니다. 남휘종 선생님이 이거로 유명하죠. 알아두면 너무나도 유용한 스킬입니다.

일단 기본적인 근사부터 알아보겠습니다.



θ 가 0에 가까워질 때 기준으로

..... 이런 점선으로 표현된 선들은 모두 길이가 $\overline{OB}\theta$ 로 수렴하게 됩니다.

..... 이런 모양으로 표현된 선들은 모두 길이가 $\frac{1}{2}\overline{OB}\theta^2$ 로 수렴하게 됩니다.

물론 이것들은 근사이기 때문에 아주 정확하지는 않지만 최근 기출 문제들 수준으로는 이것들로 충분합니다.

애초에 삼각함수 극한 문제를 직관적으로 빨리 푸는 법을 알려드리고 있기 때문에 여기서는 엄밀하지 않더라도 대충 넘어가는 마인드(?)를 가지고 하는 것이 좋겠습니다.

직관, 야매가 원래 그렇고 그런 것입니다.

다시 한눈에 보기 좋게 정리하자면 θ 가 0에 가까워질 때

$$\textcircled{1} \overline{AB} \asymp \overline{B'B} \asymp \overline{B'H} \asymp \widehat{B'B} = \overline{OB}\theta$$

$$\textcircled{2} \overline{B'A} \asymp \overline{HB} \asymp \frac{1}{2}\overline{OB}\theta^2$$

이라는 것을 알 수 있습니다.

이 사실만 숙지하셔도 절반 넘게 깨우친 겁니다.

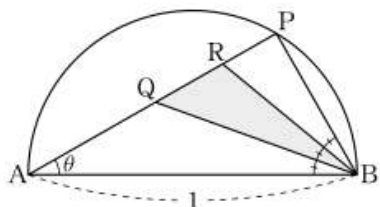
위 내용이 성립하는 이유에 대해 살짝 힌트를 드리자면 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$ 이기 때문입니다. 위 내용들을 스스로 증명하시면 재밌을 겁니다. 아님 말고요.

$\sin \theta \asymp \theta$ 라는 아이디어를 사용하시면 증명할 수 있습니다.

자 이제부터 유연한 생각을 가지고 문제를 풀어보도록 하겠습니다.

19. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 $\angle ABP$ 를 삼등분하는 두 직선이 선분 AP와 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. $\angle PAB = \theta$ 일 때, 삼각형 BRQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

이 문제는 근사만 잘하시면 암산으로 40초 컷이 가능합니다.

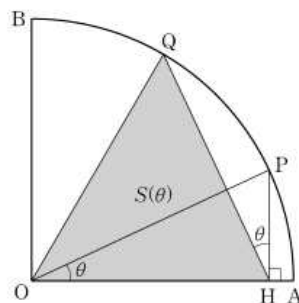
다시 한 번 말하지만 유연한 생각을 가집시다.

θ 가 0에 가까워지므로 $\angle ABP$ 는 90도에 가까워지며, $\angle QBP$ 는 60도에 가까워집니다. 제가 위에서 다룬 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$ 에 유념하시면 $\overline{PB} = \sin \theta \approx \theta$ 임을 알 수 있습니다. 따라서 삼각비를 활용하면 $\overline{PQ} \approx \sqrt{3} \theta$ 입니다. 또 $\angle RBP$ 가 30도에 가까워지는 것을 주목하면 역시 삼각비에 의해 $\overline{PR} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \theta$ 임을 알 수 있습니다. 따라서 $\overline{RQ} \approx \frac{2\sqrt{3}}{3} \theta, \overline{PB} \approx \theta$ 이므로 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \theta \cdot \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \theta^2$ 임을 알 수 있고, 답은 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \theta^2}{\theta^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 임을 알 수 있습니다.

1문제 더 풀어보겠습니다.

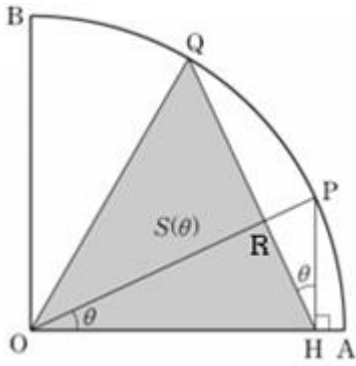
16. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, 호 BP 위에 점 Q를 $\angle POH = \angle PHQ$ 가 되도록 잡는다. $\angle POH = \theta$ 일 때, 삼각형 OHQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$) [4점]



- ① $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$

위 문제에서 보셨듯이 처음부터 삼각함수를 θ 로 표현하면서 푸는 것이 포인트입니다. 그러면 보시다시피 계산이 줄어들고 깔끔해집니다.



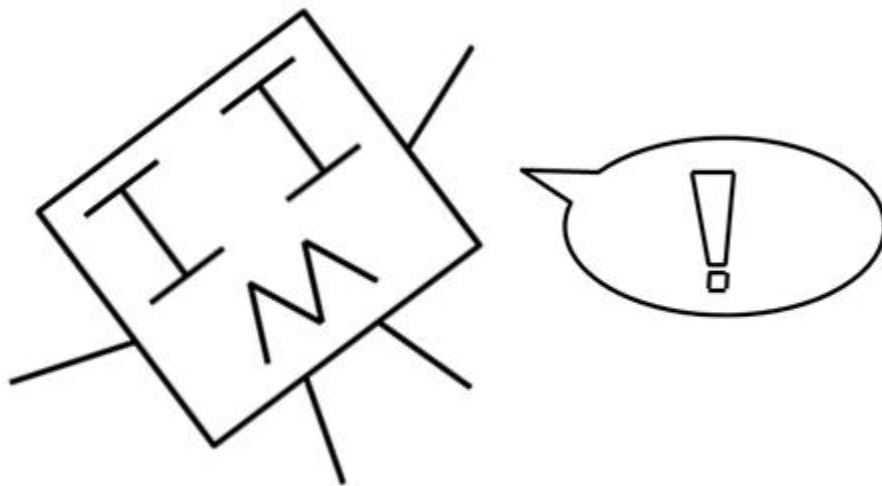
그림처럼 점 R을 표시해 줍시다. 그러면 $\angle ORH$ 가 90도라는 것을 주목할 수 있을 텐데 제가 위에서 소개한 기본적인 근사 방법에 따르면 $\overline{RP} \approx \frac{1}{2}(\angle ROQ)^2$ 임을 알 수 있습니다. ($\overline{B'A} \approx \overline{HB} \approx \frac{1}{2}\overline{OB} \theta^2$ 공식)

그런데 $\overline{RP} = \overline{OH} \sin^2 \theta \approx \theta^2$ 임을 알 수 있습니다.

따라서 $\theta^2 \approx \frac{1}{2}(\angle ORQ)^2$ 이므로 $\angle ORQ \approx \sqrt{2}\theta$ 입니다.

이제 선분 OH를 밑변으로 생각하고 넓이를 계산하시면 답이 ①임을 알 수 있습니다.

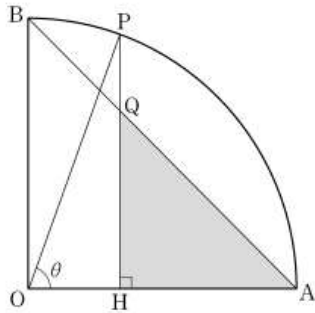
이번에는 기본적인 것만 다뤘고 다음 chapter들에서 본격적인 직관 및 방법론을 좀 해보겠습니다.



14. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인

부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle POH = \theta$ 일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

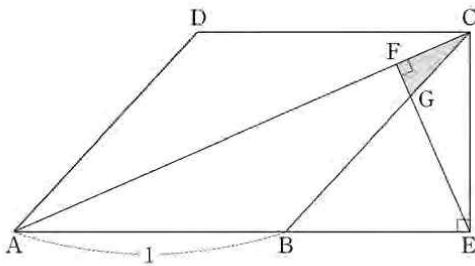
➤2017학년도 수능 14번 문제

+ 이 단원 숙지했으면 이 문제는 10초 만에 푸셔야 합니다!

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD가 있다.

점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F, 선분 EF와 선분 BC의 교점을 G라 하자. $\angle DAB = \theta$ 일 때, 삼각형 CFG의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



- ① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

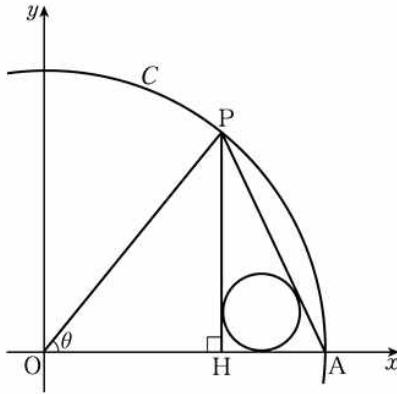
➤2018학년도 수능 17번 문제

다음 챕터로 넘어가겠습니다.

7. 삼각함수 극한 박살내기 심화편

*문제 미리보기

21. 그림과 같이 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 1인 원 C 가 있다. 원 C 가 x 축의 양의 방향과 만나는 점을 A , 원 C 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H , $\angle POA = \theta$ 라 하자. 삼각형 APH 에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{r(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? [4점]



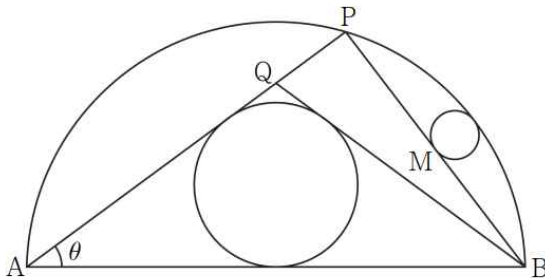
- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

➤ 2016년 3월 21번 문제

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원이 있다.

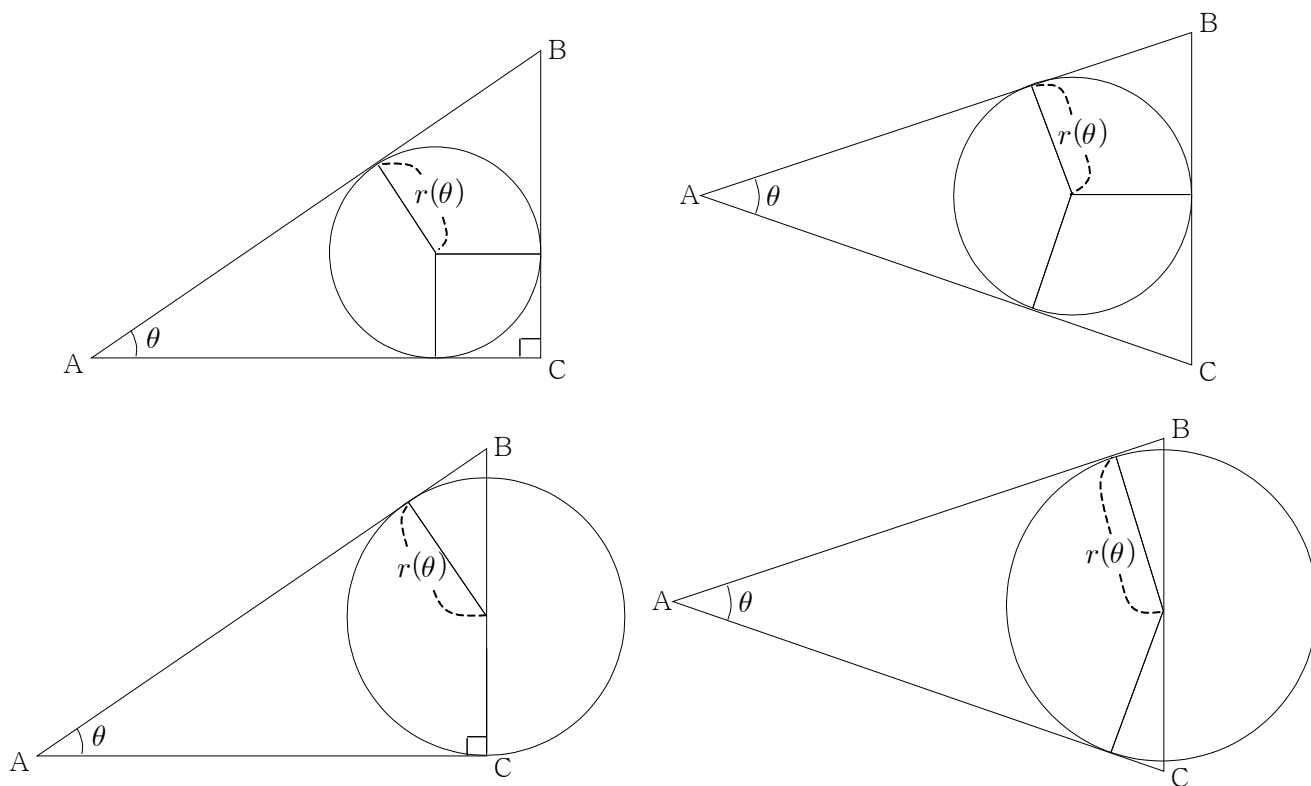
호 AB 위의 한 점 P 에 대하여 $\angle PAB = \theta$ 라 하자. 선분 PB 의 중점 M 에서 선분 PB 에 접하고 호 PB 에 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 AP 위에 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 가 되도록 점 Q 를 잡고 삼각형 ABQ 에 내접하는 원의 넓이를 $T(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta^2 \times T(\theta)}{S(\theta)}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



➤ 2016년 4월 29번 문제

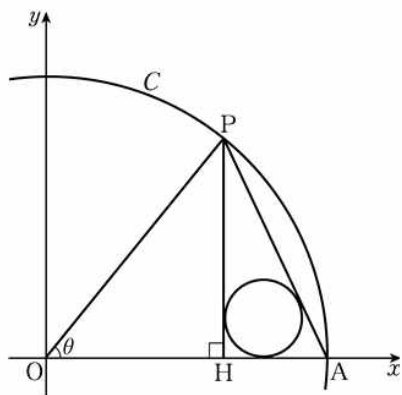
이번에는 삼각함수 극한에서 자주 등장하는 내접원을 다뤄 보도록 하겠습니다.
 다음 그림들 보고 그냥 외우셔도 되고, 이해를 통해 왜 그렇게 되는지 증명해보셔도 됩니다.
 사실 직관적으로 와 닿는 사람은 바로 이해가 되실 겁니다.



왼쪽은 직각삼각형이고, 오른쪽은 이등변삼각형입니다. θ 가 0에 가까워지면 이 모든 도형들에서 $r(\theta) \asymp \frac{1}{2} \overline{BC} \asymp \frac{1}{2} \overline{AB} \theta$ 가 성립합니다.

이 공식이 매우 유용합니다. 직접 문제들을 풀어보도록 하겠습니다.

21. 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 원 C가 x 축의 양의 방향과 만나는 점을 A, 원 C 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H, $\angle POA = \theta$ 라 하자. 삼각형 APH에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{r(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

이거는 반지름의 길이가 선분 HA의 절반이 됨을 알 수 있고 선분 HA는 챕터 5에서 살펴봤듯

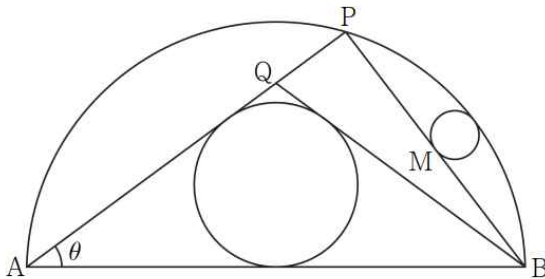
이 $\frac{1}{2}\theta^2$ 입니다. 따라서 반지름의 길이는 $\frac{1}{4}\theta^2$ 이고 따라서 답은 4번입니다.

여담으로 이래서 21번, 29번, 30번으로 삼각함수 극한 문제를 내면 안 됩니다. 저처럼 이런 문제에 능한 사람들은 3점짜리 문제와 비슷한 시간 내에 문제가 풀리기 때문입니다.

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다.

호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle PAB = \theta$ 라 하자. 선분 PB의 중점 M에서 선분 PB에 접하고 호 PB에 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 AP 위에 $AQ = BQ$ 가 되도록 점 Q를 잡고 삼각형 ABQ에 내접하는 원의 넓이를 $T(\theta)$ 라 하자.

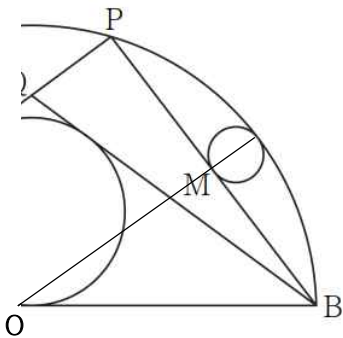
$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta^2 \times T(\theta)}{S(\theta)}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



이 문제도 쉽습니다. 일단 $T(\theta)$ 부터 구할 건데, 이 반원의 중심을 O라고 하면 저 삼각형에 내접한 원의 반지름의 길이는 선분 OQ의 절반입니다. 선분 OQ의 길이는 $AO \tan \theta \doteq \theta$ 이므로 내접 원의 반지름은 $\frac{1}{2}\theta$ 입니다. 왜냐, θ 가 0에 가까워지면 $\tan \theta \doteq \theta$ 입니다.

따라서 $T(\theta) \doteq \frac{1}{4}\theta^2\pi$ 입니다.

$S(\theta)$ 도 구해 줍시다. 보조선을 쓰면 풀립니다.



다음 그림처럼 해줍시다.

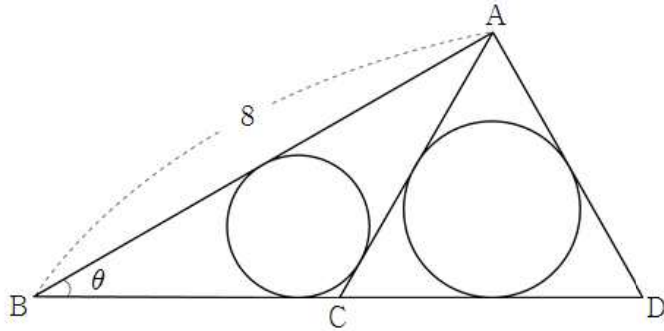
그럼 각 MOB는 θ 임을 알 수 있습니다. 따라서 저 조그만 원의 반지름은 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\theta^2 = \frac{1}{4}\theta^2$ 입니다. 즉 $S(\theta) \doteq \frac{1}{16}\theta^4\pi$ 입니다. 이제 답을 구하면 4임을 알 수 있습니다.

참 쉽죠?

아래쪽에 연습문제들 놔둘 테니 연습하시면 됩니다.

사실 이런 스킬은 연습으로 체화만 하면 매우 사기이기 때문에 열심히 체화하시기 바랍니다.

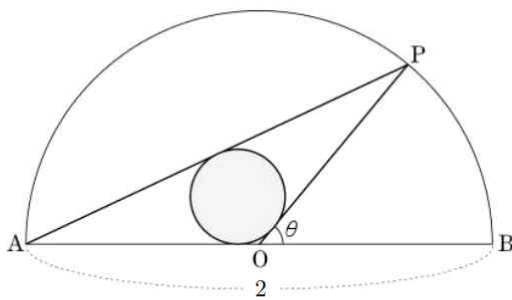
21. $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ABC = \theta$ 인 이등변삼각형 ABC 가 있다. 그림과 같이 선분 BC 의 연장선 위에 $\overline{AC}=\overline{AD}$ 인 점 D 를 잡는다. 삼각형 ABC 에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1 , 삼각형 ACD 에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{r_1 r_2}{\theta^2}$ 의 값은? [4점]



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

➤ 2014년 7월 21번 문제

20. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB 를 지름으로 하고 중심이 O 인 반원이 있다. 호 AB 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\angle POB = \theta$ 일 때, 삼각형 PAO 에 내접하는 원의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{f(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \pi$ 이다.) [4점]



- ① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{8}$ ④ $\frac{\pi}{16}$ ⑤ $\frac{\pi}{32}$

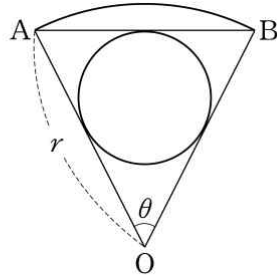
➤ 2013년 3월 20번 문제

다음 챕터로 넘어갑니다.

8. 삼각함수 극한 박살내기 고급편

*문제 미리보기

29. 그림과 같이 중심각의 크기가 θ 이고 반지름의 길이가 r 인 부채꼴 OAB가 있다. 부채꼴의 호 AB의 길이를 l_1 , 삼각형 OAB에 내접하는 원의 둘레의 길이를 l_2 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{l_2}{l_1}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

➤2007학년도 9월 미분과 적분 29번 문제

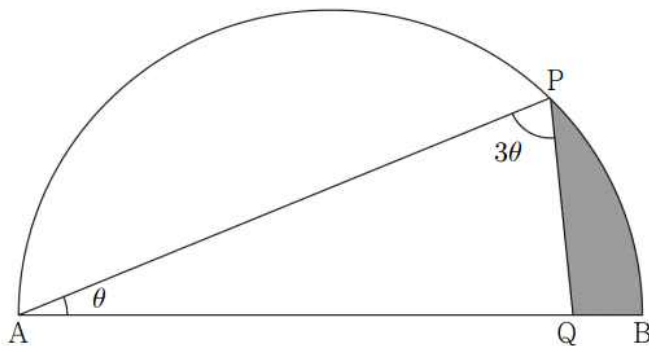
29. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의

호 AB 위에 $\angle PAB = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{6}$)인 점 P가 있다.

$\angle APQ = 3\theta$ 가 되도록 선분 AB 위의 점 Q를 잡을 때,

두 선분 PQ, QB와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$ 라

하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값을 구하시오. [4점]

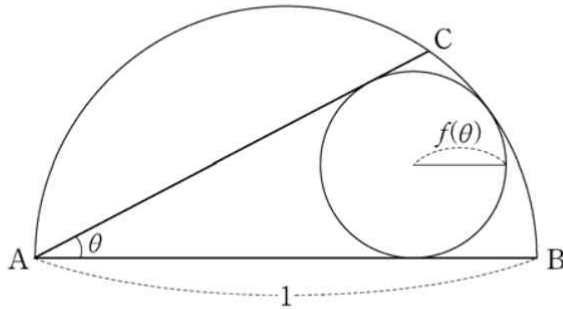


➤2015년 7월 29번 문제

29. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle BAC = \theta$ 라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때,

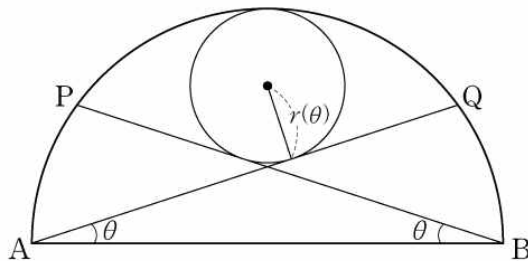
$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\tan \frac{\theta}{2} - f(\theta)}{\theta^2} = \alpha$$

이다. 100α 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



➤2016학년도 6월 29번 문제

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle ABP = \angle BAQ = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)가 되도록 잡는다. 두 선분 AQ, BP와 호 PQ에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta} = p\sqrt{2} + q$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]



➤2013학년도 6월 29번 문제

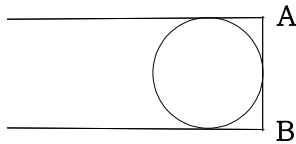
이제는 진짜 직관이 많이 들어갑니다. 다른 말로 엄밀하지 않습니다. 사실 애초에 근사 자체가 엄밀함을 위해서 하는 것은 아니긴 하지만.....

문제 미리보기 첫 번째 문제를 풀어볼 텐데, θ 가 0에 가깝게 그려보겠습니다.



세로로 하면 너무 길어서 옆으로 눕혔습니다. 바늘 아닙니다. 멸치도 아닙니다.

너무 작아서 뭐 할 수가 없으므로 원 그려진 부분만 크게 그려보겠습니다.



이제 좀 나은 것 같습니다. 그런데 원호 AB와 선분 AB가 구분이 안 되는 것 같은데 기분 탓일 겁니다.

게다가 원에 접하는 위아래 선이 평행해 보입니다. AB 길이가 원 지름과 길이가 같을 것 같습니다.

그럼 원 둘레 길이는 AB길이의 π 배이어야 할 것 같습니다.

답은 3번.

방금 문제를 풀이하면서 일부분을 극히 확대하는 방법을 통해 문제를 단순화해서 풀어 보았습니다.

이런 식으로 단순화해서 풀면 다수의 문제가 상당히 간단한 형태로 바뀝니다.

일반적으로 이렇게 바뀝니다.

① 원호 ➤ 직선

② θ 를 사이에 낀 두 직선 ➤ 평행선

위 문제 풀이에서 두 가지 경우 모두 체험해 보셨을 겁니다.

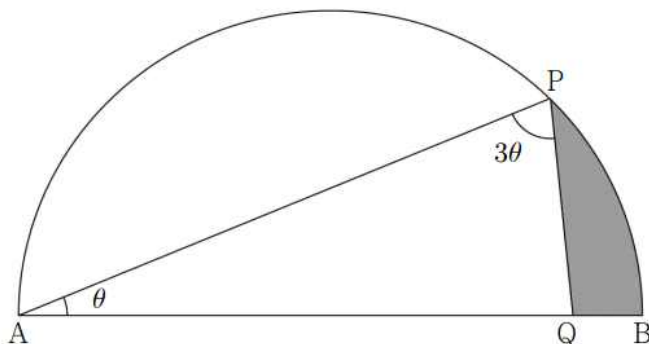
29. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의

호 AB 위에 $\angle PAB = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{6}$)인 점 P가 있다.

$\angle APQ = 3\theta$ 가 되도록 선분 AB 위의 점 Q를 잡을 때,

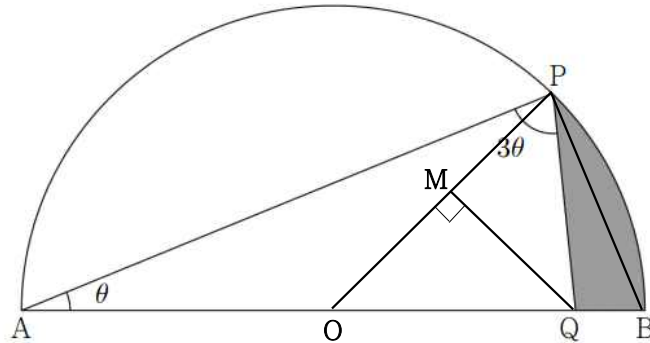
두 선분 PQ, QB와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$ 라

하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값을 구하시오. [4점]



이 문제는 보자마자 '부채꼴에서 삼각형 빼야 하는 건가' 같은데? 라는 생각이 들 것 같습니다. (꽃입니다. 꽃)

하지만 그렇게 안 풀면 됩니다. 보조선을 그어줍니다.



일단 각 POQ가 2θ 임을 알 수 있습니다.

그런데 잘 생각해봅시다. 저 색칠된 면적이 삼각형 PQB와 활꼴 PB의 면적의 합인데, θ 가 0에 가까워지면 활꼴 PB의 넓이는 삼각형 PQB의 넓이에 비해 너무 많이 작아집니다. 그림을 그리면 확인해지는데, 아까 쓴 확대해서 단순화하기를 해보시면 θ 가 0에 가까워질 때 원호 PB와 선분 PB가 구분 못할 정도로 붙어버립니다. 즉 그 사이의 면적은 무시할 정도로 작아진다는 것이고, 따라서 $S(\theta)$ 는 삼각형 PQB의 넓이와 같다고 볼 수 있음을 유추할 수 있습니다.

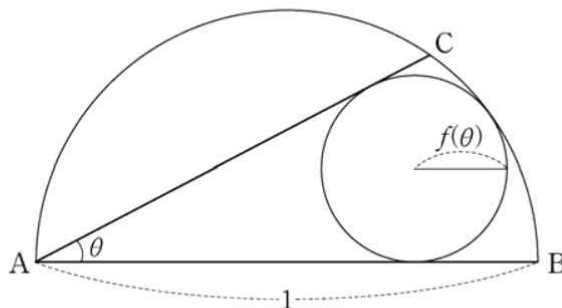
삼각형 PQB의 넓이를 구합시다. 선분 OM의 길이와 OQ의 길이는 θ 가 0에 가까워짐에 따라 같아집니다. 따라서 선분 QB의 길이는 선분 MP의 길이와 가까워집니다. 또한 선분 QB를 밑변으로 두면 삼각형 PQB의 높이는 $\overline{OP} \sin 2\theta \approx 2\theta$ 임을 알 수 있습니다. 따라서 이것 정리해서 삼각형 PQB의 넓이를 구하면 $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\theta = 3\theta$ 임을 알 수 있고 답은 18임을 알 수 있습니다.

삼각함수 극한 직관 뚫기 방법이 역경을 겪을 때가 있는데, 극한으로 보내는 식의 분자 부분에 -가 끼어 있을 경우입니다. 이런 경우는 일반적으로 근사해버리면 문제가 안 풀립니다.

29. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle BAC = \theta$ 라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때,

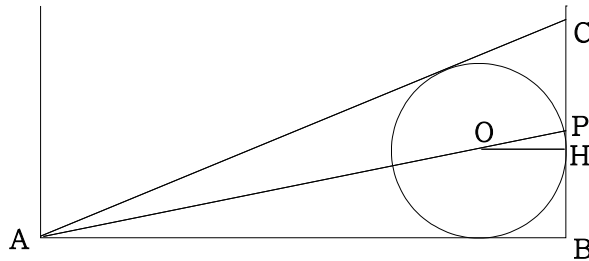
$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\tan \frac{\theta}{2} - f(\theta)}{\theta^2} = \alpha$$

이다. 100α 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



이 문제도 분자에 -가 있어서 일반적인 근사로 $f(\theta)$ 를 구한 후 계산하면 ???라는 기분이 들며 문제가 안 풀릴 겁니다.(직접 해보세요) 그럼 어떻게 해야 하는가. 이건 기하학적인 센스를 발휘해 주셔야 합니다.

일단 확대해서 단순화하기 기술을 써 봅시다. 점 B 부분을 그런 방식으로 단순화하겠습니다. 원호는 직선으로 바뀐다고 제가 위에서 언급했습니다. 거기에다 보조선도 추가로 그리겠습니다.



작은 원의 중심을 O라고 했을 때 AO의 연장선이 원호(이었지만 단순화로 인해 직선이 되어버린) BC와 만나는 점을 P라고 하고, 작은 원이 원호 BC와 만나는 점을 H라고 해줍니다. 그러면 선분 OH는 원호 BC와 수직이므로 위와 같은 그림이 그려집니다.

선분 PB의 길이가 $\tan \frac{\theta}{2}$ 이고 HB의 길이가 $f(\theta)$ 임에 주목하면 PH의 길이는 $\tan \frac{\theta}{2} - f(\theta)$ 와 같습니다. 즉 PH의 길이를 구하면 됩니다.

삼각형 OHP의 형태에 주목하면 각 POH가 θ 이므로 $\overline{OH} \tan \theta$ 입니다. $\overline{OH} \asymp \frac{\theta}{2}$ 이므로 $\overline{OH} \tan \theta \asymp \frac{\theta^2}{2}$ 입니다. 따라서 답은 50임을 알 수 있습니다.

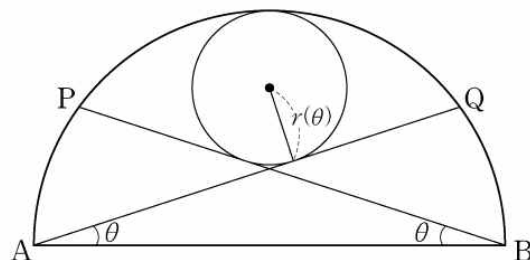
29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원

위에 두 점 P, Q를 $\angle ABP = \angle BAQ = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)가 되도록

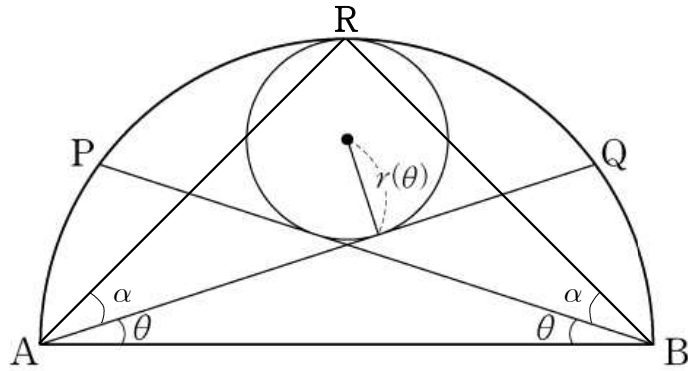
잡는다. 두 선분 AQ, BP와 호 PQ에 내접하는 원의 반지름의

길이를 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta} = p\sqrt{2} + q$ 이다. $p^2 + q^2$ 의

값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]

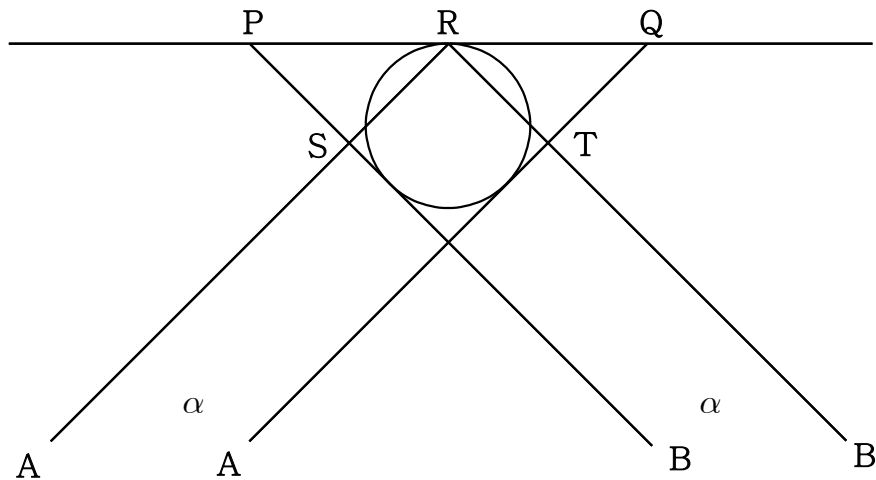


이게 좀 상당합니다. 여러 가지 기술들을 구겨 넣어야 풀리는 문제입니다. 게다가 당황스러운 점은 θ 가 0이 아니라 $\frac{\pi}{4}$ 로 간다는 것입니다. 저희는 0으로 가는 것만 했으니까 이번에는 θ 를 이 용해서 바로 근사하시면 안 됩니다. 보조선을 그어줍니다.



그림처럼 α 을 표현해 주면 $\alpha = \frac{\pi}{4} - \theta$ 입니다. 따라서 $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta} = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{r(\frac{\pi}{4} - \alpha)}{\alpha}$ 로 바꿀 수 있

으므로 저 원의 반지름을 α 로 표현해 주면 됩니다. 여기서 확대해서 단순화하기 기술을 다시 사용해주시면 원호 PQ를 직선 PQ로 바꾸고, 두 쌍의 평행선 BP, BR과 AQ, AR이 생깁니다.



그림처럼 AR과 PB의 교점을 S, AQ와 RB의 교점을 T라고 하면 SR, RT의 길이는 둘 다 $\sqrt{2} \tan \alpha \doteq \sqrt{2} \alpha$ 이어야 합니다. ($\because$ AR, RB의 길이가 $\sqrt{2}$) 따라서 $\triangle PSR, \triangle RTQ$ 가 직각 이등변 삼각형인 것에 주목하면 PQ의 길이는 4α 임을 알 수 있습니다. 따라서 저 내접원은 빗변의 길이가 4α 인 직각 이등변 삼각형에 내접합니다. 따라서 내접원의 반지름은 내접원 반지름 구하는 공식으로 풀어재끼면 $(2\sqrt{2} - 2)\alpha$ 입니다. 따라서 답은 8임을 알 수 있습니다.

지금까지 직관을 이용한 삼각함수 극한 문제의 빠른 풀이 방법을 알아봤습니다.

상상치도 못한 풀이 $\perp (0 \circ 0) \neg$ 들이 나와서 당황을 조금 하셨을 것 같은데 연습하면 익숙해집니다.

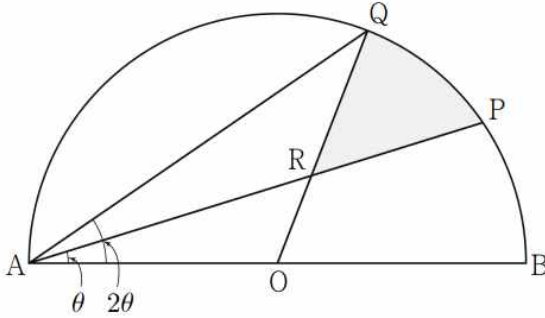
저 위의 풀이를 실제 시험 볼 때 떠올릴 수 있느냐?

는 숙련도에 관련된 문제이고 숙련되면 실제로 시험 보는 와중에도 저렇게 창의적으로 푸는 방법이 떠오릅니다.

그러니 익숙하도록 연습을 하시기 바랍니다.

20. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB = \theta$, $\angle QAB = 2\theta$ 가 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OQ와 선분 AP가 만나는 점을 R라 하자. 호 PQ와 두 선분 QR, RP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

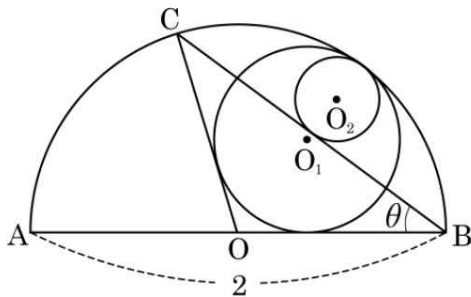
[4점]



- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

➤ 2018년 4월 20번 문제

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점 O와 반원 위를 움직이는 점 C에 대하여 부채꼴 OBC에 내접하는 원을 O_1 , 현 BC와 호 BC로 둘러싸인 부분에 내접하는 원 중 반지름의 길이가 가장 큰 원을 O_2 라 하자. $\angle ABC = \theta$ 라 하고 두 원 O_1, O_2 의 반지름의 길이를 각각 $f(\theta), g(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2} = \frac{q}{p}$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

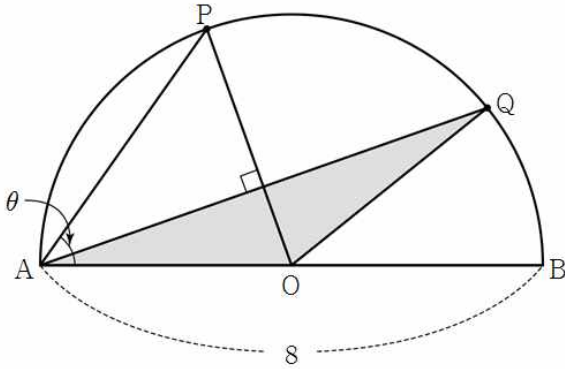


➤ 2011년 3월 27번 문제

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 8인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 P가 있다. 점 A를 지나고 직선 OP에 수직인 직선이 반원과 만나는 점을 Q라 하자.

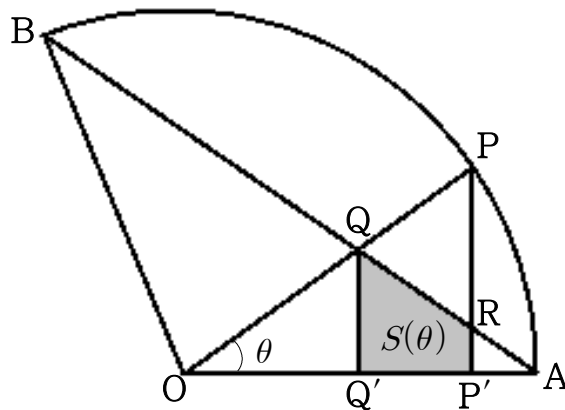
$\angle PAO = \theta$ ($\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$)일 때, 삼각형 AOQ의 넓이를

$S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0} \frac{S(\theta)}{\theta - \frac{\pi}{4}}$ 의 값을 구하시오. [4점]



➤고2 2013년 11월 28번 문제

다음 그림처럼 부채꼴 AOB가 있고, 호 AB 위에 점 P가 있어 각 POA가 θ 이다. 선분 OP와 AB의 교점을 Q라고 하고, P, Q로부터 OA에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라고 하자. 선분 PP'과 AB의 교점을 R이라고 하고 사각형 RP'Q'Q의 넓이를 $S(\theta)$ 라고 하자.



OA의 길이가 6이고, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = 18\sqrt{3}$ 일 때, 삼각형 AOB의 넓이는 얼마인가?

➤테플로탁슬 자작문제

+미리 경고하는데 정석대로 풀면 헬게이트 오픈. 확대하여 단순화하기를 적극적으로 사용 바람

다음 챕터부터는 자질구레한 것들 위주로 할 예정입니다.

9. 이차함수=포물선

이번 챕터는 쉬어가는 단원입니다. 사실 실용성이 좀 적은 부분이라서 그렇습니다.

그래서 문제를 바로 보여드리도록 하겠습니다.

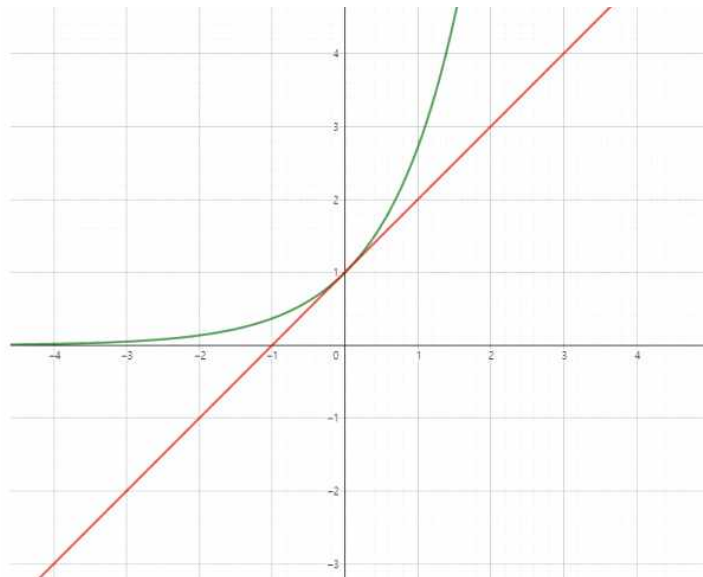
실수 전체의 집합에서 $f(x)$ 는 미분 가능하다.

- (가) $x < 0$ 일 때 $f(x) = e^x$ 이고
 $x \geq 0$ 일 때 $f(x)$ 는 이차함수이다.
(나) $f(x)$ 는 극값을 가지고 그때의 x 값을 α 라 할 때
 $f(\alpha) = 2$ 이다.

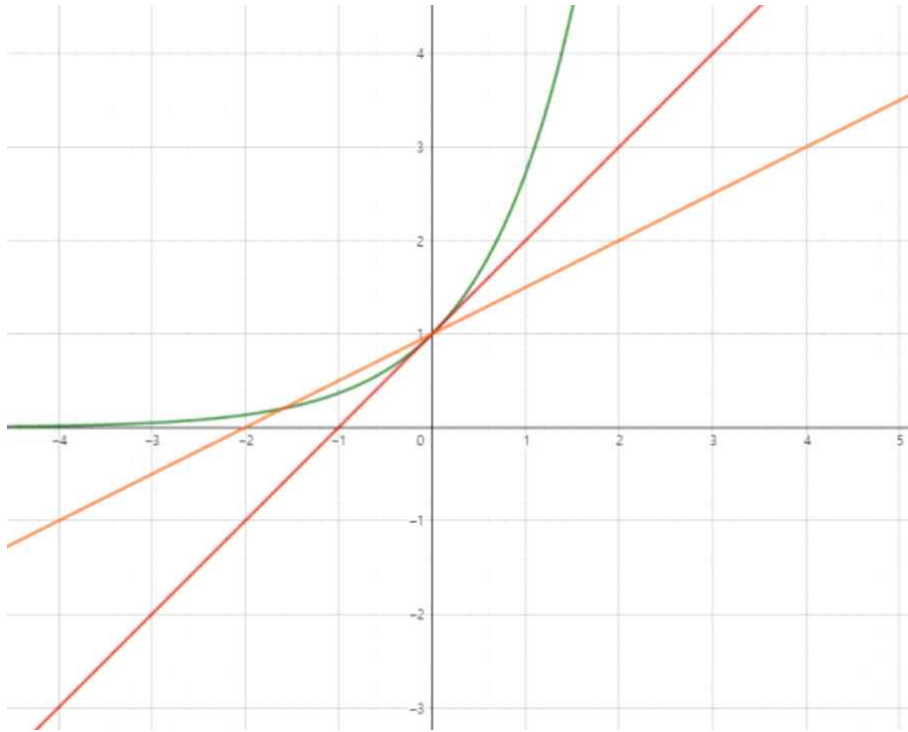
$|f(x)| = 2$ 가 되는 x 값들의 합을 구하시오.

예전에 오르비 닉 짜르꼬님(현 Korea Economics)이 제가 수학칼럼에 쓰는 걸 허락해 주신 문제입니다. 정석으로 풀어도 그리 어렵지 않은 문제지만, 기하적 방법을 써서 푸는 과정을 일부 보여드리겠습니다.

(가)를 보면 x 가 0보다 작을 때 $f(x) = e^x$ 입니다. 그런데 $x=0$ 에서 미분 가능하므로 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 접선이 다음 그림처럼 그려집니다.

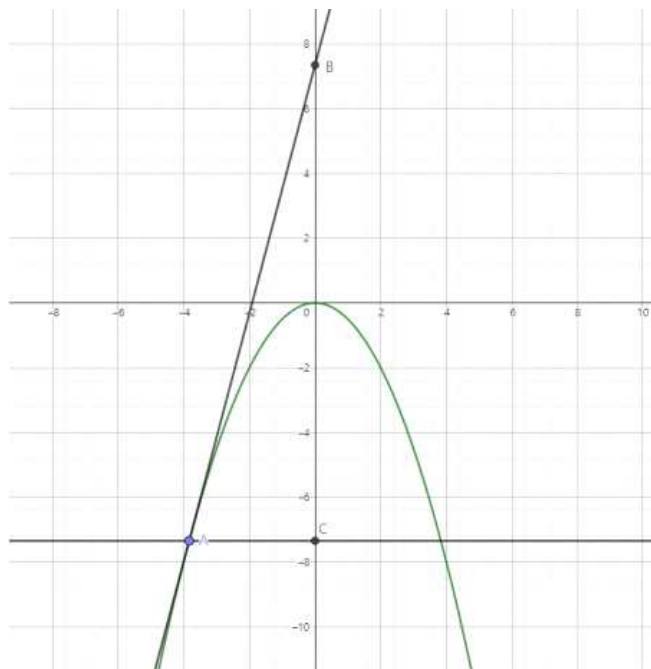


따라서 이 빨간색 접선의 기울기는 1이어야 합니다. 이 접점을 지나면서 기울기가 0.5인 직선을 하나 더 그려보겠습니다.



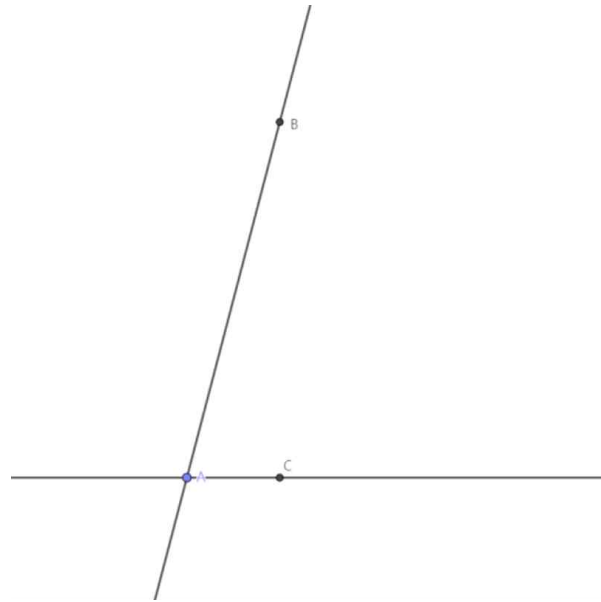
이번에 추가된 선 위에 이차함수의 꼭짓점이 오게 됩니다. 문제 조건에서 극값이 2라고 하셨으니까 추가된 선이 $y=2$ 와 만나는 점 $(2,2)$ 가 이차함수의 꼭짓점입니다.

갑자기 '저 선 위에 이차함수의 꼭짓점이 오게 됩니다.' 이것만 써놔서 조금 당황스러운 부분일 텐데 왜 이렇게 되는지 증명해 보도록 하겠습니다.



이차함수는 포물선이기 때문에 기하와 벡터에서 배우는 포물선의 성질에 의해 이 그림에서 C와 B는 x축에 대칭입니다.

이 그림에서 포물선과 좌표축을 지우겠습니다.

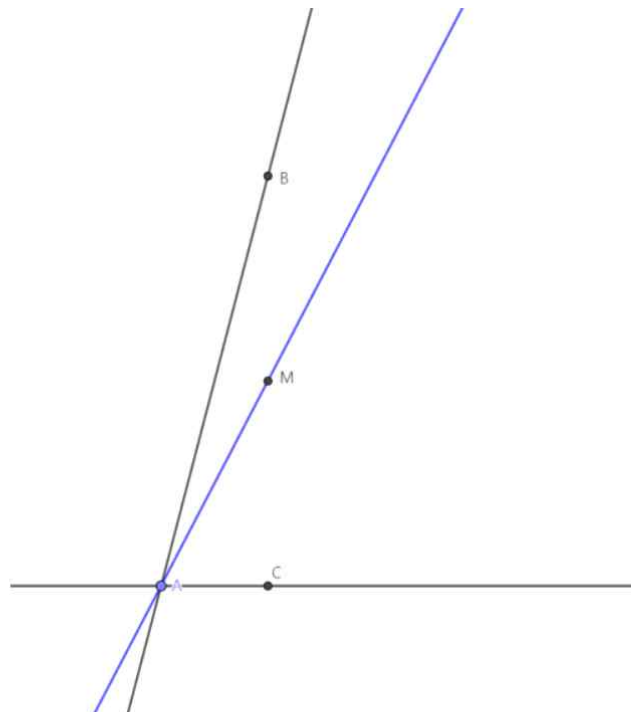


이것만 가지고 포물선의 꼭짓점 위치를 생각해 보겠습니다.

포물선이 어떻게 생겼는지 몰라도 이 포물선은 A라는 점을 지나며 A라는 접점에서의 접선은 직선 AB입니다. 그리고 B와 C의 중점에 꼭짓점이 있을 것입니다.

그런데 지금 포물선이 지워져서 꼭짓점의 위치를 모르는 관계로 B의 정확한 위치를 모릅니다. B는 접선 위 어디에나 있을 수 있고 점 C 또한 저 A를 지나고 수평인 직선에 점 B에서 내린 수선의 발이기 때문에 위치가 자유롭게 있습니다.

그럼 B가 접선 위를 마구 돌아다닐 때 선분 BC의 중점이 꼭짓점의 자취임을 알 수 있습니다.



지금 그려진 새로운 선이 이차 함수의 꼭짓점의 자취입니다.

자 이런 식으로 2차함수의 한 접점과 그 점에서 접선을 알면 꼭짓점이 있어야만 하는 위치를 자취(직선)의 형태로 알 수 있습니다.

좌표평면 위의 두 포물선 C_1, C_2 가 다음 조건을 만족한다.

(가) 두 포물선의 축은 점 P 에서 수직으로 만나며, 점 P 는 C_1, C_2 의 꼭짓점이다.

(나) C_1 은 $(-3, 0)$ 에서 기울기가 $-\frac{4}{3}$ 인 직선과 접하고, C_2 은 $(3, 2)$ 에서 기울기가 $\frac{2}{3}$ 인 직선과 접한다.

이때 $\overline{OP}^2$ 을 구하여라.

➤테플로탁슬 자작문제

한 점을 제외한 모든 구간에서 미분 가능한 함수 $y=f(x)$ 와 $x>1$ 인 범위에서 정의된 함수 $y=g(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

상수 m 이 양의 실수이고, t 가 1보다 큰 실수인 범위에서 자유롭게 변할 때,

$$f(x) = \begin{cases} m(e^x - 1) & (x < 0) \\ -a(x - g(t))^2 + b & (0 \leq x < g(t)) \\ -c\sqrt{x - g(t)} + b & (g(t) \leq x < t) \\ \frac{1}{x} & (x \geq t) \end{cases}$$

를 만족하는 양의 실수 a, b, c 가 언제나 존재한다.

$g(x)=g(k)$ 의 실근이 2개인 k 의 범위가 $1 < k < \alpha, \alpha < k < 2$ 일 때 $\int_{\alpha}^2 g(x)dx = \frac{3}{2} \ln \frac{q}{p}$ 이다. (단, p, q 는 서로소인 자연수이고 α 는 1보다 크고 2보다 작은 실수이다.)

이때 $p^2 + q^2 + m^2$ 을 구하시오.

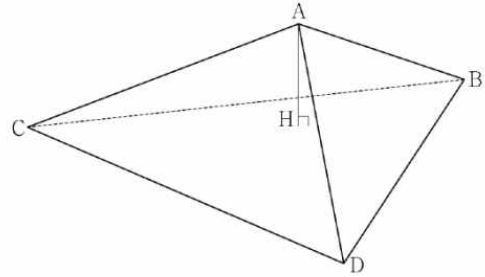
➤테플로탁슬 자작문제

다음 챕터로 넘어갑니다.

10. 메넬라오스의 정리

*문제 미리보기

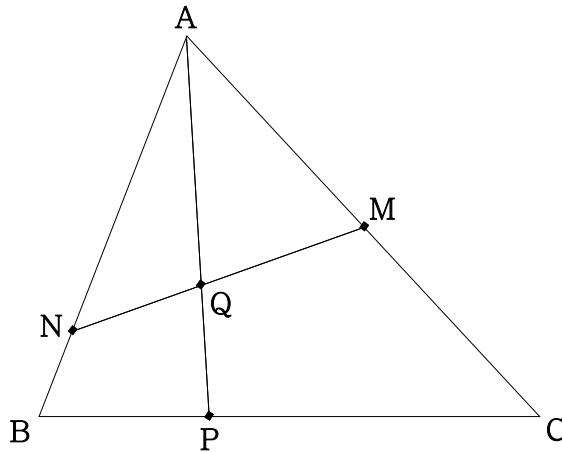
19. 한 변의 길이가 12인 정삼각형 BCD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 삼각형 CDH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 3배, 삼각형 DBH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 2배이고 $\overline{AH}=3$ 이다. 선분 BD의 중점을 M, 점 A에서 선분 CM에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 선분 AQ의 길이는? [4점]



- ① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

➤2019학년도 수능 19번 문제

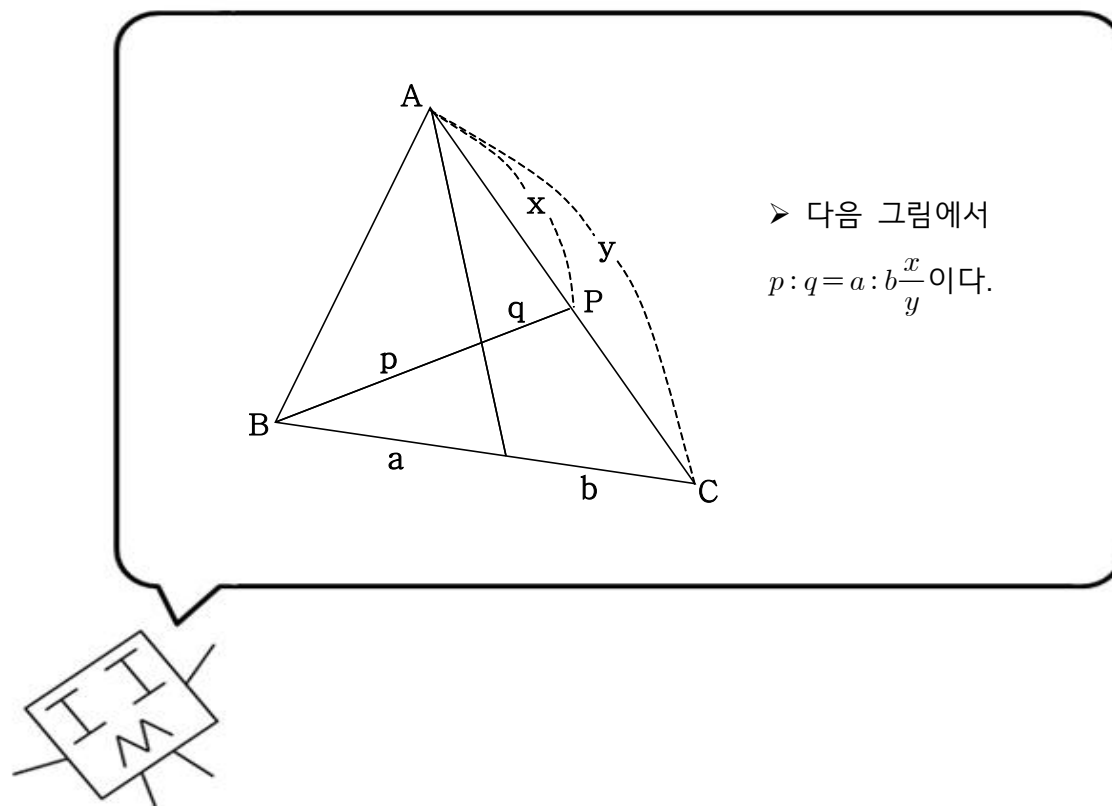
다음 그림에서 $\overline{AN} : \overline{NB} = 3 : 1$, $\overline{AM} = \overline{MC}$, $\overline{BP} : \overline{PC} = 1 : 2$ 일 때 $\frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}}$ 는 얼마인가?



➤테플로탁슬 자작문제

제가 이 책을 쓰게 된 계기가 된 챕터입니다. 2019 수능을 현장 응시 하면서 19번 문제를 이 방법으로 풀어내고 잠시 감탄에 젖으면서 '아, 이런 방법들을 다른 사람에게도 소개해 주고 싶다' 라는 마음가짐으로 책 쓰는 것을 시작했기 때문입니다.

일단 메넬라오스의 정리를 실용성 있게 변형한 공식을 소개해 드리겠습니다.

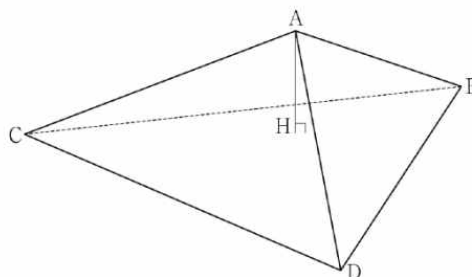


다른 의미로 말하자면 점 B를 축으로 선 BC를 회전시켜서 삼각형 안쪽으로 끌어당겨 선 BP를 만들면 $\frac{q}{p+q} = \frac{b}{a+b} \frac{x}{y}$ 입니다.

이 공식을 이용하면 특정 평면 기하 문제가 아주 잘 풀립니다. 삼각형을 관통하는 선분의 길이 비라든가...(평면 벡터 문제로 가끔 나옵니다) 분할된 삼각형의 넓이 비라든가...

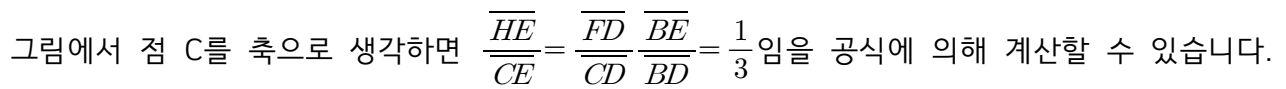
직접 문제들을 풀어보도록 하겠습니다.

19. 한 변의 길이가 12인 정삼각형 BCD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 삼각형 CDH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 3배, 삼각형 DBH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 2배이고 $\overline{AH}=3$ 이다. 선분 BD의 중점을 M, 점 A에서 선분 CM에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 선분 AQ의 길이는? [4점]



- ① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

제가 현장에서 풀은 문제입니다. 삼각형 CDB만 가져와서 보조선을 그려주겠습니다.



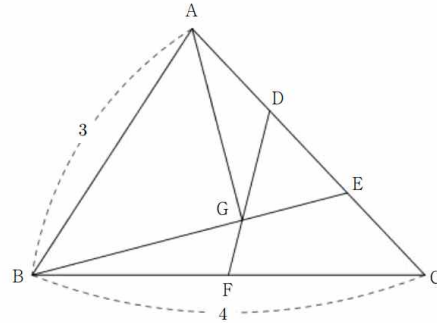
문제 미리보기에 있는 2번째 문제를 풀어보겠습니다.

이렇게 보조선을 그어주시면 메넬라오스의 정리에 의해 $\overline{AN} : \overline{NB} = \overline{AM} : \overline{MC} \cdot \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = 3 : 1$

$\overline{OP} : \overline{PC} = 5 : 4$ 임을 알 수 있습니다. 따라서 $\overline{AQ} : \overline{PQ} = \overline{AM} : \overline{MC} \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}} = 1 : \frac{5}{9}$ 이므로 답

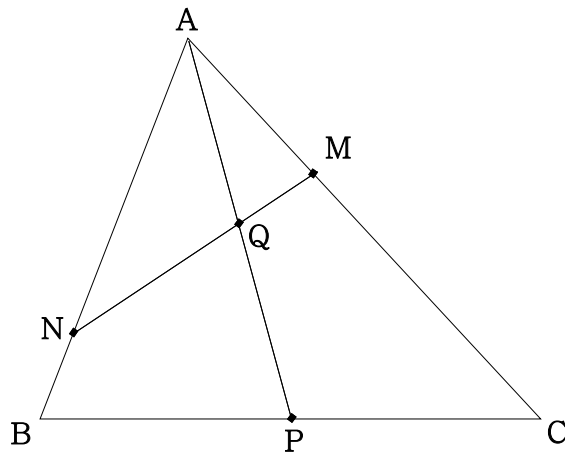
체화하신다면 여러분도 이런 식으로 문제를 풀실 수 있습니다.

27. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$ 인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 1:2로 내분하는 점을 D, 선분 AC를 2:1로 내분하는 점을 E라 하자. 선분 BC의 중점을 F라 하고, 두 선분 BE, DF의 교점을 G라 하자. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}=0$ 일 때, $\cos(\angle ABC)=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



➤2019학년도 사관학교 수학 가형 27번

다음 그림처럼 삼각형이 그려져 있을 때 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AM}$, $3\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AN}$ 을 만족하며 점 P는 선분 BC의 중점이다. $\overrightarrow{AQ}=p\overrightarrow{AN}+q\overrightarrow{AM}$ (단, p 와 q 는 실수)일 때 $q-p$ 의 값을 구하여라.



➤테플로탁슬 자작문제

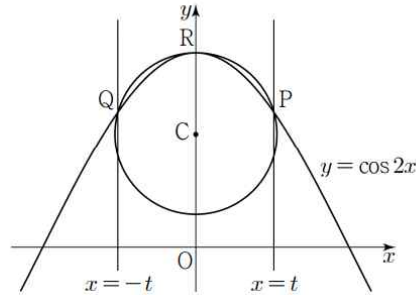
+NM의 연장선을 그리는 것은(그렇게도 풀 수는 있지만) 제 의도와 맞는 풀이가 아닙니다. 삼각형 내부에 보조선을 그리세요.

다음 챕터로 넘어갑니다.

11. 곡률 반경 공식

*문제 미리보기

27. 좌표평면에서 곡선 $y = \cos 2x$ 가 두 직선 $x = t$, $x = -t$ ($0 < t < \frac{\pi}{4}$)와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 곡선 $y = \cos 2x$ 가 y 축과 만나는 점을 R라 하자. 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 중심을 $C(0, f(t))$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \alpha$ 이다. 100α 의 값을 구하시오. [4점]



➤2016학년도 사관학교 B형 27번 문제

이번 단원은 대학 과정의 공식을 써보겠습니다. 증명 같은 건 없습니다.

어떤 굽은 부분의 모양에서 그 부분이 얼마나 굽었는지를 확인하기 위한 수치가 곡률 반경인데, 곡선의 미소한 부분을 원호로 간주하고 이 원호의 반지름을 곡률 반경이라고 합니다.

다시 풀어서 말하면 곡선의 아주 작은 부분을 보면 원의 일부와 매우 비슷하게 보일텐데(뭘 곡선이나 원이나 다 둥그니까) 그 원의 반지름을 계산해 낼 수 있는 공식입니다.

일단 저 사관학교 문제가 대표적인 곡률 반경 공식을 사용 가능한 문제입니다.

곡률 반경 이게 잘 안 쓰일 것 같지만 불꽃 모의고사와 샴인미 n제 중 이 공식을 사용 가능한 문제가 있습니다. 게다가 기출 중에도 있었는데 제가 못 찾았을 뿐입니다.

아 물론 실용성은 거의 없다고 보시면 됩니다.

➤곡선 $y = f(x)$ 에 대해 한 점에서 곡률반경은

$$r = \left| \frac{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right| \text{이다.}$$



공식은 이렇습니다.

특히 저 공식에서 주목하실 부분은 분자 부분이 복잡하긴 한데 $y' = 0$ 인 경우에 한해서 공식 자체가 $r = |\frac{1}{y''}|$ 로 매우 쉬워진다는 점입니다.

자 그럼 위 사관학교 문제는 간단해지죠. 암산 가능합니다.

$x=0$ 에 가까워질 때 그 작은 부분이 이루는 원의 반지름의 길이를 구해주면 됩니다.

$y' = 0$ 이므로 $r = |\frac{1}{y''}| = \frac{1}{4}$ 이며 원의 중심은 $(0, \frac{3}{4})$ 이 될 것임을 알 수 있습니다. 답은 75입니다.

그 원의 반지름을 알아내면 그 점에 아주 가까워지는 경우에 그 곡선을 원으로 근사할 수 있게 됩니다.

샤인미 n제 중 그렇게 풀면 20초 컷인 문제가 있었는데 저작권 문제로 못 실어서 아쉽습니다.

어쨌든 바로 연습문제로 들어가겠습니다.

함수 $y = \sqrt{x^2 + 1}$ 위에 점 $P(a, \sqrt{a^2 + 1})$ 가 있고 점 P에서의 접선과 수직이면서 점 P를 지나는 직선 l 이 존재한다. 이 직선이 y축과 만나는 점의 y 좌표의 값을 $f(a)$ 라고 하자.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)f(\frac{2}{x})}{x}$ 를 구하여라.

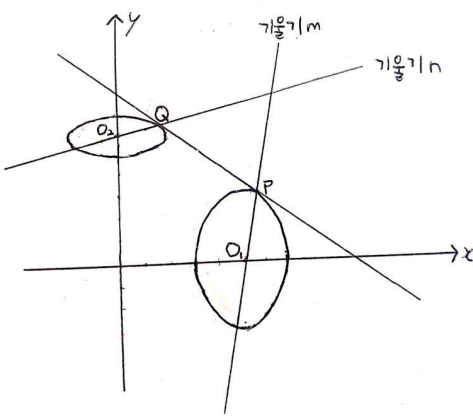
➤테플로탁슬 자작문제

+그냥 $f(x)$ 를 구하지 마시고 식을 정리해서 그림을 그려봅시다.

다음 챕터로 넘어갑니다.

12. 좌표축 늘리고 줄이기

*문제 미리보기

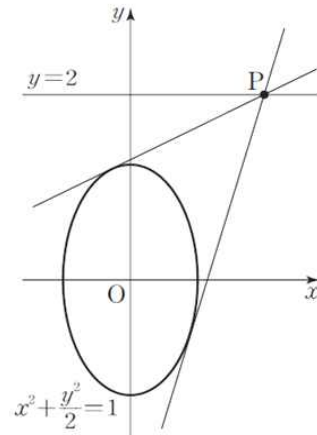


그림처럼 타원 $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 과 $\frac{x^2}{4} + (y-6)^2 = 1$ 가 있고 $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{4} + (y-6)^2 = 1$ 과 두 타원의 공통접선이 만나는 접점을 각각 P, Q라고 하자. P, Q는 제 1사분면에 있다. $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{4} + (y-6)^2 = 1$ 의 중심을 각각 O_1, O_2 일 때 $\overline{O_1P}, \overline{O_2Q}$ 의 기울기가 각각 m, n이었다. 이때 $\frac{m}{n}$ 을 구하여라.

➤테플로탁슬 자작문제

34. 직선 $y=2$ 위의 점 P에서 타원 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$ 이다. 점 P의 x좌표를 k라 할 때, k^2 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

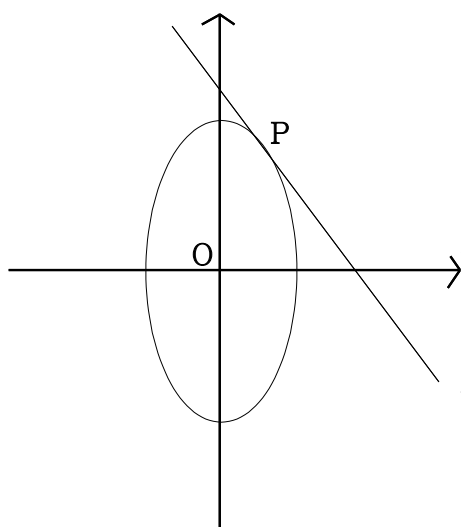


➤기출문제

이게 제 책의 마지막 챕터입니다. 드디어 끝나네요.

이번에는 좌표축을 마음대로 늘렸다 줄였다 할 겁니다.

이게 뭘 소리지 싶겠지만 보시면 이해될 것 같습니다.

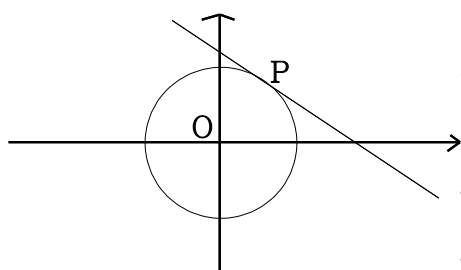


그림의 타원은 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 이고 직선의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 입니다. 이때 제1사분면에 있는 접점 P의 x 좌표를 구해보겠습니다.

일반적으로 도함수를 구하거나 접선의 방정식을 쓰겠지만 저는 좀 특이한 방법을 쓰겠습니다.

그림에서 타원이 원이었다면 점 P의 x 좌표를 구하기 훨씬 쉬울 것 같습니다.

저는 이 책을 한글 2014로 작성했습니다. 즉 이 그림에서 타원을 원으로 만들려면 저는 이 그림의 세로길이를 절반으로 줄여서 설정하면 됩니다.



그렇게 해봤습니다. 진짜로 타원이 원처럼 생겼네요. 이제 직선 기울기도 절반이 되었으니 $-\frac{2}{3}$ 임을 알 수 있습니다.

접선과 선분 OP는 수직이어야 합니다. 원의 접선의 성질에 의하면 그렇게 됨을 알 수 있습니다. OP의 길이는 처음 타원의 단반경 길이와 같으므로 1입니다. OP의 기울기는 $\frac{3}{2}$ 입니다.

따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{2}{\sqrt{13}}$ 임을 알 수 있습니다.

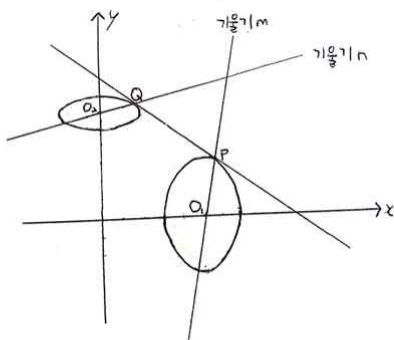
이런 식으로 타원을 원으로 만들어서 풀면 많은 문제들이 꽤 쉽게 풀리는 것을 알 수 있습니다.

참고로 위에서 세로 길이를 수축해서 x 좌표는 일정했기 때문에 그냥 풀 수 있었지만 만약 가로 길이를 2배로 확장해서 타원을 원으로 만들었다면 x 좌표도 2배가 된 상태라는 것을 유념하고 푸셔야 합니다.

자 위의 그림을 잠시 주목해보시면

세로 길이가 절반이 된 후 접선과 직선 OP의 기울기의 곱은 -1입니다. 두 선이 수직이어야 하기 때문입니다. 그렇다면 세로 길이가 절반이 되기 전 원래 그림에서의 접선과 직선 OP의 기울기의 곱은 얼마일지 생각해 보겠습니다. 세로 길이가 절반이 되면서 두 선의 기울기는 둘 다 절반이 되었고, 그렇게 절반이 된 두 기울기의 곱은 -1입니다. 따라서 절반이 되기 전 두 선의 기울기의 곱은 -4임을 알 수 있습니다.

방금 제가 말한 계산법에 유의해서 문제 미리보기에 있는 제 자작문제를 풀어 봅시다.



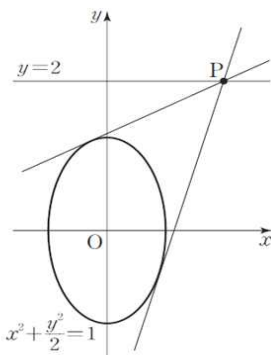
그림처럼 타원 $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 과 $\frac{x^2}{4} + (y-6)^2 = 1$ 가 있고 $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{4} + (y-6)^2 = 1$ 과 두 타원의 공통접선이 만나는 접점을 각각 P, Q라고 하자. P, Q는 제 1사분면에 있다. $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{4} + (y-6)^2 = 1$ 의 중심을 각각 O_1, O_2 일 때 $\overline{O_1P}, \overline{O_2Q}$ 의 기울기가 각각 m, n이었다. 이때 $\frac{m}{n}$ 을 구하여라.

공통 접선의 기울기를 l이라고 두고 lm의 값을 구해봅시다. 타원 $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 가로 길이를 $\frac{3}{2}$ 배 하면 두 직선의 기울기는 둘 다 $\frac{2}{3}$ 배 되면서 타원이 원으로 변합니다. 원이 된 상태에서 특정 접점을 지나는 접선과 접점과 중심을 이은 선은 수직이므로 기울기의 곱이 -1입니다. 따라서 $\frac{2}{3}l \cdot \frac{2}{3}m = -1$ 입니다. 따라서 $lm = -\frac{9}{4}$ 이며 같은 방법으로 $ln = -\frac{1}{4}$ 임도 계산하실 수 있을 겁니다. 따라서 답은 9입니다.

34. 직선 $y=2$ 위의 점 P에서 타원 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 에 그은 두

접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$ 이다. 점 P의 x좌표를 k라 할 때, k^2 의 값은?

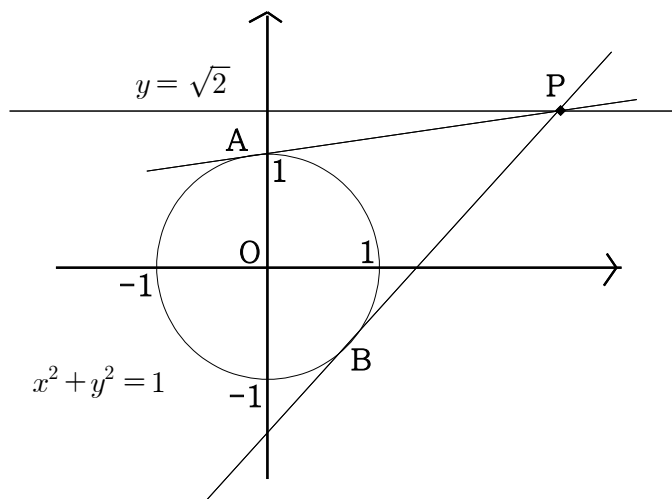
- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10



이 문제도 풀어보겠습니다.

세로 방향을 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 로 축소하면 예쁜 원이 될 것 같은 기분이 듭니다.

다시 말하지만 저는 문서 작성 중이라 그냥 저 그림 세로 길이를 줄여버리면 되지만 시험장에서 시험지에 인쇄된 그림을 그렇게 할 수는 없으니 줄였다고 생각하고 그림을 다시 그립시다.



이렇게 새로 그리실 수 있습니다. 구해야 하는 점 P의 x 좌표는 그대로 유지되므로 이 그림의 x 좌표를 구하면 됩니다.

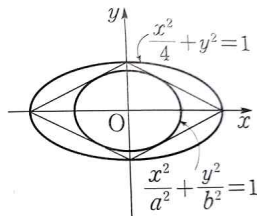
세로 방향 길이가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 배 되었으므로 두 접선의 기울기도 각각 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 배 된 것을 고려해야 합니다. 따라서 두 접선 기울기의 곱은 $\frac{1}{3}$ 에 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 를 두 번 곱한 $\frac{1}{6}$ 입니다.

접점 두 개를 각각 A, B라고 하면 $\angle OPA = \angle OPB = \theta$ 로 둘 수 있습니다. P의 x 좌표가 k이므로 $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ 이고 AP의 기울기는 $\frac{\frac{\sqrt{2}}{k} - \tan \theta}{1 + \frac{\sqrt{2}}{k} \tan \theta}$ 이며 BP의 기울기는 $\frac{\frac{\sqrt{2}}{k} + \tan \theta}{1 - \frac{\sqrt{2}}{k} \tan \theta}$ 입니다.

다. 이 곱이 $\frac{1}{6}$ 이므로 정리하면 $\frac{\frac{2}{k^2} - \frac{1}{k^2+1}}{1 - \frac{2}{k^2(k^2+1)}} = \frac{1}{6}$ 입니다. 이를 만족하는 k^2 의 값을 구하면 7이며

답은 2번입니다.

11 오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 의 네 꼭짓점을 연결하여 만든 사각형에 내접하는 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 있다. 이 타원의 두 초점이 $(b, 0), (-b, 0)$ 일 때, a^2b^2 의 값을 구하여라.



➤기하와 벡터 교과서 문제

이걸로 이 책은 끝...일까요?

Bonus. 테플로타슬 n제

별건 아니고 그냥 자작 문제들입니다.

위 칼럼들 내용을 활용해야 하는 문제도 있고 아닌 문제도 있습니다. 특히 위 칼럼 내용들을 융합해서 풀어야 하는 문제도 있기 때문에 복습 겸 풀어보시길 바랍니다.

1. 좌표 공간에 점 $A(-4,3,0)$, $B(4,-3,0)$, P_1 , P_2 , P_3 가 있고 선분 $\overline{AB}$ 위에 점 Q_1 , Q_2 , Q_3 이 있어 다음 조건을 만족한다.

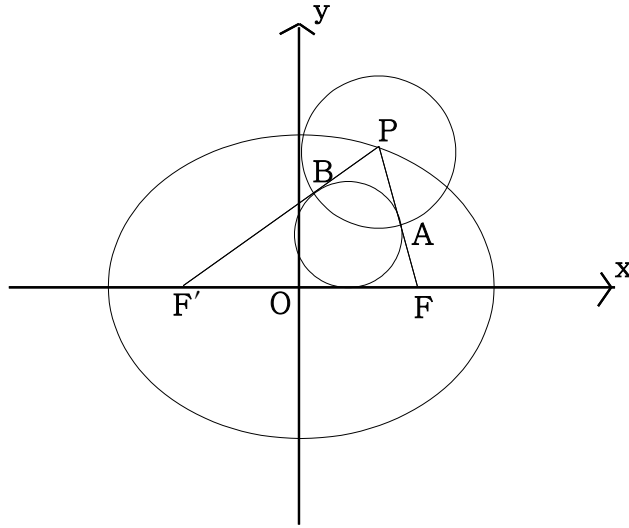
(가) 점 Q_2 는 $\overline{AB}$ 와 $\overline{Q_1Q_3}$ 를 동시에 이등분한다.

(나) $|\overrightarrow{P_kQ_k}|^2 + \overrightarrow{AQ_k} \cdot \overrightarrow{Q_{4-k}A} = 0$, $\overrightarrow{P_kQ_k} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

(다) $\triangle P_1P_2P_3$ 가 포함된 평면 α 는 직선 $\overline{AB}$ 와 평행하고 원점과의 거리는 3이다.

이때 $\triangle P_1P_2P_3$ 의 넓이의 최댓값을 S 라고 하고 그때 $\triangle P_1P_2Q_2$ 와 $\triangle P_3P_2Q_2$ 가 이루는 각을 θ 라고 할 때 $S \cos \theta$ 의 값을 구하여라.

2. 다음 그림처럼 좌표 평면 위에 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 이 그려져 있고 타원 위에 점 P가 존재한다. 이 타원의 두 초점을 각각 F, F'(단, F의 x 좌표는 양수)라고 할 때, $\triangle PFF'$ 의 내접원이 $\overline{PF}$ 와 만나는 점을 A, $\overline{PF'}$ 과 만나는 점을 B라고 하자. 그러면 P를 중심으로 하고 A, B를 지나는 원이 y축에 접한다.

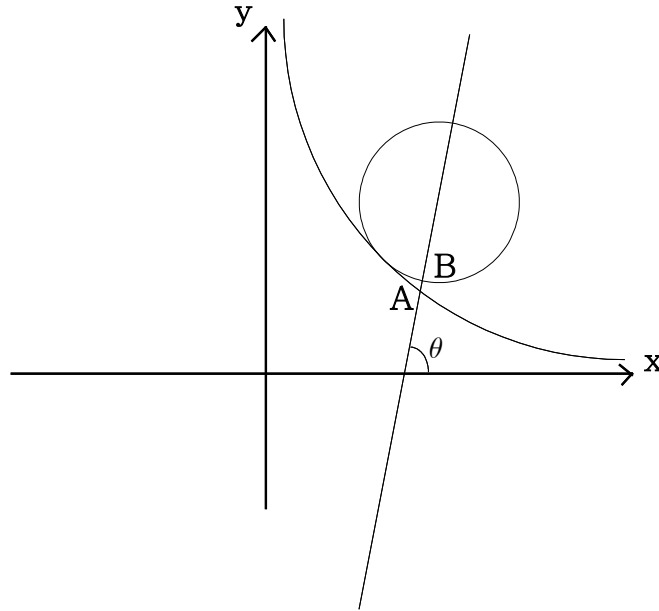


선분 OP의 기울기를 m 이라고 할 때, $25m^2$ 의 값은 얼마인가?

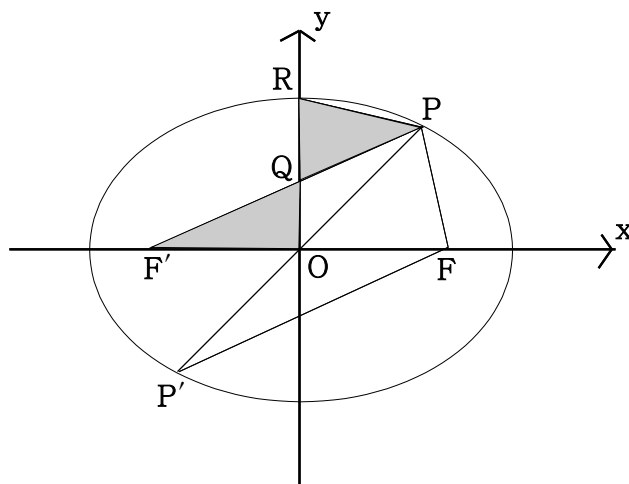
3. 좌표 평면 위에 원 $(x-t)^2 + (y-10+t)^2 = 25$ (단, t 는 실수)가 존재하고 원 위의 동점 P에 대해 원 위의 점 A, B가 다음 조건을 만족한다.

- (가) $\vec{a}(1, 0)$ 에 대해 $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a}$ 의 최댓값은 $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{a}$ 와 같다.
 - (나) $\vec{b}(-1, 0)$ 에 대해 $|\overrightarrow{OP} \cdot \vec{b}|$ 의 최솟값은 $\overrightarrow{OB} \cdot \vec{b}$ 와 같다.
 - (다) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}$ 의 최댓값과 최솟값의 차는 110이다.
 - (라) $\triangle ABP$ 의 무게중심은 항상 제 1 사분면 위에 있다.
- 이때 $\triangle AOB$ 의 넓이를 구하여라.

4. 그림처럼 함수 $y = \frac{1}{x}$ 과 원 $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$ 이 있고 원의 중심을 지나면서 기울기가 $\tan \theta$ 인 직선이 존재한다. 이 직선과 $y = \frac{1}{x}$ 가 만나는 점을 A, 직선과 원이 만나는 두 점 중 점 A에 더 가까운 점을 B라고 하자. 선분 $\overline{AB}$ 의 길이를 $f(\theta)$ 라고 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \frac{2000f(\theta)}{\theta}$ 의 값을 구하여라.



5. 좌표평면에 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 이 있다. 제 1사분면에 있는 타원 위의 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여 (단 F의 x 좌표는 양수) 선분 $\overline{F'P}$ 과 y축이 만나는 점을 Q라고 하고, 타원이 y축과 만나는 점을 R이라고 하자.



이때 $\triangle F'OQ$ 와 $\triangle PQR$ 의 넓이가 같았다. OP의 연장선이 타원과 만나는 점을 P'이라고 하자. $\triangle PFP'$ 의 넓이의 제곱을 구하여라.

이제 정말로 끝입니다. 아하하하

정답지!

1. 2, 4

2. $f(x) = -x \sin(\ln x)$, $f(x) = \sqrt{e^{x-2} + 2}$

3. 2

4. $-\frac{1}{25}$, $\frac{7-4\sqrt{3}}{4}$

5. 400, 5

6. 1, 3

7. 3, 4

8. 5, 17, 32, $9\sqrt{3}$

9. 4, 17

10. 37, $\frac{5}{13}$

11. 4

12. $\frac{8}{9}$

bonus. $\frac{6\sqrt{3}}{13}$, 84, 44, 250, 6

