[정현경/한성은 모의고사]

| 대학수학능력시험 수학(나형) 연습 |

한성은

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

아무래도 공부에 집중하기 힘든 상황입니다만,
다 같이 망하고 있다고 생각하면 좀 나을 것 같아요.

hansungeun.com
– 저자소개, 학습자료, 교재판매

CCL

수학 영역(나형)

5지선다형

1. $2^4 \times 4^{-1}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ 2　⑤ 4

2. ${}_2\Pi_3$의 값은? [2점]

① 6　② 8　③ 9
④ 12　⑤ 16

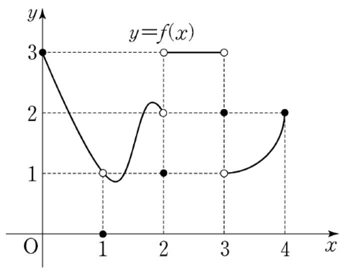
3. $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$일 때, $(\sin x + \cos x)^2$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

4. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{2x-4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$
④ 1　⑤ 2

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0+} \{f(x)+f(1+x)+f(2+x)\}$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

6. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A \cap B^c) = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{P}(A^c \cap B^c) = \frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A \cap B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

7. 함수 $f(x) = \begin{cases} ax+b & (x \le 0) \\ x^2+cx & (x>0) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f(-2)=1$일 때, $f(4)$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

8. $0 \le i \le 5$인 정수 i에 대하여 $(2+x)^5$의 전개식에서 x^i의 계수를 a_i라 하자. $\sum_{i=0}^{5} a_i$의 값은? [3점]

① 183 ② 198 ③ 213
④ 228 ⑤ 243

9. 한 개의 주사위를 두 번 던진다. 나온 두 눈의 수의 곱이 홀수일 때, 두 눈의 수의 합이 6의 약수일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{14}{27}$ ③ $\frac{16}{27}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{10}{27}$

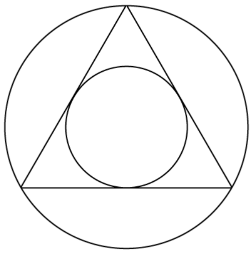
10. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{11} (-1)^k a_k = a_6$$

이고 $a_7 = 2$일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

11. 그림과 같이 한 정삼각형과 이 정삼각형의 내접원과 외접원으로 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? [3점]



① 1260 ② 1680 ③ 2520
④ 3760 ⑤ 5040

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 방정식이 $y=x$이다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 가질 때, a의 값은? [3점]

① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

13. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$4\sum_{k=1}^{8} a_k = \sum_{k=5}^{12} a_k$$

이다. $a_1 a_2 = 2$일 때, $\sum_{k=1}^{6} a_k a_{k+1}$의 값은? [3점]

① 162 ② 150 ③ 138
④ 126 ⑤ 114

14. 점 A(4)에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 v가

$$v = \frac{1}{4}t^2(6-t)$$

이다. 점 P의 속도가 최대일 때, 점 P의 위치는? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \geq n^2 \ \cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때 (좌변)$=$(우변)$=1$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $(*)$은 다음 부등식과 서로 동치이다.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{2n}{n+1} \ \cdots \ (**)$$

$n=m$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \geq \frac{2m}{m+1}$$

이다. $n=m+1$일 때

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} \geq \frac{2m}{m+1} + \boxed{(가)} = \frac{2m+1}{m+1}$$

한편

$$\frac{2m+1}{m+1} - \frac{2(m+1)}{m+2} = \frac{m}{(m+1)(m+2)} \geq 0$$

이므로 $\frac{2m+1}{m+1} \geq \boxed{(나)}$ 이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{g(4)}{f(5)}$의 값은? [4점]

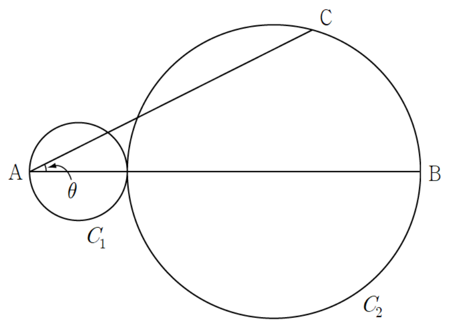
① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

16. 어느 공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량은 평균이 mg이고 표준편차가 σg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 화장품 중 임의추출한 9개의 화장품 내용량의 표본평균이 200g 이하일 확률과 220g 이상일 확률이 0.0668로 서로 같을 때, $m+\sigma$의 값을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 200　② 210　③ 220　④ 230　⑤ 240

17. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1, 3인 두 원 C_1, C_2가 서로 외접하고 있다. 원 C_1 위의 점 A, 원 C_2 위의 점 B는 $\overline{\mathrm{AB}}=8$를 만족시키고, 원 C_2 위의 점 C에 대하여 $\angle\mathrm{CAB}=\theta$일 때, $\tan\theta=\frac{1}{2}$이다. $\overline{\mathrm{CA}}$의 길이는? (단, $\overline{\mathrm{CA}}>4$이다.) [4점]



① 5 ② 6 ③ 7
④ $2\sqrt{5}+1$ ⑤ $2\sqrt{5}+2$

18. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=x(6-x)$$

를 만족시키고 $\int_0^2 f(x)dx=\int_2^6 g(x)dx$일 때, $\int_0^6 g(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{26}{3}$ ② $\frac{28}{3}$ ③ 10
④ $\frac{32}{3}$ ⑤ $\frac{34}{3}$

19. 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 8개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는 시행을 세 번 반복할 때 꺼낸 공에 적힌 수를 차례로 a, b, c라 하자. $a+b+c>4$일 때, $(a-2)(b-2)(c-2)=0$일 확률은? [4점]

① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$
④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-xf(2)}{x-1}=f(1)$
(나) $\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}=f(2)$

$f(3)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

21. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$x \times \{f(x)-x\} \leq 0$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 6이고, 이 6개의 실근 중 가장 작은 것이 -1, 가장 큰 것이 5일 때, $f(-3)$의 값은? [4점]

① 24 ② 27 ③ 30
④ 33 ⑤ 36

단답형

22. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2}(x+1)f(x)=12$일 때, $f(2)$의 값을 구하여라. [3점]

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르고

$$\mathrm{E}(2X-4)=12, \quad \sigma(2X-4)=4$$

일 때, n의 값을 구하여라. [3점]

24. 함수 $f(x)=a\cos bx+c$의 최솟값이 0, 최댓값이 12이고, 방정식 $f(x)=0$의 양의 실근 중 가장 작은 것이 2π이다. abc의 값을 구하여라. (단, a, b는 양수이다.) [3점]

25. $1<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여

$$\frac{b-a}{\log_a b}=\frac{a}{3\log_b a}=\frac{b}{4}$$

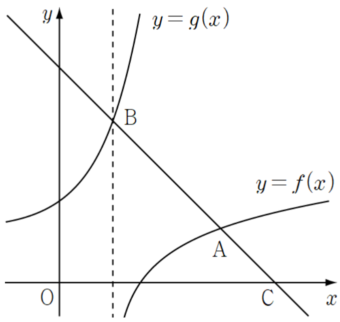
일 때, $a+b$의 값을 구하여라. [3점]

26. $f(1)=0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{\int_{-1}^{x} f(t)\,dt}{x-2}=1$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하여라. [4점]

27. 함수 $f(x)=\log_a(x-k)$의 역함수가 $g(x)$이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=g(x)$, x축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 B가 곡선 $y=f(x)$의 점근선 위의 점이고, 점 A가 선분 BC의 $2:1$ 내분점이다. $f(2k+2)=k$일 때, $a+k$의 값을 구하여라. (단, a와 k는 양의 실수이다.) [4점]



28. 흰 공 8개와 파란 공 2개가 있다. 이 10개의 공을 5명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 공을 1개만 받는 학생이 2명이 되도록 나누어주는 경우의 수를 구하여라. (단, 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않고, 모든 학생은 1개 이상의 공을 받는다.) [4점]

29. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3장의 카드와 문자 a, b, c가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하여라. [4점]

숫자가 적혀 있는 카드끼리 이웃할 때는 작은 수가 적혀 있는 것부터 크기 순서로 놓인다.

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$f(x)=f(t)$$

의 서로 다른 모든 실근의 합을 $g(t)$라 하자.
함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a는 모두 4개이고 이를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열한 것이

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4$$

이다. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(4)$의 값을 구하여라. [4점]

(가) $a_3-a_2=2$ (나) $f(a_2)-f(0)=\frac{5}{3}$

[정현경/한성은 모의고사]
수능(나형) 연습 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	⑤	02	②	03	③	04	①	05	④
06	①	07	④	08	⑤	09	①	10	⑤
11	②	12	②	13	④	14	⑤	15	②
16	④	17	⑤	18	②	19	②	20	③
21	①	22	4	23	16	24	18	25	10
26	8	27	4	28	780	29	384	30	48

COMMENT 15

$f(m)=\dfrac{1}{m+1}$, $g(m)=\dfrac{2(m+1)}{m+2}$

COMMENT 17

$\overline{\text{CA}}=x$, 원 C_2의 중심을 O라 하자. $\overline{\text{AO}}=5$, $\overline{\text{OC}}=3$, $\cos(\angle\text{CAO})=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$이므로 코사인법칙에서

$$3^2=x^2+5^2-2\cdot x\cdot 5\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$

이다. 풀면 $x=2\sqrt{5}\pm2$이다. 이 중 짧은 것은 $\overline{\text{CA}}>4$에 모순, $2\sqrt{5}+2$가 답이다.

※ 원의 중심 O에서 현 AC에 수선을 내려서 푼 애들도 잘했어요.

COMMENT 18

$$\int_0^6 g(x)dx=\int_0^2 g(x)dx+\int_2^6 g(x)dx=\int_0^2\{x(6-x)-f(x)\}dx+\int_2^6 g(x)dx=\int_0^2 x(6-x)dx$$

COMMENT 20

(가)의 식에서 $f(1)=f(2)$, $f'(1)=2f(1)$이고, (나)의 식에서 $f'(2)=f(1)$이다. $f(1)=a$라 하자.

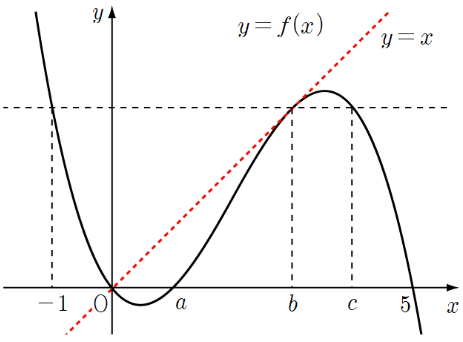
$f(x)=(x-1)(x-2)(x-b)+a$에서 $f'(1)=2a$, $f'(2)=a$를 풀면 $f(x)=(x-1)(x-2)\left(x-\dfrac{5}{3}\right)+\dfrac{1}{3}$이다.

COMMENT 21

$x<0$일 때 $f(x)\geq x$이고, $x>0$일 때 $f(x)\leq x$이다. $f(0)=0$이네.

방정식 $f(t)=t$의 근이 더 필요하다. 직선 $y=x$에 접해야 겠다.

대충 조립해보면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x<0$일 때 접하는 경우에는 최솟값 -1, 최댓값 5 각이 안 나온다. 계산은

방법1) $f(x)=kx(x-a)(x-5)$라 두고 $f'(b)=1$, $f(b)=b$, $f(-1)=b$를 푼다.

방법2) $f(x)=kx(x-b)^2+x$라 두고 $f(-1)=b$, $f(5)=0$을 푼다.

둘 다 가능한데, 방법2)가 편하겠네. $f(x)=-\dfrac{1}{4}x(x-3)^2+x$이다.

COMMENT 26

준 식에서 $\int_{-1}^{2} f(t)dt = 0$, $f(2) = 1$이다. $f(1) = 0$과 연립하여 풀면 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}$이다.

COMMENT 28

1개의 공을 받는 두 명이 받는 공의 종류에 따라 분류하자.

Case1) 둘 모두 파란 공을 받을 때 : ${}_5C_2 \times {}_3H_2 = 60$가지.

Case2) 하나는 파란 공 하나는 흰 공을 받을 때 : $({}_5C_2 \times 2) \times (3 \times {}_3H_2) = 360$가지.

Case3) 둘 모두 흰 공을 받을 때 : ${}_5C_2 \times (6 \times {}_3H_2) = 360$가지.

COMMENT 29

숫자가 적혀 있는 카드 세 장 중 몇 장이 서로 이웃하는지에 따라 분류하자.

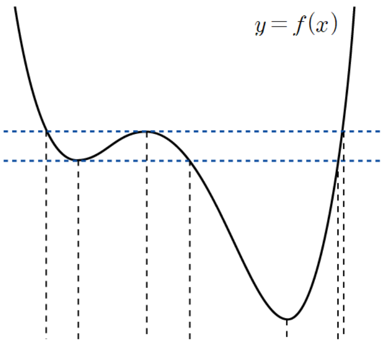
Case1) 셋 모두 이웃 : 순서는 정해져 있다. 나머지 세 장과 세장 묶음의 배열. $4! = 24$가지.

Case2) 셋 중 둘 이웃 : 누가 따로 갈지 3가지와 배열방법의 곱. → $3! \times \{3 \times (4 \times 3)\} = 216$가지.

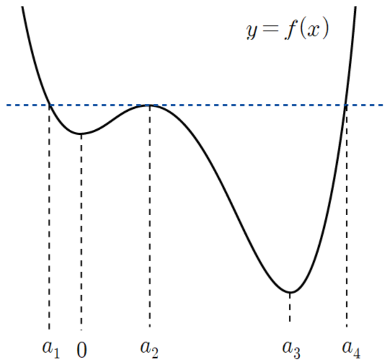
Case3) 셋 모두 따로 : 나머지 세 장을 깔고 사이사이에 넣으면 된다. → $3! \times (4 \times 3 \times 2) = 144$가지.

COMMENT 30

함수 $g(t)$의 불연속인 점이 1개 이상 존재하려면 $f(x)$가 극소, 극대, 극소를 가져야 한다.
대충 그리면 불연속점이 7개 보이는데, 그 중 중근 하나가 0이 되면 불연속점이 3개 줄어서
4개가 되는 것이 가능하다. 두 극솟값이 같은 경우는 불연속점이 5개 또는 3개 또는 2개가 된다.
그 중 $f(0) < f(a_2)$인 경우는 다음의 한 가지 경우만 남게 된다.



[$g(t)$의 불연속점 후보]



[문제의 조건을 만족시키는 경우]

$a_2 = a$라 하자. $a_3 = a + 2$이고 $f(a_2) - f(0) = f(a) - f(0) = \int_0^a f'(x)dx$이므로

$\int_0^a 4x(x-a)(x-a-2)dx = \frac{5}{3}$에서 $a^4 + 4a^3 = 5$, $a = 1$이다. $f'(x) = 4x(x-1)(x-3)$이다.