

2021학년도 설바이별 4회 문제지

수학 영역 (가형)

성명	
----	--

수험번호						-			
------	--	--	--	--	--	---	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰십시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하십시오.

전력으로 너를 지지한다.

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 정답에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.
- 문제에 관한 저작권은 로물콘 카페 수학 스태프 우주설 (정재민)에게 있습니다.

우주설모의평가

제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $(2^{\log_5 5})^{\log_2 3}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2-n+1})$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

3. $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ 라

하자. $\tan(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ 일 때, $\tan \alpha$ 의 값은? [3점]

- ① $5\sqrt{5}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$P(A^c) = \frac{1}{3}, P(B^c|A) = \frac{1}{2}$$

일 때, $P(A \cap B)$ 의 값은? (단, A^c 는 A의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

5. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_5 = a_3 + 12$$

일 때, a_4 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

6. $2^{\frac{3}{2}} > 8^{\sin \frac{n}{6}\pi}$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

7. 1부터 6까지의 자연수가 적힌 주사위를 3회 던질 때, 나온 눈의 수 중 가장 작은 숫자가 4일 확률은? [3점]

- ① $\frac{19}{216}$ ② $\frac{7}{72}$ ③ $\frac{23}{216}$ ④ $\frac{25}{216}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

8. 다음은 이산확률변수 X 에 대한 확률분포표이다.

X	2	4	a	계
$P(X=x)$	b	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X) = 4$ 일 때, $V(X)$ 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

9. 연속함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f(x) + f(x+1) - f(2x) = xe^x + 4x$$

일 때, $\int_0^2 f(x)dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 3 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

10. 곡선 $x \ln y = 2y - 4e$ 위의 점 (k, e) 에서의 접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b + k$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4} - \frac{5}{2}e$ ② $\frac{1}{4} - 2e$ ③ $\frac{1}{4} - \frac{3}{2}e$
 ④ $\frac{1}{4} - e$ ⑤ $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}e$

11. 연속함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f'(x) = 3x^2 - \pi \cos \pi x$$

이고 $f(x)$ 의 모든 극값의 합이 2일 때, $f(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

12. 모든 양의실수 x 에 대하여 부등식

$$x^2 + x + \frac{5}{4} \geq \ln kx$$

이 성립하도록 하는 상수 k 의 최댓값은? [3점]

- ① e ② $2e$ ③ e^2 ④ $2e^2$ ⑤ $3e^2$

13. 다음 등식을 만족시키는 세 양의 실수 a, b, c 가 있다.

$$a = -\log_2 a, \quad b = -2\log_3 b, \quad c = 3^{-c}$$

이때, 세 실수 a, b, c 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [3점]

- ① $a < b < c$ ② $b < a < c$ ③ $b < c < a$
 ④ $c < b < a$ ⑤ $c < a < b$

14. 임의의 양의 실수 t 에 대하여 함수

$$f(x) = 2\ln x + x^2 + k$$

위의 임의의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선이 제 2사분면을 지나지 않기 위한 k 의 최댓값은? [4점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

15. 수열 $\{S_n\}$ 은 $S_1 = \frac{2}{3}$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{4k^2 + 3k + n}{4k^3 + (4n+2)k^2 + 2kn} \quad (n \geq 1) \text{을 만족시킨다.}$$

다음은 S_n 을 구하는 과정이다.

$S_n = \sum_{k=1}^n a_{n,k}$ 이라고 하면

$$a_{n,k} = \frac{4k^2 + 3k + n}{4k^3 + (4n+2)k^2 + 2kn} = \frac{2k(2k+1) + (k+n)}{2k(2k+1)(k+n)}$$

$$= \frac{1}{k+n} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \text{이 성립한다.}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{4k^2 + 3k + n}{4k^3 + (4n+2)k^2 + 2kn} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+n} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) + \boxed{(\text{가})}$$

이 때, $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} - \boxed{(\text{나})} \right)$

$$= \sum_{k=1}^n (a_{n,k} - \boxed{(\text{다})})$$

가 성립하므로 $\sum_{k=1}^n \frac{4k^2 + 3k + n}{4k^3 + (4n+2)k^2 + 2kn} = \boxed{(\text{가})}$

위의 (가),(나),(다)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(k), h(k)$ 이라 할 때,

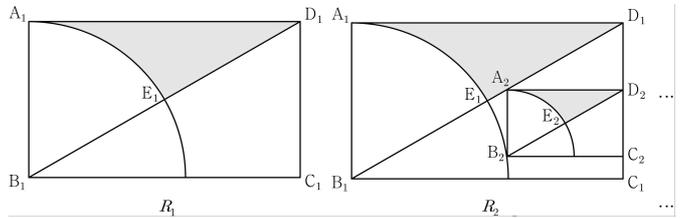
$\frac{h(10)}{f(10) \times g(20)}$ 의 값을 구하시오. [4점]

- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{21}$ ④ $\frac{1}{40}$ ⑤ $\frac{1}{41}$

16. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1} = 1, \overline{A_1D_1} = \sqrt{3}$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 점 B_1 을 중심으로 하고 점 A_1 을 지나는 사분원이 선분 B_1D_1 과 만나는 점을 E_1 이라 하자. 호 A_1E_1 과 두 선분 A_1D_1, D_1E_1 으로 둘러싸인 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 D_1E_1 위의 점 A_2 , 점 B_1 을 중심으로 하고 점 A_1 을 지나는 사분원 위의 점 B_2 , 선분 C_1D_1 위의 두 점 C_2, D_2 를 꼭짓점으로 하고, $\overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2} = 1 : \sqrt{3}$ 인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에서 점 B_2 을 중심으로 하고 점 A_2 를 지나는 사분원이 선분 B_2D_2 와 만나는 점을 E_2 라 하자. 호 A_2E_2 와 두 선분 A_2D_2, D_2E_2 로 둘러싸인 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]

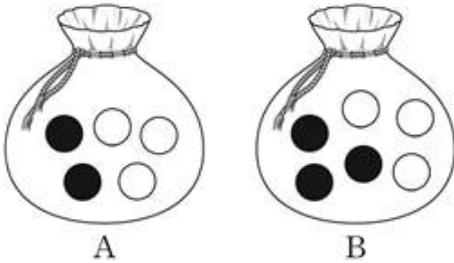


- ① $\frac{49}{240}(3\sqrt{3} - \pi)$ ② $\frac{5}{24}(3\sqrt{3} - \pi)$ ③ $\frac{51}{240}(3\sqrt{3} - \pi)$
 ④ $\frac{13}{60}(3\sqrt{3} - \pi)$ ⑤ $\frac{53}{240}(3\sqrt{3} - \pi)$

17. 주머니 A에는 검은 공 2개와 흰 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 검은 공 3개와 흰 공 3개가 들어 있다. 동전을 하나 던져서 앞면이 나오면 주머니 A에서 2개의 공을 꺼내고 뒷면이 나오면 주머니 B에서 2개의 공을 꺼내는 시행을 한다. 매회 시행마다 꺼낸 공들 중 검은 공이 있으면 1점을 얻고, 그렇지 않으면 2점을 잃는다.

0점에서 시작하여 192회의 시행 후 획득한 점수가 48점 이상 66점 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938



- ① 0.1525
- ② 0.3413
- ③ 0.4772
- ④ 0.6826
- ⑤ 0.8185

18. $x > 0$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = |\sin(\pi\sqrt{x})|$$

에 대하여 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 미분 불가능한, 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (n 은 자연수)라 할 때, 수열 $\{a_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\alpha_{n+2} + h^n) - f(\alpha_n - h^n)}{h^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\pi}{6}$
- ② $\frac{\pi}{4}$
- ③ $\frac{\pi}{3}$
- ④ $\frac{5\pi}{12}$
- ⑤ $\frac{\pi}{2}$

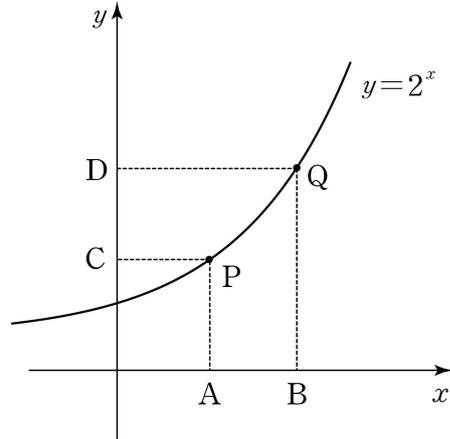
19. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택한다. 선택한 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 2일 때, 선택한 함수 f 에 대하여 함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수가 1일 확률은? [4점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{10}{21}$ ⑤ $\frac{11}{21}$

20. 그림과 같이 곡선 $y = 2^x$ 의 서로 다른 두 점 P, Q에서 각각 x 축에 내린 수선의 발 A, B와 y 축에 내린 수선의 발 C, D에 대하여 P의 x 좌표가 t 일 때 사각형 ABQP와 사각형 CDQP의 넓이가 같아지도록 하는 점 Q의 x 좌표를 $f(t)$ 라 하자.

$f(k) = k + 2$ 를 만족시키는 양의 상수 k 와 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 중 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단 $0 < t < \log_2 e < f(t)$) [4점]



<보 기>

ㄱ. $0 < x_1 < x_2 < \log_2 e$ 를 만족시키는 임의의 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다.

ㄴ. $f'(k) = \frac{8\ln 2 - 12}{8\ln 2 - 3}$ 이다.

ㄷ. $f(1) = 2$ 이고, $\int_k^1 f(x) dx = s$ 라 할 때,

$$\int_k^1 \ln f(x) dx = \left(s - \frac{17}{18}\right) \ln 2 + \frac{2}{3} \ln 3 - \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을

$$b_n = \frac{31}{30}(a_n + (-1)^n a_n)$$

이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \neq 0$ 일 때,

$$\sum_{n=1}^m a_n = \sum_{n=1}^m b_n$$

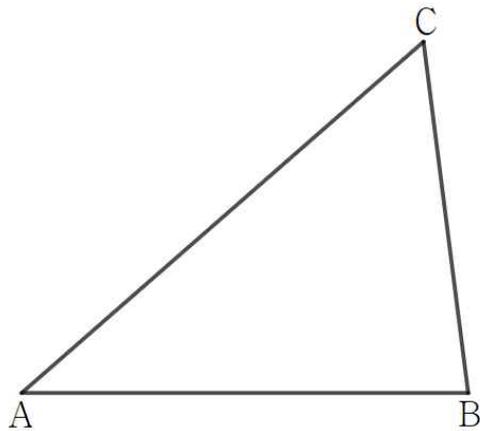
을 만족시키는 자연수 m 의 값은? [4점]

- ① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

단답형

22. 6개의 문자 a, a, a, b, b, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오. [3점]

23. $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 5 : 4 : 6$ 를 만족시키는 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이가 4이다. $(\overline{AC})^2$ 의 값을 구하시오. [3점]



24. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 1 - \cos 4t, \quad y = \frac{1}{4} \sin 4t$$

이다. 점 P의 속력이 최대일 때, 점 P의 가속도의 크기를 구하시오.
[3점]

25. 자연수 n 이 $2 \leq n \leq 10$ 일 때,

$$2 - |n-6|$$

의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n 의 값의 합을 구하시오. [3점]

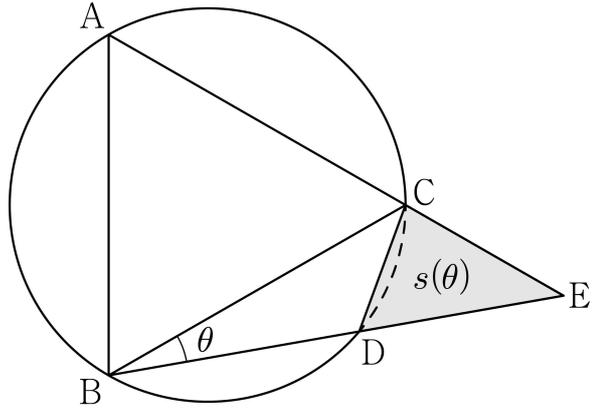
26. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$7^{n-1}a_1 + 7^{n-2}a_2 \cdots + 7a_{n-1} + a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 어느 지역 주민들의 하루 여가 활동 시간은 평균이 m 분, 표준편차가 σ 분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역 주민 중 144명을 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 이다. 이 지역 주민 중 16명을 다시 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $c \leq m \leq d$ 이다. 세 양수 $c-a, b-c, d-b$ 가 등비수열을 이룰 때, $12\left(\frac{d-a}{b-c}\right)$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원에 정삼각형 ABC 가 내접하고 있다. 점 B 를 지나는 직선이 원과 만나는 점을 D 라 하고, 직선 BD 와 직선 AC 가 만나는 점을 E 라 하자. $\angle CBD = \theta$ 라 할 때, 삼각형 CDE 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값을 k 라 할 때, k^2 의 값을 구하시오. [4점]



29. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$

(나) 집합

$$X = \{x_n \mid x_n (n = 1, 2, 3, 4, 5)\}$$

의 원소의 개수는 4이다.

30. 실수 전체집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$ 와 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 직선 $y = -x + t + 2$ 와 만나서 생기는 교점의 x 좌표를 각각 $g(t), h(t)$ 라 하자. 함수 $f(x), g(x)$ 가 아래의 조건을 만족시킬 때, $\int_1^4 h(x) dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\int_1^2 f(x) dx = 3$

(나) $g(1) = 1, g(4) = 2$

2021학년도 우주설 모의평가

설바이별 4회

발행일 : 2020년 10월 10일

지은이 : 우주설(정재민)

본 모의평가에 대한 저작권은 로물콘 카페 수학 스태프 우주설 (정재민)에게 있으며, 저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 영리적 목적으로 사용하거나 무단복제/2차적 저작물 작성 등으로 이용하는 일체의 행위는 정보통신망 이용촉진 및 정보보호, 저작권 관련 법률에 따라 금지되어 있으며 처벌받을 수 있습니다.

이번 회 공모문항 리스트: 15번, 16번, 28번, 30번

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.