

제 2 교시

수학 영역(가형&나형)

1,2번 ⇨ 수1

3,4번 ⇨ 확통

5,6번 ⇨ 수2

7,8번 ⇨ 미적분

→ 가형은 전문항 풀기, 나형은 1번~6번까지 풀기

랑데뷰 쉬사준킬은 2020년 3월부터 10월까지 주5일 [월화수목금] 나형 6문항 가형 6문항 또는 8문항 제공되는 수학테스지입니다. 월 20회, 연 160회 제작 계획입니다. 모든 문항은 랑데뷰 수학 연구소에서 그동안 제작해 온 변형 및 자작 문항으로 구성됩니다.

구매 문의 (pdf 및 한글 판매)

카톡 : hbb100

전번 : 010-5673-8601

[⇨ 1회~160회 총 1280문항 모두 제작 완료되었습니다.]

5지선다형

단답형

1. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

을 만족할 때, 모든 자연수 m 에 대하여 a_{4m} 은 12의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

(i) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 12$

이므로 a_4 는 12의 배수이다.

(ii) $m = k$ 일 때, a_{4k} 가 12의 배수라고 가정하면

$$a_{4(k+1)} = a_{4k+4}$$

$$= 2a_{(가)} + a_{(나)}$$

$$= 12a_{4k+1} + (다)a_{4k}$$

따라서, $m = k+1$ 일 때, $a_{4(k+1)}$ 도 12의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 m 에 대하여 a_{4m} 은 12의 배수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k)$ 이라 하고 (다)에 알맞은 수를 a 라 할 때, $f(a)+g(a)$ 의 값은? [4점] [랑데뷰수학]

- ① 41 ② 43 ③ 45 ④ 47 ⑤ 49

2. 닫힌구간 $[-2\pi, 2\pi]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \sin\left(kx - \frac{1}{2}k\right) - 1, \quad g(x) = 2\cos(24x - 12)$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 합은?

[4점] [랑데뷰수학]

실수 a 가 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 의 교점의 y 좌표이면 $\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$ 이다.

- ① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤

3. 두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(m, 3^2)$, $N(2m-10, 4^2)$ 을 따르고

$$2P(m \leq X \leq 18) = P(5 \leq Y \leq 4m-25)$$

일 때, 상수 m 에 대하여 $10m$ 의 값을 구하시오.³⁾(단, $m < 18$)
[4점] [량데뷰수학]

4. 전체집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 공집합이 아닌 모든 부분집합 15개가 각각 적힌 크기와 모양이 같은 카드 15장이 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 카드를 한 장씩 두 번 꺼낼 때, 첫 번째 카드에 적힌 집합을 A , 두 번째, 카드에 적힌 집합을 B 라고 하자. $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.⁴⁾(단, 꺼낸 카드는 다시 넣고 p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점] [량데뷰수학]

5. 함수 $f(x) = (x+1)(x-2)^2$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

가 실수 전체의 집합에서 $g(x) \geq 0$ 일 때, a^2 의 값을 구하시오.⁵⁾
(단, a 는 실수이다.) [4점] [랑데뷰수학]

6. 도함수가 $f'(x) = x^2 - 5x + 6$ 인 함수 $f(x)$ 와 양수 k 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq k \text{ 또는 } x \geq 2k) \\ \frac{f(2k) - f(k)}{k}(x - k) + f(k) & (k < x < 2k) \end{cases}$$

의 역함수가 존재하도록 하는 k 값의 범위가 $\alpha < k \leq \beta$ 일 때,
 $\beta - \alpha$ 의 값은?⁶⁾ [4점] [랑데뷰수학]

- ① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{4}{7}$

7. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 상수 a 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $-1 \leq x \leq 1$ 일 때, $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 이다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = f(x) + a$ 이다.

$\int_0^{10a} f(x)dx$ 의 값을 구하시오. [4점] [량데뷰수학]

8. 함수 $f(x) = \cos(\pi\sqrt{x})$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x t(2x-t)f(x-t)dt \quad (x \geq 0)$$

이고 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 함수 $h(x) = \frac{1}{2}g''(x) - xf(x)$ 이 $x=a$ 에서 극값을 가지는 모든 a 를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를

a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n a_{n+1}}}$ 의 값을 구하시오. [4점] [량데뷰수학]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입 (표기)했는지 확인하시오.

량대부 쉬사준킬 제163회 해설

1	2	3	4
③	③	117	67
5	6	7	8
1	②	200	2

출제

대구 송원학원 황보백 선생님

1) 정답 ③

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

(i) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 12$

이므로 a_4 는 12의 배수이다.

(ii) $m = k$ 일 때, a_{4k} 가 12의 배수라고 가정하면

$$\begin{aligned} a_{4(k+1)} &= a_{4k+4} \\ &= 2a_{4k+3} + a_{4k+2} \\ &= 2(2a_{4k+2} + a_{4k+1}) + a_{4k+2} \\ &= 5a_{4k+2} + 2a_{4k+1} \\ &= 5(2a_{4k+1} + a_{4k}) + 2a_{4k+1} \\ &= 12a_{4k+1} + 5a_{4k} \end{aligned}$$

따라서, $m = k+1$ 일 때, $a_{4(k+1)}$ 도 12의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 m 에 대하여 a_{4m} 은 12의 배수이다.

그러므로 $f(k) = 4k+3, g(k) = 4k+2$ 이고 $a = 5$ 이므로

$$f(a) + g(a) = f(5) + g(5) = 23 + 22 = 45$$

2) 정답 ③

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$$f(x) = \sin\left\{k\left(x - \frac{1}{2}\right)\right\} - 1, g(x) = 2\cos\left\{24\left(x - \frac{1}{2}\right)\right\} \text{이므로}$$

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 $y = \sin kx - 1$ 와 $y = 2\cos 24x$ 를 x 축으로 $\frac{1}{2}$

만큼 평행이동한 그래프이다. 따라서 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 교점의 y 좌표는 $y = \sin kx - 1$ 와 $y = 2\cos 24x$ 의 그래프의 교점의 y 좌표와 일치한다.

$y = 2\cos 24x$ 는 주기가 $\frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$ 이므로 정수 a 에 대하여 극대는

$x = \frac{2a}{24}\pi$ 에서, 극소는 $x = \frac{2a+1}{24}\pi$ 에서 나타난다. 따라서 $x = \frac{m\pi}{24}$

(m 은 정수)에 대칭인 그래프이다.

$y = \sin kx - 1$ 는 $x = \frac{(2n+1)\pi}{2k}$ (n 은 정수)에 대칭인 그래프이다.

조건을 만족하기 위해서는 함수 $f(x)$ 의 주기가 $g(x)$ 보다 크지 않고 함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)$ 가 대칭축이 같으면 된다.

따라서 $2k$ 는 24의 약수이면 된다.

$2k = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ 이다.

따라서 k 가 자연수이므로 $k = 1, 2, 3, 4, 6, 12$

그러므로 k 의 합은 $1+2+3+4+6+12 = 28$ 이다.

3) 정답 117

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$P(5 \leq Y \leq 4m-25)$ 에서 $\frac{5+(4m-25)}{2} = 2m-10$ 이므로

표준화 하면

$$P(m \leq X \leq 18) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{18-m}{3}\right) \text{와}$$

$$P(5 \leq Y \leq 4m-25) = P\left(-\frac{2m-15}{4} \leq Z \leq \frac{2m-15}{4}\right) \text{에서}$$

$$\frac{18-m}{3} = \frac{(4m-25)-(2m-10)}{4} = \frac{(2m-10)-5}{4} \text{이 성립한다.}$$

$$\frac{18-m}{3} = \frac{2m-15}{4}$$

$$72 - 4m = 6m - 45$$

$$\therefore 10m = 117$$

4) 정답 67

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

복원추출 문제이다. 전체 경우의 수는 $15 \times 15 = 225$

$n(A) = a, n(B) = b$ 라 하면

a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대하여

(i) $a = 1$ 일 때,

$$\textcircled{㉠} (1, 1) \text{일 때, } 4 \times 3 = 12$$

$$\textcircled{㉡} (1, 2) \text{일 때, } 4 \times 3 = 12$$

$\Rightarrow \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ 중의 한 개 선택 : 4,

그 중 $\{1\}$ 을 선택했다면

$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ 중 한 개 선택 : 3

이면 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 을 만족한다.

$$\textcircled{㉢} (1, 3) \text{일 때, } 4 \times 1 = 4$$

따라서 $12 + 12 + 4 = 28$

(ii) $a = 2$ 일 때 : 집합 X 의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 ${}_4C_2 = 6$ 이다.

$$\textcircled{㉠} (2, 1) \text{일 때, } {}_6C_1 \times {}_2C_1 = 6 \times 2 = 12$$

$$\textcircled{㉡} (2, 2) \text{일 때, } {}_6C_1 \times {}_5C_1 = 6 \times 5 = 30$$

$\Rightarrow \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ 중의 한 개 선택 : 6,

그 중 $\{1, 2\}$ 을 선택했다면

$\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ 중 한 개 선택 : 5

이면 $A \not\subset B$ 이고, $B \not\subset A$ 를 만족한다.

㉔ (2, 3)일 때, $6 \times 2 = 12$

원소의 개수가 2인 집합이 $\{1, 2\}$ 일 때,

원소의 개수가 3인 집합 $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ 중 하나를 선택하는 경우이다.

따라서 $12 + 30 + 12 = 54$

(iii) $a = 3$ 일 때,

㉕ (3, 1)일 때, $4 \times 1 = 4$

㉖ (3, 2)일 때, $4 \times 3 = 12$

㉗ (3, 3)일 때, $4 \times 3 = 12$

따라서 $4 + 12 + 12 = 28$

$$\frac{28 + 54 + 28}{15 \times 15} = \frac{110}{225} = \frac{22}{45}$$

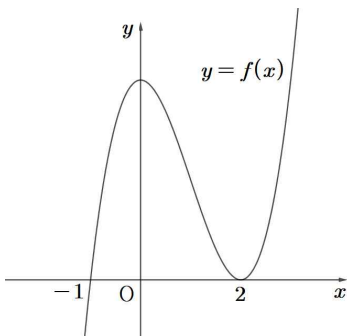
따라서 $p = 45$, $q = 22$

$$p + q = 67$$

5) 정답 1

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

삼차함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x \geq -1$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이므로 $\int_{-1}^x f(x)dx \geq 0$ 을 만족한다.

$x \leq -1$ 일 때, $f(x) \leq 0$ 이므로 $\int_x^{-1} f(x)dx \leq 0$ 이고

$$\int_{-1}^x f(x)dx \geq 0 \text{을 만족한다.}$$

따라서 $a = -1$ 이면 모든 실수 x 에 대하여

$$\text{함수 } g(x) = \int_{-1}^x f(x)dx \geq 0 \text{을 만족한다.}$$

그러므로 $a = -1$

$$a^2 = 1 \text{이다.}$$

6) 정답 ②

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0 \text{의 해는}$$

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 3 \text{이므로}$$

삼차함수 $f(x)$ 는 $x < 2$, $x > 3$ 에서 증가

$2 < x < 3$ 에서 감소한다.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq k \text{ 또는 } x \geq 2k) \\ \frac{f(2k)-f(k)}{2k-k}(x-k) + f(k) & (k < x < 2k) \end{cases}$$

$$k < x < 2k \text{에서 } g(x) = \frac{f(2k)-f(k)}{2k-k}(x-k) + f(k) \text{는}$$

두 점 $(k, f(k))$ 와 $(2k, f(2k))$ 을 지나는 직선을 의미한다.

함수 $g(x)$ 가 역함수가 존재하기 위해서는 $g(x)$ 가 증가함수가 되어야 한다.

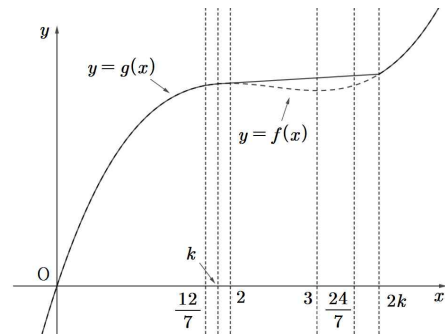
$k \geq 2$ 이고 $2k \geq 3$ 이어야 한다.

따라서 $\frac{3}{2} \leq k \leq 2 \cdots \textcircled{1}$ 이고 $f(k) < f(2k)$ 가 성립하면 된다.

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6 \text{에서 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + C \text{이고}$$

$$f(2k) = \frac{8}{3}k^3 - 10k^2 + 12k + C$$

$$f(k) = \frac{1}{3}k^3 - \frac{5}{2}k^2 + 6k + C$$



$$f(2k) - f(k)$$

$$= \frac{7}{3}k^3 - \frac{15}{2}k^2 + 6k > 0$$

$$k > 0 \text{이므로 양변에 } \times \frac{6}{k}$$

$$14k^2 - 45k + 36 > 0$$

$$(7k-12)(2k-3) > 0$$

$$k < \frac{3}{2} \text{ 또는 } k > \frac{12}{7} \cdots \textcircled{2}$$

따라서 ㉕, ㉖에서

$$\frac{12}{7} < k \leq 2$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{12}{7}, \beta = 2 \text{이므로}$$

$$\beta - \alpha = \frac{2}{7}$$

7) 정답 200

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

(가)에서 구간 $[-1, 1]$ 에서 주어진 함수를

$$f_1(x) = \frac{2x}{x^2+1} \text{라 하면 (나)에서}$$

$$f(x+2) = f_1(x) + a \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

양변에 $x \rightarrow x-2$ 를 대입하면

$$f(x) = f_1(x-2) + a \quad (-1 \leq x-2 \leq 1)$$

$$= \frac{2(x-2)}{(x-2)^2+1} + a \quad (1 \leq x \leq 3)$$

$$f_2(x) = \frac{2(x-2)}{(x-2)^2+1} + a \quad (1 \leq x \leq 3) \text{라 하자.}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체에서 정의되기 위해서는 $x=1$ 에서도 정의되어야 한다.

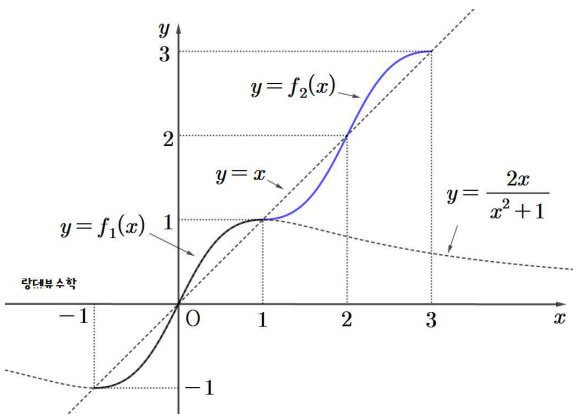
따라서 $f_1(1) = f_2(1)$ 이 성립해야 한다.

$$f_1(1) = 1, f_2(1) = \frac{-2}{2} + a = -1 + a$$

$1 = -1 + a$ 에서 $a=2$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{2x}{x^2+1} & (-1 \leq x \leq 1) \\ f_2(x) = f_1(x-2) + 2 & (1 \leq x \leq 3) \\ f_3(x) = f_2(x-2) + 3 & (3 \leq x \leq 5) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



함수 $f_1(x)$ 가 $f_1(-x) = -f_1(x)$ 가 성립하므로 $(0, 0)$ 에 대칭이다.

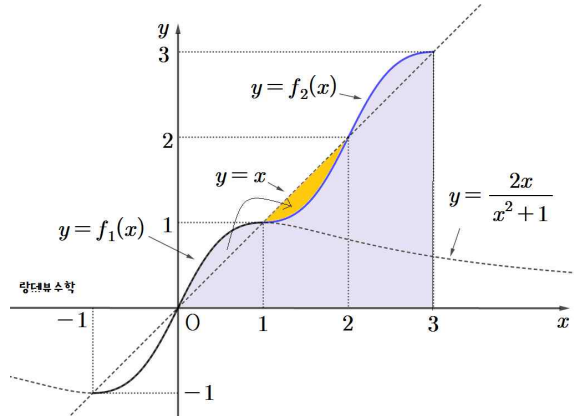
따라서 함수 $f_2(x)$ 는 $(2, 2)$ 에 대칭이다.

그러므로 함수 $f(x)$ 의 정적분 값은 다음 그림과 같이 $y=x$ 을 기준으로 이동시켜 직각이등변 삼각형의 넓이로 계산할 수 있다.

따라서

$$\int_0^{10a} f(x) dx$$

$$= \int_0^{20} f(x) dx = \frac{1}{2} \times 20 \times 20 = 200$$



8) 정답 2

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$$g(x) = \int_0^x t(2x-t)f(x-t)dt$$

우변의 $x-t=s$ 라 두면

$t: 0 \rightarrow x, s: x \rightarrow 0$ 이고

$-dt = ds$ 이므로

$$\int_0^x t(2x-t)f(x-t)dt$$

$$= \int_x^0 (x-s)(x+s)f(s)(-ds)$$

$$= \int_0^x x^2 f(s) ds - \int_0^x s^2 f(s) ds$$

$$g(x) = x^2 \int_0^x f(s) ds - \int_0^x s^2 f(s) ds \text{의 양변 미분하면}$$

$$g'(x) = 2x \int_0^x f(s) ds + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 2x \int_0^x f(s) ds$$

$$g''(x) = 2 \int_0^x f(s) ds + 2xf(x)$$

$$g''(x) - 2xf(x) = 2 \int_0^x f(s) ds$$

따라서

$$h(x) = \frac{1}{2} g''(x) - xf(x) = \int_0^x f(s) ds \text{이다.}$$

$$h'(x) = f(x) = \cos(\pi\sqrt{x})$$

$$h'(x) = \cos(\pi\sqrt{x}) = 0 \text{의 해가}$$

$$x \geq 0 \text{에서 } x = \frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{25}{4}, \dots \text{이므로}$$

$$\text{자연수 } n \text{에 대하여 } a_n = \frac{(2n-1)^2}{4} \text{이다.}$$

따라서 $a_{n+1} = \frac{(2n+1)^2}{4}$ 이므로

$$a_n a_{n+1} = \left\{ \frac{(2n-1)(2n+1)}{4} \right\}^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n a_{n+1}}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= 2 \times 1 = 2$$