제 2 교시

이과루트 모의고사 1회 문제지

수학 영역
(가 형)

성명	

수험 번호					—				

○ 자신이 선택한 유형(가 형/나 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

몰래 뒤에서 안아 널 놓지 않을래

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

Pizzaroot

제 2 교시

수학 영역(가 형)

i

5지선다형

1. $\sin^2\dfrac{2\pi}{3}+\cos^2\dfrac{\pi}{3}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3x-1}+\sin x}{x-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n(n+1)}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

4. 함수 $f(x)=\int_0^x 2^t\,dt$에 대하여 $f(0)+f'(1)$의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

5. 두 사건 A와 B에 대하여

$$\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(A\cup B)=2$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, $\mathrm{P}(B)\neq 0$) [3점]

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

6. $\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$일 때, $\tan(\alpha+\beta)$의 값은? [3점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

7. 두 함수 $f(x)=e^x$, $g(x)=x^3-2x+1$에 대하여 $h(x)=f(g(x))$라 할 때, $h'(0)$의 값은? [3점]

① $-2e$ ② $-e$ ③ 0 ④ e ⑤ $2e$

8. 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 $\sin^2 x + \cos x = 1$를 만족시키는 x의 값의 합은? [3점]

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

9. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져서 나온 두 눈의 수가 서로 다를 때, 나온 두 눈의 수의 곱이 홀수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

10. 첫째항이 3이고 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 + a_6 = 0$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{6} r^n \times a_n$의 값은? (단, r은 실수) [3점]

① -18 ② -9 ③ 0 ④ 9 ⑤ 18

11. 피자헛에서 파는 치즈 팬피자 1조각의 무게는 평균이 91g, 표준편차가 9g인 정규분포를 따른다고 한다. 피자헛에서 주문한 치즈 팬피자 한 판의 무게가 800g 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 피자 한 판의 무게는 피자 8조각의 무게의 합으로 계산한다.) [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587 ④ 0.1915 ⑤ 0.3085

12. $\overline{\mathrm{AB}}=5$이고 넓이가 6인 직각삼각형 ABC에 대하여 $\angle\mathrm{A}=\theta$일 때, $\tan\theta$의 값이 될 수 있는 모든 수의 합은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [3점]

① $\frac{769}{300}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ $\frac{791}{300}$ ④ $\frac{401}{150}$ ⑤ $\frac{271}{100}$

13. 부등식 $\log_{(x-2)}9+\log_3(x-2)\le 3$을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

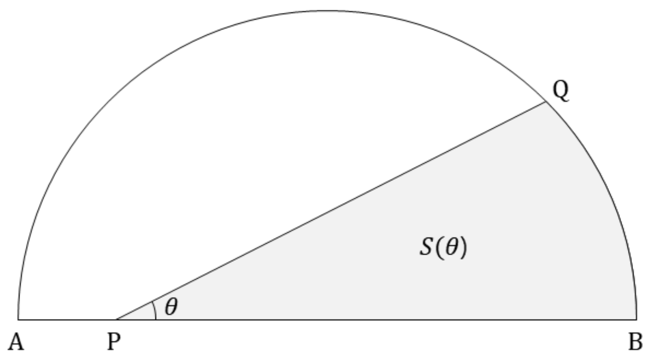
① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

14. 함수 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{12-x}}$에 대하여 $\displaystyle\int_3^6 f(x)f'(12-x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}\ln 2$ ② $\frac{1}{2}\ln 2$ ③ $\frac{2}{3}\ln 2$ ④ $\frac{1}{3}\ln 3$ ⑤ $\frac{1}{2}\ln 3$

15. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원을 C라 하고, 선분 AB 위의 점 P와 호 AB 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} = \angle \mathrm{QPB} = \theta$일 때, 선분 PQ, 선분 PB, 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < 1$) [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

16. 1부터 9까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 6개의 수를 선택한다. 선택한 수 중 가장 큰 짝수를 a, 가장 큰 홀수를 b라 하자. $b > a$일 때, 9가 선택될 확률은? [4점]

① $\frac{27}{31}$ ② $\frac{55}{62}$ ③ $\frac{28}{31}$ ④ $\frac{57}{62}$ ⑤ $\frac{29}{31}$

17. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n = \log(n^2+5n+6) + 2\sum_{k=1}^{n+1} \log k$$

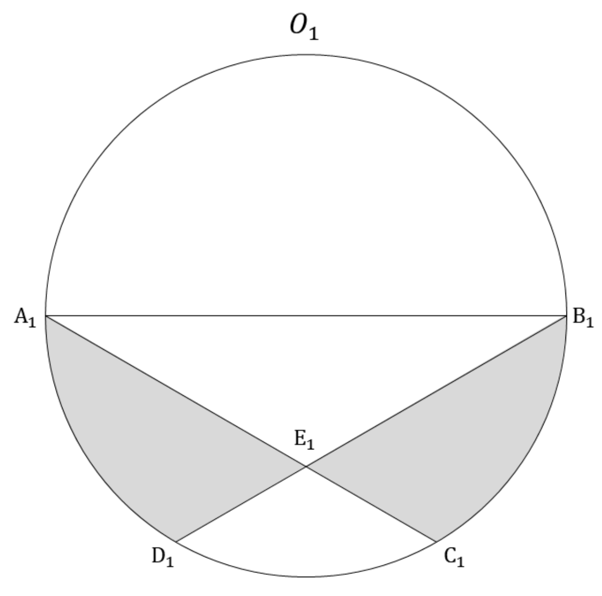
를 만족시킨다. 다음은 $10^{a_n} \times \dfrac{10^{a_{n+1}}-1}{10^{a_n}-1}$을 구하는 과정이다.

> $n=1$일 때, $a_1 = \log 48$, $a_2 = \log 15$이므로
>
> $10^{a_1} \times \dfrac{10^{a_2}-1}{10^{a_1}-1} = \dfrac{672}{47}$ 이다.
>
> $n \geq 2$일 때, $b_n = 10^{S_n}$이라 하면,
>
> $\log b_n = \log(n^2+5n+6) + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \log k$
>
> 이므로 $b_n = 10^{S_n} = (n+1)! \times \boxed{\text{(가)}}$ 이다.
>
> 따라서
>
> $10^{S_n}(10^{a_{n+1}}-1) = (n+1)! \times \boxed{\text{(가)}} \times \boxed{\text{(나)}}$
>
> 이므로
>
> $$10^{a_n} \times \frac{10^{a_{n+1}}-1}{10^{a_n}-1} = \frac{10^{S_n}}{10^{S_{n-1}}} \times \frac{10^{a_{n+1}}-1}{10^{a_n}-1} = \frac{n^4+10n^3+34n^2+46n+21}{\boxed{\text{(다)}}}$$
>
> 이다.

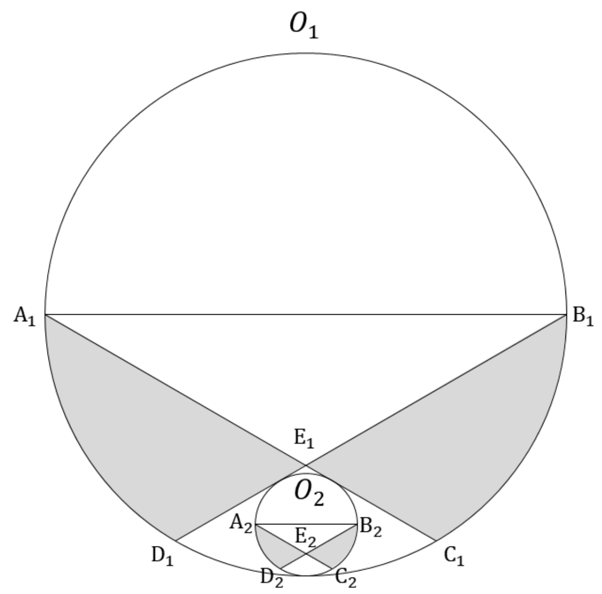
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\dfrac{f(4)}{g(7)} - h(5)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{23}{7}$　② $\dfrac{25}{7}$　③ $\dfrac{27}{7}$　④ $\dfrac{29}{7}$　⑤ $\dfrac{31}{7}$

18. 길이가 2인 선분 $\mathrm{A_1B_1}$를 지름으로 하는 원 O_1이 있다. 그림과 같이 $\angle \mathrm{C_1A_1B_1} = \dfrac{\pi}{6}$, $\angle \mathrm{D_1B_1A_1} = \dfrac{\pi}{6}$가 되도록 호 AB 위의 두 점 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{D_1}$을 잡는다. 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{B_1D_1}$의 교점을 $\mathrm{E_1}$이라 하고 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{B_1D_1}$와 두 호 $\mathrm{A_1D_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$로 둘러싸인 부분인 모양의 도형을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

① $\dfrac{(10\sqrt{3}+16)(\pi-\sqrt{3})}{198}$　② $\dfrac{(10\sqrt{3}+17)(\pi-\sqrt{3})}{99}$

③ $\dfrac{(10\sqrt{3}+17)(2\pi-\sqrt{3})}{198}$　④ $\dfrac{(10\sqrt{3}+16)(2\pi-\sqrt{3})}{99}$

⑤ $\dfrac{(10\sqrt{3}+16)(2\pi-\sqrt{3})}{198}$

19. 직선 $y=-x+k$가 $y=2^x$, $y=\log_3 x$와 만나는 점의 좌표를 각각 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=1$일 때, $x_1+x_2=y_1+y_2$이다.
ㄴ. $x_1+x_2=0$인 k의 값을 α라 할 때, $\alpha>0$이다.
ㄷ. $y_1+y_2=0$인 k의 값을 β라 할 때, $\beta>0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 함수 $f(x)=2xe^x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$ $(k>0)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 자연수 n이 되도록 하는 k의 값들 중 가장 작은 수를 a_n이라 할 때, $\int_{\ln a_1 - \ln 2}^{\ln a_2 - \ln 2} xf(x)dx$의 값은? [4점]

① -6 ② -2 ③ 2 ④ 6 ⑤ 10

21. 다음 조건을 만족하는 40 이하의 자연수 k의 개수는? [4점]

구간 $\left(0, \dfrac{k\pi}{4}\right]$에서 $y = \sin kx$와 $y = \cos kx$의 교점의 x좌표의 값의 합은 $n\pi$이다. (단, n은 자연수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

단답형

22. $\log_3({}_9\Pi_4)$의 값을 구하시오. [3점]

23. $\left(2x^3 + \dfrac{1}{2x}\right)^{10}$의 전개식에서 x^{10}의 계수를 구하시오. [3점]

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(7, \frac{2}{a}\right)$를 따른다. $\mathrm{E}(2X-a)$의 최댓값을 구하시오. [3점]

25. 매개변수 t $(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x = t\ln t - t, \quad y = e^t$$

에 대하여 $t=e$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은 α이다. $\ln(\ln\alpha)$의 값을 구하시오. [3점]

26. 동전 4개를 동시에 던지는 시행을 n번 반복할 때, 동전 4개가 모두 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X \geq 1)$의 값이 $\frac{1}{2}$보다 크도록 하는 n의 최솟값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$으로 계산한다.) [4점]

27. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \begin{cases} n & (n\text{은 홀수}) \\ a_{\frac{n}{2}} & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

28. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x) = ae^{3x} + be^{2x}$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 실수 t에 대하여 $f'(t-\ln 3)f'(t+\ln 3) < 0$을 만족시키기 위한 필요충분조건은 $\ln\frac{2}{3} < t < \ln 6$이다.
>
> (나) $0 < x_1 < x_2 < k$, $f'(x_1) = f'(x_2)$를 만족시키는 두 실수 x_1, x_2가 존재하도록 하는 k의 값의 범위가 $m < k$ 일 때, $f(m) = \frac{80}{27}$이다.

29. 주머니 속에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 카드를 1개씩 모두 꺼내어 일렬로 나열한다. 두 카드의 자리를 바꾸는 시행을 할 수 있을 때, 모든 카드가 작은 수부터 크기순으로 나열되기 위해 해야 하는 최소의 시행 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X) = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 함수 $f(x) = (x-a)e^x + a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 0) \\ -f(-x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하고, 실수 t에 대하여 $g(x) = t$를 만족시키는 실수 x의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(t)$가 불연속인 t의 값이 α, β로 2개 존재할 때,
$\lim_{t \to \alpha+} h(t) - h(\beta) = \frac{e^a}{ae}$이다. (단, $\alpha < \beta$)

(나) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $k(x)$에 대하여 $(k \circ h)(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

a의 값이 최소일 때 $h(0) \times k(4)$의 값을 p, a의 값이 최대일 때 $h(0) \times \lim_{x \to \infty} g(x)$의 값을 q라 하자. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, a는 양의 상수이고, $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$이다.) [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.