2021학년도 설바이벌 1회 문제지

수학 영역
(가 형)

성명		수험번호						–				

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

아마추어는 걱정하는 대로, 프로는 상상하는 대로 된다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

○ 문제에 관한 저작권은 로물콘 카페 수학 스탭 우주설 (정재민)에게 있습니다.

우 주 설 모 의 평 가

2021학년도 설바이벌 1회 문제지

제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

2. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

3. 5개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 3개의 수를 택할 때, 택한 세 수의 곱이 4의 배수인 경우의 수는? [2점]

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

4. $\lim_{n\to\infty} n\times\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}+n}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

5. 함수 $y=2^{2x}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 y축의 방향으로 b만큼 평행 이동한 그래프가 $y=4^{x-1}-1$의 그래프와 일치할 때, $a+b$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

6. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=t-\sin t\cos t, \quad y=\frac{1}{\tan t}$$

이다. $0<t<\frac{\pi}{2}$에서 점 P의 속력의 최솟값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

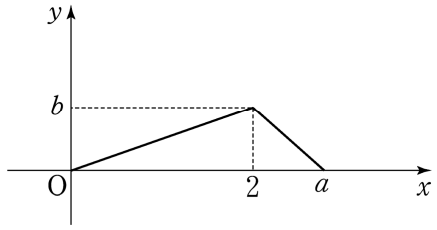
7. 곡선 $e^{xy}=2x^2+y$ 위의 점 $(0, a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $a+b$의 값은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

이 문제지에대한 저작권은 우주설(정재민)에게 있습니다.

8. 두 양수 a, b에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, 확률밀도함수의 그래프는 다음과 같다.

$\mathrm{P}\left(0 \le X \le \frac{a}{2}\right) = \frac{b}{2}$일 때, a^2+b^2의 값은? [3점]



① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{17}{2}$ ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ $\frac{21}{2}$

9. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이

$a_{n+2} = a_n + 3$

을 만족시킨다. $a_1 + a_2 = 0$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [3점]

① 30 ② 45 ③ 60 ④ 75 ⑤ 90

10. 함수

$$f(x) = \left(x^3 + \frac{a}{x}\right)^4$$

에 대하여 $f'(x)$의 전개식에서 x^3의 계수가 54일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

문제지에대한 영리목적 사용 및 무단 수정을 금지합니다.

11. 함수 $f(x)=\frac{e^{2x}}{\sin x}$에 대하여 $0<x<\pi$에서 방정식 $f(x)=f'(x)$의 실근은? [3점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}\pi$

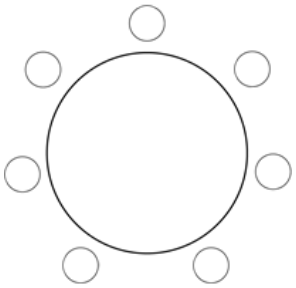
12. 좌표평면 위의 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P, Q에 대하여 동경 OP, OQ가 나타내는 각을 각각 $\theta, 4\theta$라 하자. $0<\theta<2\pi$일 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 θ의 합은? (단, 점 O는 원점이다.) [3점]

좌표평면 위의 직선 OP와 직선 OQ가 일치한다.

① 4π ② $\frac{13}{3}\pi$ ③ $\frac{14}{3}\pi$ ④ 5π ⑤ $\frac{16}{3}\pi$

이 문제지에대한 저작권은 우주설(정재민)에게 있습니다.

13. 그림과 같이 원형 탁자에 일정한 간격으로 놓여 있는 7개의 의자에 남학생 3명과 여학생 4명 모두가 이 7개의 의자에 앉으려고 한다. 남학생 3명 중 2명만 이웃하도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 360 ② 396 ③ 432 ④ 468 ⑤ 504

14. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이

$$\frac{a_{n+1}}{n} \geq \frac{a_n}{{a_n}^2+n-1}$$

를 만족시킬 때, 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geq n \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 보이는 과정이다.

$\frac{a_{n+1}}{n} \geq \frac{a_n}{{a_n}^2+n-1}$의 양변에 역수를 취하면

$\frac{n}{a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_n} \leq a_n$ 이고, 이것으로 부터 부등식

$\frac{\boxed{(가)}}{a_{n+1}} \leq a_1+a_2+\cdots+a_n$ … ㉠

를 얻는다.

한편, 주어진 부등식 $a_1+a_2+\cdots+a_n \geq n$ …… (*) 에서

(i) $n=2$일 때,

$a_1+a_2 \geq \frac{1}{a_2}+a_2 \geq 2$ 이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $a_1+a_2+\cdots+a_k \geq k$ 라고 가정하면

$a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+a_{k+1}$ … ㉡를 얻는다.

$a_{k+1} \geq \boxed{(나)}$인 경우

㉡에 의해 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+1$

이 성립하고,

$a_{k+1} < \boxed{(나)}$인 경우

㉠에 의해 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq \frac{k}{a_{k+1}}+a_{k+1}$

$= \frac{k-1}{a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+1}} + a_{k+1}$

$\geq \frac{k-1}{a_{k+1}} + 2$ … ㉢

이고, ㉢에 의해 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+1$

이 성립한다. 따라서 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2이상의 모든 자연수 n에 대하여

$a_1+a_2+\cdots+a_n \geq n$

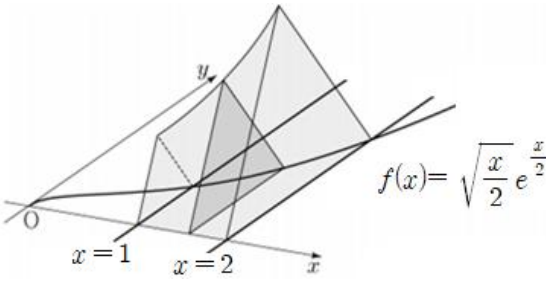
이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 수를 α라 할 때, $f(7)+\alpha$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제지에대한 영리목적 사용 및 무단 수정을 금지합니다.

15. 그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}}$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형인 입체도형의 부피는? [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{16}e^2$ ② $\frac{\sqrt{3}}{8}e^2$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{16}e^2$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}e^2$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{16}e^2$

16. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 적힌 7개의 공이 들어있는 주머니에서 1이 적힌 공이 나올 때까지 공을 하나씩 꺼내어 다시 집어넣지 않는 시행을 반복한다. 주머니에서 공을 4개 꺼내어 시행이 종료되었을 때, 2 또는 3이 적힌 공을 꺼내었을 확률은? [4점]

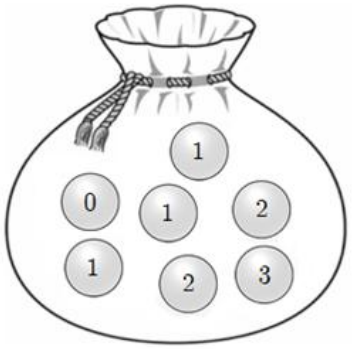
① $\frac{13}{20}$ ② $\frac{7}{10}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{17}{20}$

이 문제지에대한 저작권은 우주설(정재민)에게 있습니다.

17. 양의 상수 m에 대하여 좌표평면위의 직선 $y=mx$가 $y=4^{-x}$의 그래프와 만나는 점을 A, $y=2^{x}$의 그래프와 만나는 두 점 중 x좌표의 값이 작은 것을 B라 하자. 점 A를 지나고 y축에 수직인 직선이 $y=2^{x}$의 그래프와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선이 $y=4^{-x}$의 그래프와 만나는 점을 D라 하자. 사각형 ABDC가 평행사변형일 때, $\log_2 m$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

18. 그림과 같이 주머니에 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 세 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, 꺼낸 공에 적힌 세 수가 모두 같으면 $X=0$이다.) [4점]



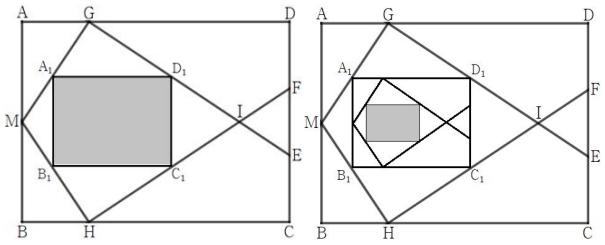
① $\frac{52}{35}$ ② $\frac{54}{35}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{58}{35}$ ⑤ $\frac{12}{7}$

문제지에대한 영리목적 사용 및 무단 수정을 금지합니다.

19. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$인 직사각형 ABCD에 대하여 선분 AB의 중점을 M라 하고, 선분 CD를 삼등분 하는 점들 중 C에 가까운 순서대로 E, F라 하자. 선분 AD위의 점 G와 선분 BC위의 점 H를 $\angle MGE = \angle MHF = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 선분 GE와 선분 HF의 교점을 I라 하자. 선분 MG, MH, HI, GI위의 네 점 A_1, B_1, C_1, D_1을 사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 선분 A_1B_1와 선분 AB가 평행하고 $\overline{A_1B_1}:\overline{B_1C_1}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡을 때, 사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이를 S_1이라하자.

직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에 대하여 같은 시행을 하여 얻은 사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 시행을 반복하여 얻은 사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, $\angle AMG = \angle BMH < \frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{169}{56}$ ② $\frac{85}{28}$ ③ $\frac{171}{56}$ ④ $\frac{43}{14}$ ⑤ $\frac{173}{56}$

20. 확률변수 X는 정규분포 $N(m, 4^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $N(2m, 4^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다. $f(15) \le g(27)$을 만족시키는 자연수 m에 대하여 $P(X \le 18)+P(18 \le Y)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 1.7745 ② 1.8185 ③ 1.8664 ④ 1.9104 ⑤ 1.9544

이 문제지에대한 저작권은 우주설(정재민)에게 있습니다.

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} e^{x}(x-2)^{2} & (x \geq 0) \\ f(x) & (x<0) \end{cases}$$

에 대하여 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $g(x), h(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

(가) 함수 $h(t)$는 두 점에서만 불연속이다.
(나) $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

단답형

22. 모평균이 20이고 모표준편차가 9인 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X}^{2})$의 값을 구하시오. [3점]

23. 예각삼각형 ABC에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{7}$이고, $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{3}$일 때, 선분 BC의 길이를 구하시오. [3점]

`

문제지에대한 영리목적 사용 및 무단 수정을 금지합니다.

24. 자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때,

$2-|n-5|$

의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

25. $0 < x < \pi$에서 정의된 함수

$f(x)=5\sin x\cos x-12\sin x+8$

의 변곡점의 좌표는 $(\alpha, f(\alpha))$이다. $30f(\alpha)$의 값을 구하시오. [3점]

26. 함수 $f(x)=|\sin^2 x-\cos x|$에 대하여 x에 대한 방정식

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오. (단, $0 < x < 3\pi$) [4점]

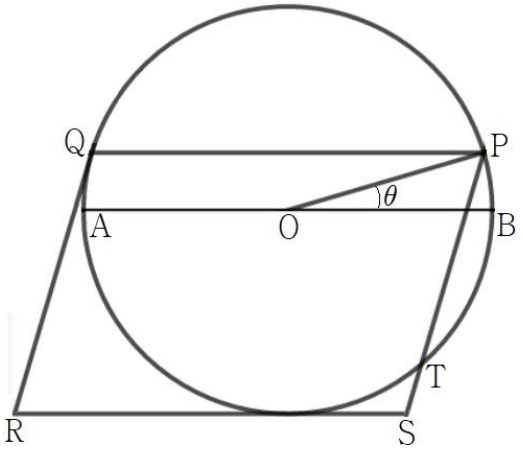
이 문제지에대한 저작권은 우주설(정재민)에게 있습니다.

27. 1부터 10까지 자연수가 적힌 10개의 공이 들어있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 공에 적혀있는 수를 a , 1부터 n까지 자연수가 적힌 n개의 공이 들어있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 공에 적혀있는 수를 b라 할 때, $a<b$인 사건을 A라 하고, a와 b중 4의 약수가 존재하는 사건을 B라 하자. 사건 A, B가 서로 독립이 되도록 하는 n의 값을 구하시오. (단, $n \geq 10$) [4점]

28. 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 점 P를 지나고 직선 AB와 평행한 직선이 원과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q에서의 접선 위의 점 R과 직선 QR과 평행하고 점 P를 지나는 직선 위의 점 S를 직선 RS가 원에 접하고 사각형 PQRS가 평행사변형이 되도록 잡는다. $\angle POB=\theta$일 때, 직선 PS가 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점 T에 대하여 선분 ST의 길이를 $f(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}-} \frac{f(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)^2}$의 값을 k라 할 때, $4k^2$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]



문제지에대한 영리목적 사용 및 무단 수정을 금지합니다.

29. 그림과 같이 흰 공 4개, 검은 공 4개, 회색 공 2개를 왼쪽에서부터 차례대로 나열한다. 왼쪽에서부터 차례대로 읽은 공의 색이 3번만 바뀌도록 공들을 나열하였을 때, 왼쪽에서부터 세 번째에 있는 공의 색과 네 번째에 있는 공의 색이 다를 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 열린구간 $(-1, 1)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\int_0^{3\pi} t\times|\cos t-x|\,dt$$

는 $x=\alpha$에서 극값을 갖는다. $0<k<\pi$인 $\cos k=\alpha$를 만족시키는 상수 $k=(-4+\sqrt{a})\pi$일 때, $2a$의 값을 구하시오. [4점]

이 문제지에대한 저작권은 우주설(정재민)에게 있습니다.

2021학년도 우주설 모의평가

설바이벌 1회

발행일 : 2020년 9월 19일
지은이 : **우주설**(정재민)

본 모의평가에 대한 저작권은 **로물콘 카페 수학 스탭 우주설 (정재민)**에게 있으며, 저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 영리적 목적으로 사용하거나 무단복제/2차적 저작물 작성 등으로 이용하는 일체의 행위는 정보통신망 이용촉진 및 정보보호, 저작권 관련 법률에 따라 금지되어 있으며 처벌받을 수 있습니다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.