

제 2 교시

수학 영역(가형&나형)

1,2번 ⇨ 수1

3,4번 ⇨ 확통

5,6번 ⇨ 수2

7,8번 ⇨ 미적분

→ 가형은 전문항 풀기, 나형은 1번~6번까지 풀기

랑데뷰 쉬사준킬은 2020년 3월부터 10월까지 주5일 [월화수목금] 나형 6문항 가형 6문항 또는 8문항 제공되는 수학테스지입니다. 월 20회, 연 160회 제작 계획입니다. 모든 문항은 랑데뷰 수학 연구소에서 그동안 제작해 온 변형 및 자작 문항으로 구성됩니다.

구매 문의 (pdf 및 한글 판매)

카톡 : hbb100

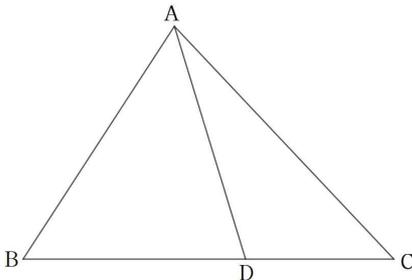
전번 : 010-5673-8601

[⇨ 1회~160회 총 1280문항 모두 제작 완료되었습니다.]

5지선다형	단답형
-------	-----

1. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 3 : 2으로 내분하는 점을 D라 하자. 실수 a에 대하여

$\sin(\angle BAD) : \sin(\angle CAD) = 1 : a$ 일 때, $\frac{\sin C}{\sin B} = ka$ 이다. k의 값은? [4점]



- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

2. 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 2a_{n+1} & (a_n \leq a_{n+1}) \\ \frac{1}{2}a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3 = 1, a_6 = 17$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은? [4점]

- ① -8 ② -7 ③ -1 ④ 1 ⑤ 7

3. 원점 O 를 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 가 있다. 한 개의 주사위를 던져서 5의 약수의 눈이 나오면 양의 방향으로 2만큼, 5의 약수가 아닌 눈이 나오면 음의 방향으로 1만큼 점 P 를 이동시킨다고 하자. 한 개의 주사위를 10번 던진 후의 점 P 의 좌표를 확률변수 X 라 할 때, $E(X)$ 의 값은? [4점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

4. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d+e=12$

(나) ab 는 짝수이다.

5. 최고차항의 계수가 a 인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(1-x)=f(1+x)$
- (나) 모든 실수 x 에 대하여 $|f'(x)| \geq -x^2+6x-6$ 이 성립한다.

양수 a 의 최솟값은? [4점]

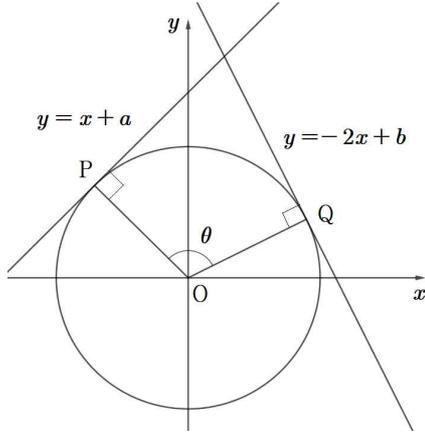
- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

6. $f(2)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 함수 $g(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $|f(x)-t|$ 의 미분가능하지 않은 점의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 는 $t=-\sqrt{3}, t=\sqrt{3}$ 에서만 불연속이다.

함수 $|f(x)f(2-x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $|f(3)|$ 의 값을 구하시오. [4점]

7. 두 직선 $y = x + a$, $y = -2x + b$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 점을 각각 P, Q라 하고, $\angle POQ = \theta$ 일 때, $\tan \theta$ 의 값은? (단, $a > 0$, $b > 0$) [4점]



- ① $-\sqrt{3}$ ② -2 ③ $-\sqrt{6}$ ④ -3 ⑤ $-\sqrt{10}$

8. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2^n$ 이다. $x \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 모든 자연수 n 에 대하여

$$f(x) = \frac{1}{3^{n-2}} \sin\left(\frac{\pi(x-a_n)}{2^{n-1}}\right) \quad (a_n \leq x \leq a_{n+1})$$

이다.

$0 < \alpha < 2$ 인 실수 α 에 대하여

$$\int_{\alpha}^t f(x) dx = 0$$

을 만족시키는 t ($t > 0$)의 값의 개수가 27일 때의

$\ln(1 - \cos(\alpha\pi))$ 의 값은 $p \ln 2 - q \ln 3$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입 (표기)했는지 확인하시오.

량테뷰 시사준킬 제161회 해설

1	2	3	4
④	①	③	210
5	6	7	8
④	27	④	27

출제

대구 송원학원 황보백 선생님

1) 정답 ④

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\overline{BD} : \overline{CD} = 3 : 2$ 이므로 $\overline{BD} = 3b$, $\overline{CD} = 2b$ 라 할 수 있다.

삼각형 ABD에서 사인법칙을 적용해서 \overline{AD} 를 표현하면

$$\frac{3b}{\sin(\angle BAD)} = \frac{\overline{AD}}{\sin B} \text{에서 } \overline{AD} = \frac{3b \times \sin B}{\sin(\angle BAD)}$$

삼각형 ACD에서 사인법칙을 적용해서 \overline{AD} 를 표현하면

$$\frac{2b}{\sin(\angle CAD)} = \frac{\overline{AD}}{\sin C} \text{에서 } \overline{AD} = \frac{2b \times \sin C}{\sin(\angle CAD)}$$

따라서

$$\frac{3b \times \sin B}{\sin(\angle BAD)} = \frac{2b \times \sin C}{\sin(\angle CAD)} \text{에서}$$

$$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{3}{2} \times \frac{\sin(\angle CAD)}{\sin(\angle BAD)}$$

$\sin(\angle BAD) : \sin(\angle CAD) = 1 : a$ 에서

$\sin(\angle CAD) = a \sin(\angle BAD)$ 이므로

$$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{3}{2} \times \frac{\sin(\angle CAD)}{\sin(\angle BAD)} = \frac{3}{2}a \text{이다.}$$

$$\text{그러므로 } k = \frac{3}{2}$$

2) 정답 ①

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$a_4 < a_5 < a_6 = 17$ 이므로 $a_6 = a_4 + 2a_5 = 17$ 이다.

a_3 와 a_4 의 크기는 알 수 없다.

(i) $1 = a_3 > a_4$ 일 때.

$$a_5 = \frac{1}{2} + a_4$$

$$a_4 + 2a_5 = 17$$

연립방정식을 풀면

$$3a_5 = \frac{35}{2}$$

$$a_5 = \frac{35}{6}$$

$$a_4 = \frac{16}{3}$$

$1 < \frac{16}{3}$ 으로 $a_3 < a_4$ 이므로 모순

(ii) $1 = a_3 \leq a_4$ 일 때.

$$a_5 = 1 + 2a_4$$

$$a_4 + 2a_5 = 17$$

연립방정식을 풀면

$$a_4 + 2 + 4a_4 = 17$$

$$a_4 = 3$$

따라서 $a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 7, a_6 = 17$ 이다.

(iii) $a_2 \leq a_3 = 1$ 일 때,

$$a_4 = a_2 + 2a_3 \text{이고}$$

$$3 = a_2 + 2 \text{에서 } a_2 = 1$$

$$\textcircled{1} \ a_2 = 1, a_3 = 1$$

$a_1 \leq a_2$ 일 때, $a_3 = a_1 + 2a_2$ 가 성립한다.

$$1 = a_1 + 2$$

$$a_1 = -1 \dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{2} \ a_2 = 1, a_3 = 1$$

$a_1 > a_2$ 일 때, $a_3 = \frac{1}{2}a_1 + a_2$ 가 성립한다.

$$1 = \frac{1}{2}a_1 + 1$$

$$a_1 = 0 \text{으로 모순}$$

(iv) $a_2 > a_3 = 1$ 일 때,

$$a_4 = \frac{1}{2}a_2 + a_3 \text{이고}$$

$$3 = \frac{1}{2}a_2 + 1 \text{에서 } a_2 = 4$$

$$\textcircled{1} \ a_2 = 4, a_3 = 1$$

$a_1 \leq a_2$ 일 때, $a_3 = a_1 + 2a_2$ 가 성립한다.

$$1 = a_1 + 8$$

$$a_1 = -7 \dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{2} \ a_2 = 4, a_3 = 1$$

$a_1 > a_2$ 일 때, $a_3 = \frac{1}{2}a_1 + a_2$ 가 성립한다.

$$1 = \frac{1}{2}a_1 + 4$$

$$a_1 = -6 \text{으로 모순}$$

따라서

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 가능한 a_1 의 값은 $-1, -7$ 이다.

따라서 합은 -8

3) 정답 ③

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

6이하의 자연수 중 5의 약수는 1과5로 2개다. 따라서 한 개의 주사위를 던져서 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다. 주사위를 10번 던져 5의 약수가 나오는 횟수를 Y 라 하면 $X=2Y-(10-Y)$ 이다.

따라서 $X=3Y-10$

$E(X)=E(3Y-10)=3E(Y)-10$

한편, 확률변수 Y 는 $B\left(10, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

따라서 $E(Y)=\frac{10}{3}$

$E(X)=3 \times \frac{10}{3}-10=0$

[랑데뷰팁]

5의 약수가 나올 확률이 $\frac{1}{3}$ 이고 그때 +2만큼 이동하고 5의 약수가 아닌 수가 나올 확률이 $\frac{2}{3}$ 이고 그때 -1만큼 이동하므로 주사위를 한 번 던질 때의 점 P 의 좌표의 평균은 $2 \times \frac{1}{3}-1 \times \frac{2}{3}=0$ 이다.
즉, 주사위를 던지는 횟수에 관계없이 점 P 의 좌표의 평균은 0이다.

4) 정답 210

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

여사건을 이용하자.

전체 경우의 수는

$a'+b'+c'+d'+e'=7$ 에서 ${}_5H_7 = {}_{11}C_4 = 330$ 이다.

ab 가 홀수인 경우는 (a, b) 가

$(1, 1)$ 일 때, $c+d+e=10$ 이므로

$c'+d'+e'=7$ 에서 ${}_3H_7 = {}_9C_2 = 36$

$(1, 3), (3, 1)$ 일 때, $c+d+e=8$ 이므로

$c'+d'+e'=5$ 에서 ${}_3H_5 = {}_7C_2 = 21$

따라서 $2 \times 21 = 42$

$(1, 5), (3, 3), (5, 1)$ 일 때, $c+d+e=6$ 이므로

$c'+d'+e'=3$ 에서 ${}_3H_3 = {}_5C_2 = 10$

따라서 $3 \times 10 = 30$

$(1, 7), (3, 5), (5, 3), (7, 1)$ 일 때,

$c+d+e=4$ 이므로 $c'+d'+e'=1$ 에서 ${}_3H_1 = 3$

따라서 $4 \times 3 = 12$

$\therefore 36+42+30+12=120$

그러므로 $330-120=210$

5) 정답 ④

랑데뷰 일일학습지 쉬사준킬 제161회

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

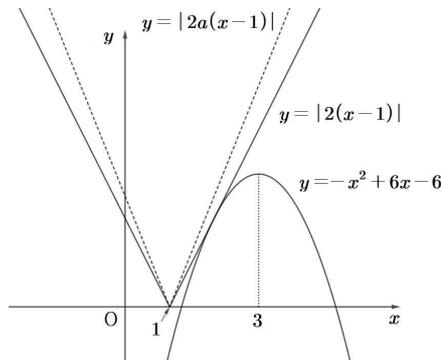
이차함수 $f(x)$ 는 (가) 조건에 의해 $x=1$ 에 대칭이므로

$f(x)=a(x-1)^2+q$ 꼴이다.

따라서 $f'(x)=2a(x-1)$ ($a > 0$)

$y=-x^2+6x-6=-(x-3)^2+3$

(나) 조건을 만족하기 위해서는 다음 그림과 같이 $y=2a(x-1)$ 의 기울기 $2a$ 가 $(1, 0)$ 에서 $y=-(x-3)^2+3$ 에 그은 접선의 기울기(㉠)보다 크거나 같아야 한다.



㉠을 구해보자.

접점의 좌표를 $(t, -t^2+6t-8)$ 이라 하면

$$\frac{-t^2+6t-6}{t-1} = -2t+6$$

$$-t^2+6t-6 = -2t^2+8t-6$$

$$t^2-2t=0$$

$$t(t-2)=0$$

$$t=2 (\because t > 1)$$

따라서 접선의 기울기는 2이다.

그러므로 $2a \geq 2$

에서 $a \geq 1$

6) 정답 27

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

조건에서 삼차함수 $f(x)$ 는 $f(a)=0$ 을 만족하는 a 에 대하여 $(a, 0)$ 에 대칭인 그래프이며 극댓값이 $\sqrt{3}$, 극솟값이 $-\sqrt{3}$ 임을 알 수 있다.

$f(2-x)$ 는 함수 $f(x)$ 를 $x=1$ 에 대칭이동한 그래프이므로 함수 $|f(x)f(2-x)|$ 이 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f(x)=kx(x-1)(x-2)$ 꼴이어야 한다.

$f(x)=kx(x-1)(x-2)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(x^2-3x+2)+k(x^2-2x)+k(x^2-x) \\ &= k(3x^2-6x+2) \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{의 해는 } 3x^2-6x+2=0 \text{에서 } x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

따라서 $f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = |\sqrt{3}|$ 이다.

$$f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = k\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= k\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$|k|\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) = \sqrt{3} \text{에서 } k = \pm \frac{9}{2}$$

$$f(x) = \pm \frac{9}{2}x(x-1)(x-2)$$

$$f(3) = \pm \frac{9}{2} \times 3 \times 2 \times 1 = \pm 27$$

$$|f(3)| = 27$$

7) 정답 ④
 [출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

두 직선 $y = x + a$, $y = -2x + b$ 의 교점을 R이라 할 때,
 $\angle PRQ = \pi - \theta$ 이다.
 직선 $y = x + a$ 이 x축과 이루는 각을 α 라 하면 $\tan \alpha = 1$
 직선 $y = -2x + b$ 이 x축과 이루는 각을 β 라 하면 $\tan \beta = -2$ 이다.
 한편, $\alpha + (\pi - \theta) = \beta$ 에서
 $\pi - \theta = \beta - \alpha$ 이다.
 따라서
 $\tan(\pi - \theta) = \tan(\beta - \alpha)$
 $= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$
 $= \frac{-2 - 1}{1 + (-2 \times 1)} = 3$
 $-\tan \theta = 3$ 이므로
 $\tan \theta = -3$ 이다.

8) 정답 27
 [출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

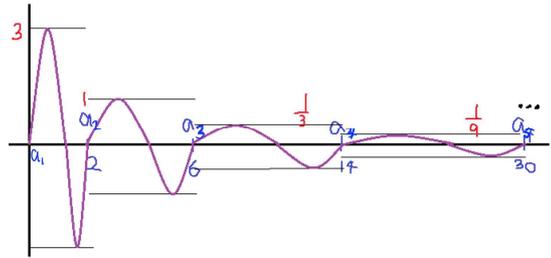
$f(x) = \frac{1}{3^{n-2}} \sin\left(\frac{\pi(x-a_n)}{2^{n-1}}\right)$ ($a_n \leq x \leq a_{n+1}$)에서
 $f(x)$ 는 주기가 $\frac{2^{n-1} \times 2\pi}{\pi} = 2^n$ 인 함수다.
 (i) $n=1 \rightarrow 0 \leq x \leq 2$, $f(x) = 3\sin(\pi x)$
 (ii) $n=2 \rightarrow 2 \leq x \leq 6$, $f(x) = \sin\left(\frac{\pi(x-2)}{2}\right)$
 (iii) $n=3 \rightarrow 6 \leq x \leq 14$, $f(x) = \frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi(x-6)}{2^2}\right)$

따라서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

$$\int_{\alpha}^t f(x) dx = \int_0^t f(x) dx - \int_0^{\alpha} f(x) dx = 0 \text{에서}$$

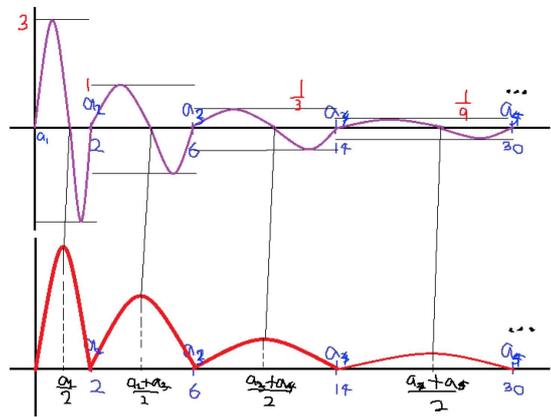
$$\int_0^t f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx \dots \text{㉠}$$

㉠의 좌변은 t 에 대한 함수이고 우변은 상수이다.



따라서 $y = \int_0^t f(x) dx$ 와 $y = \int_0^{\alpha} f(x) dx$ 의 교점의 개수가 27개가 되는 상황이다.

$y = \int_0^t f(x) dx$ 의 그래프는 다음과 같다.



상수인 $\int_0^{\alpha} f(x) dx$ 의 값을 구해보면

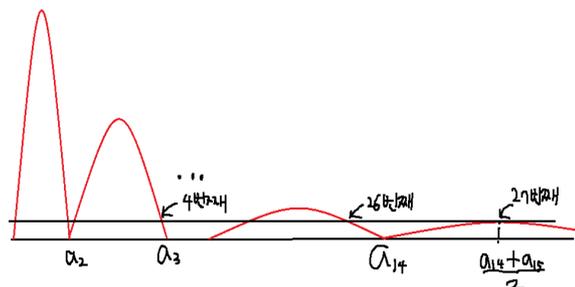
$0 < \alpha < 2$ 이므로 $f(x)$ 은 $n=1$ 일 때이다. 따라서

$$\int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} 3\sin(\pi x) dx = \left[-\frac{3}{\pi} \cos(\pi x)\right]_0^{\alpha} = -\frac{3}{\pi} (\cos(\alpha\pi) - 1)$$

한편, $y = \int_0^t f(x) dx$ 와 $y = \int_0^{\alpha} f(x) dx$ 그래프의 교점의 개수가 27개가 되는 상황은 다음 그림과 같다.

[황태뷰팁: 극댓값이 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열임]

⇒ 카발리에리의 원리에 의해 높이가 $\times \frac{1}{3}$, 가로축이 $\times 2$ 씩 변하므로 공비가 $\frac{2}{3}$ 이 된다.



따라서 $n = 14$ 일 때 $a_{14} \leq x \leq a_{15}$,

$$f(x) = \frac{1}{3^{12}} \sin\left(\frac{\pi(x-a_{14})}{2^{13}}\right)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t f(x) dx &= \int_0^{a_{14}} f(x) dx + \int_{a_{14}}^{\frac{a_{14}+a_{15}}{2}} f(x) dx \\ &= \int_{a_{14}}^{\frac{a_{14}+a_{15}}{2}} f(x) dx = \int_{a_{14}}^{\frac{a_{14}+a_{15}}{2}} \left\{ \frac{1}{3^{12}} \sin\left(\frac{\pi(x-a_{14})}{2^{13}}\right) \right\} dx \end{aligned}$$

$$(s = x - a_{14} \text{라 두면 } \frac{a_{15}-a_{14}}{2} = \frac{2^{14}}{2} = 2^{13})$$

$$= \int_0^{\frac{a_{15}-a_{14}}{2}} \frac{1}{3^{12}} \sin\left(\frac{\pi s}{2^{13}}\right) ds = \int_0^{2^{13}} \frac{1}{3^{12}} \sin\left(\frac{\pi s}{2^{13}}\right) ds$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \times \left[\cos\left(\frac{\pi s}{2^{13}}\right) \right]_0^{2^{13}}$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{12} (-1-1) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

[다른 풀이]-카발리에리의 원리 적용

$$a_1 = \frac{6}{\pi}, r = \frac{2}{3} \therefore t_{27} = \frac{6}{\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{13} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

⇒ 랑데뷰팁

$$\text{따라서 } -\frac{3}{\pi} (\cos(\alpha\pi) - 1) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \text{ 이므로}$$

$$1 - \cos(\alpha\pi) = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{12} = \frac{2^{14}}{3^{13}}$$

$$\ln(1 - \cos(\alpha\pi)) = \ln \frac{2^{14}}{3^{13}} = 14\ln 2 - 13\ln 3$$

$$p = 14, q = 13 \text{ 이므로 } p + q = 27$$