2021학년도 설바이벌 2회 문제지

수학 영역
(가 형)

성명	

수험번호						–				

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

문제는 문제 삼지 않으면 문제가 되지 않는다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

우 주 설 모 의 평 가

제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \times 2^{-\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. 양의 상수 a, b에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+a)^2-bn^2}{2n-4}=b$$

일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

$b=4$ $\frac{4a}{2}=b=4 \rightsquigarrow a=2$

3. 두 사건 A, B에 대하여

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{19}{15}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{4}{5}$

일 때, $\frac{1}{\mathrm{P}(A\mid B)}+\frac{1}{\mathrm{P}(B\mid A)}$의 값은? [3점]

① $\frac{16}{7}$ ② $\frac{17}{7}$ ③ $\frac{18}{7}$ ④ $\frac{19}{7}$ ⑤ $\frac{20}{7}$

$$\frac{P(A)+P(B)}{P(A\cap B)}=\frac{\frac{19}{15}}{\frac{19}{15}-\frac{4}{5}}=\frac{19}{7}$$

4. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이

$a_{n+1}=na_n-1$

을 만족시킨다. $a_4=8$일 때, a_1의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a_4 = 3\cdot a_3 - 1 = 8$

$a_3 = 2\cdot a_2 - 1 = 3$

$a_2 = a_1 - 1 = 2$

$\therefore a_1 = 3$

5. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 4$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(2, f(2))$에 대하여 대칭이다. $f(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

* 점대칭 함수 적분 ⇒ "구간길이 × 점대칭 y좌표"

(단, 구간이 대칭적일 때만 성립)

$P(0 \le X \le 4) = \int_0^4 f(x)dx = 4 \cdot f(2) = 1$

6. $\int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-x)}{x} dx$의 값은? [3점]

① $-\frac{(\ln 2)^2}{2}$ ② $-\frac{\ln 2}{2}$ ③ $\frac{\ln 2}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{(\ln 2)^2}{2}$

$\rightarrow -\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = -\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2$

7. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

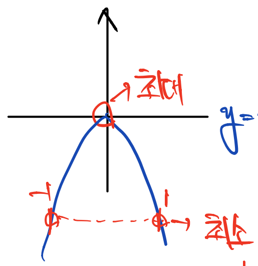
$f(x) = 2\sin^2 x - \sqrt{1-\sin^2 x} + k$의 최댓값은 3이고 최솟값은 m이다. $m+k$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$f(x) = 2 - 2\cos^2 x - |\cos x| + k$

$= (-2|x|^2 - |x| + k+2) \circ \cos x$

$\cos x$ ⇓ 치역 $-1 \sim 1$



$y = k+2 = 3$

$k=1$

$= k+2-3 = 0 = m$

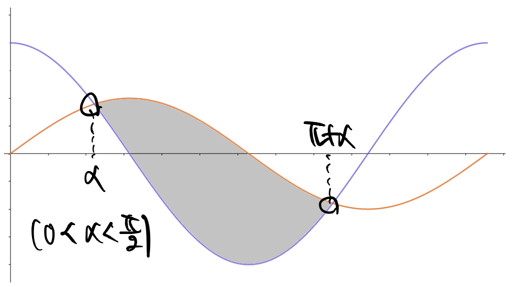
8. 다항식 $(x+\sqrt[3]{2})^7$의 전개식에서 계수가 유리수인 모든 항의 계수의 합은? [3점]

① 96 ② 97 ③ 98 ④ 99 ⑤ 100

계수가 유리수인 항: $x^7 + 2\times {}_7C_3\cdot x^4 + 4\times {}_7C_6\cdot x$

$\therefore\ 1+70+28=99$

9. 그림과 같이 $0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y=\sin x$와 $y=2\cos x$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 k라 하자. k^2의 값은? [3점]



① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

$2\cos\alpha = \sin\alpha \Rightarrow \tan\alpha = 2$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ k = \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} (\sin x - 2\cos x)\,dx$

$= \left[-\cos x - 2\sin x\right]_{\alpha}^{\pi+\alpha}$

$= \frac{10}{\sqrt{5}}$ $\quad k^2=20$

10. 곡선 $y=2^x$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(t, 2^t)$와 점 P에서 x축에 내린 수선의 발 점 $\mathrm{Q}(t, 0)$, 원점 O에 대하여, $\angle\mathrm{POQ}=\theta$라 하자. θ는 $t=\alpha$에서 최솟값을 갖는다. α의 값은? (단, $t>0$) [3점]

① $\frac{1}{2\ln 2}$ ② $\frac{1}{\ln 2}$ ③ $\frac{3}{2\ln 2}$ ④ $\frac{2}{\ln 2}$ ⑤ $\frac{5}{2\ln 2}$

$\tan x$는 증가함수이므로, θ와 $\tan\theta$는 최솟값을 갖는 t가 같다.

(합성함수 관점에서 생각해보면 당연하다.)

이때 $\tan\theta$는 원점에서 $y=2^x$에 그은 직선의 기울기와 같다.

따라서 $\tan\theta = \frac{2^t}{t}$ has 최소 at $\frac{2^t}{t} = \ln 2 \times 2^t$

$\alpha = \frac{1}{\ln 2}$

+ FIM 문항

2013년 자유전자 21번과 엮어서 보면 좋다.

11. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2+7n-7$$

을 만족시킨다. $a_1 \times a_3$의 값은? [3점]

① $\frac{4}{17}$ ② $\frac{9}{34}$ ③ $\frac{5}{17}$ ④ $\frac{11}{34}$ ⑤ $\frac{6}{17}$

$\frac{1}{a_1} = 2 \rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$

$n=3, 2$ 대입후 빼면,

$\frac{9}{a_3} = 2\times5+7 \rightarrow a_3 = \frac{9}{17}$

$a_1 \times a_3 = \frac{9}{34}$

12. 함수

$$f(x) = \log_2(x^2-2x+3)$$

가 닫힌구간 $[-k, k]$에서 최댓값 5, 최솟값 m을 갖는다. $k+m$의 값은? [3점]

① $\sqrt{30}-2$ ② $\sqrt{30}-1$ ③ $\sqrt{30}$
④ $\sqrt{30}+1$ ⑤ $\sqrt{30}+2$

$f(x) = \log_2\{(x-1)^2+2\} \rightarrow x=1$ 대칭이므로,
$x=-k$ 최대.
$x=1$ 최소

$m = \log_2 2 = 1$

$5 = \log_2\{(k+1)^2+2\} \rightarrow k = \sqrt{30}-1$

$\therefore k+m = \sqrt{30}$

13. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$x = \sin t + \cos 3t,\ y = \cos t + \sin 3t$

$\frac{dx}{dt} = \cos t - 3\sin 3t$ $\frac{dy}{dt} = -\sin t + 3\cos 3t$

일 때, 점 P의 속력은 $t = a$에서 최댓값 b를 갖는다.

$\frac{40ab}{\pi}$의 값은? (단, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$) [3점]

① 30 ② 45 ③ 60 ④ 75 ⑤ 90

속력 $v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

$= \sqrt{10 - 6(\cos t \sin 3t + \sin t \cos 3t)}$

$= \sqrt{10 - 6\sin 4t} \le \sqrt{16} = 4 = b$

$4t = \frac{3}{2}\pi$ $t = a = \frac{3}{8}\pi$

$\therefore \frac{40ab}{\pi} = 60$

14. 어느 지역 신생아들의 출생 시 몸무게 X가 정규분포를 따르고

$P(X \ge 3.6) = 0.5$, $P(X \le 2.8) + P(|Z| \ge 1) = 0.3402$

이다. 이 지역 신생아 중에서 25명의 출생 시 몸무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $P(3.4 \le \overline{X})$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 몸무게의 단위는 kg이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

6826
3174

① 0.7745 ② 0.8413 ③ 0.9332 ④ 0.9772 ⑤ 0.9938

$m = 3.6$ $P(|Z| \ge 1) = 1 - 0.3413 \times 2$
$= 0.3174$

$P(X \le 2.8) = 0.0228 = 0.5 - 0.4772$

$\rightarrow 0.8 = 2\sigma$ $\sigma = 0.4$

$\overline{X}$의 표준편차 $= \frac{\sigma}{5} = 0.08$

$\therefore P(\overline{X} \ge 3.4) = 0.9938$

15. 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$f(x)=\tan^2 x$ $= x^2 \circ \tan x$ $2\tan x \cdot \sec^2 x$

에 대하여 함수 $e^{f(x)}$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g'(e)$의 값은?

[4점]

① $\frac{1}{8e}$ ② $\frac{1}{4e}$ ③ $\frac{3}{8e}$ ④ $\frac{1}{2e}$ ⑤ $\frac{5}{8e}$

$g(e)=\frac{\pi}{4}$

$\rightarrow g'(e)=\frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})\cdot e^{f(\frac{\pi}{4})}}=\frac{1}{4e}$

16. 자연수 n에 대하여 정의된 수열

$a_n=\frac{1}{3}\log_3\left(\frac{3(2n+1)}{2n-1}\right)$

에 대하여 $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 m의 값을 작은 순서대로 $m_1, m_2, \cdots, m_n$이라 할 때, 수열 $\{m_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{m}\log_3\frac{3(2k+1)}{2k-1}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{m}\left(1+\log_3\frac{2k+1}{2k-1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{m+\log_3\left(\frac{3}{1}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{2m-1}{2m-3}\times\frac{2m+1}{2m-1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\{m+\log_3(\boxed{(가)})\}$$

$2m+1$

이다.

$\sum_{k=1}^{m} a_k$이 자연수가 되기 위해서는 어떤 자연수 N에 대하여

$\boxed{(가)}=3^N$, $\sum_{k=1}^{m} a_k=\frac{1}{3}(\boxed{(나)}+N)$이므로

$2m+1$ $\frac{3^N-1}{2}$

$\boxed{(나)}+N$ 이 3의 배수가 되어야 한다.

이때, 등비수열의 합에 의해 $\Rightarrow \frac{3^N-1}{3-1}=\sum_{k=1}^{N} 3^{k-1}$

$\boxed{(나)}=\sum_{k=1}^{N}\boxed{(다)}$이므로,

3^{k-1}

자연수 N이 3으로 나누었을 때의 나머지가 $\boxed{(라)}$이면,

2

$\sum_{k=1}^{m} a_k$는 자연수이다. 따라서

자연수 n에 대하여 $N=3(n-1)+\boxed{(라)}$로 나타낼 수 있고,

$m=\frac{3^{3(n-1)+\boxed{(라)}}-1}{2}$이므로, 수열 $\{m_n\}$의 일반항은

$m_n=\frac{3^{3(n-1)+\boxed{(라)}}-1}{2}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(N)$, $h(k)$라 하고, (라)에 알맞은 수를 r이라 할 때, $\frac{g(5)\times h(4)}{f(13)}+r$의 값은?

$\rightarrow \frac{121\times 27}{27}+2$

$=123$

17. 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 A에서 B로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

사건 P :

> 집합 A의 어떤 원소 a에 대하여
> $a+f(a)$의 값이 홀수 인 것과 짝수인 것이 적어도 하나씩 존재한다.

→ 여기선 all 홀수 or all 짝수만 존재

$n(S)=5^4$

$P^C \Rightarrow$ all 홀수 →
- a 홀수 → $f(a)$ 짝수
- a 짝수 → $f(a)$ 홀수

$2^2\times3^2$

all 짝수 → 마찬가지로 $2^2\times3^2$

$\therefore\ 1-\dfrac{72}{5^4}=\dfrac{553}{625}$

18. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(e^x)=x+f(x)e^{-x}$
> (나) $\displaystyle\int_1^e f(x)dx=0$

$f(e^x)\cdot e^x-f(x)=xe^x$

$\int$ 부정적분

$F(e^x)-F(x)=(x-1)e^x$

$x=1$ 대입 ↓ 적분상수$=0$

$\displaystyle\int_{\ln 2}^{e^2} f(x)dx=e^2+a\ln 2+b$일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① -2 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

$\displaystyle\int_{\ln 2}^{e^2} f(x)dx$

$=\{F(e^2)-F(2)\}-\{F(2)-F(\ln 2)\}$

$=e^2+2\ln 2-2$ $\quad\therefore\ a+b=0$

19. 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$a_{n+1}\cdot a_{n+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

이다. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$일 때, $(a_1)^2 + (a_2)^2$의 값은? [4점]

① $\frac{19}{4}$　② $\frac{21}{4}$　③ $\frac{23}{4}$　④ $\frac{25}{4}$　⑤ $\frac{27}{4}$

$a_{n+2} = \frac{1}{2}a_n$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\sum^{\infty} a_{홀수} = a_1\{1+\frac{1}{2}+\cdots\} = 2a_1$

$\sum^{\infty} a_{짝수} = a_2\{1+\frac{1}{2}+\cdots\} = 2a_2$

$\rightarrow a_1 + a_2 = \frac{5}{2}$

$a_1 \times a_2 = \frac{1}{2}$

$\therefore (a_1)^2 + (a_2)^2 = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}$

20. 실수 a,b　t가 $a < 0\cancel{,}2 < b\cancel{,}2 < t$를 만족한다. 함수 $f(x) = x^2e^{-x}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} xf(x) & (x < t) \\ f'(t)x^2 + f(t)x - tf'(t)x & (x \geq t) \end{cases}$$

라 할 때, 구간 $[a,b]$에서 방정식 $g(x) = kx$의 실근의 개수를 $h(k)$라 하자. 함수 $h(k)$의 불연속점의 개수가 2개이기 위한 a,b에 대하여 $f(a)\times b$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{12+8\sqrt{2}}{e^2}$　② $\frac{20+4\sqrt{2}}{e^2}$　③ $\frac{16+8\sqrt{2}}{e^2}$

④ $\frac{20+4\sqrt{2}}{e}$　⑤ $\frac{16+8\sqrt{2}}{e}$

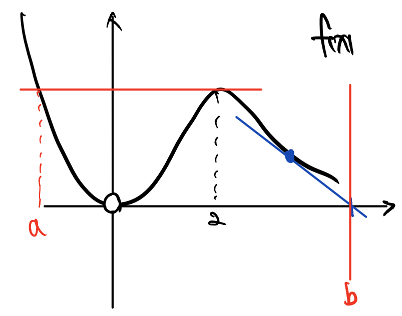
$g(x) = kx$는 $x=0$에서 실근을 갖는다.

따라서 $h(k)$는 $\left(\frac{g(x)}{x} = k\right.$의 $x=0$을 제외한 실근 개수$\left.\right) + 1$ 이다.

$$\frac{g(x)}{x} = \begin{cases} f(x) & (x<t) \\ f'(t)(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

$h(k)$의 불연속점이 2개가 되도록 a, b를 잡으면…

→



$f(a) = \frac{4}{e^2}$

b는 접선의 x절편. $h(k)$ 최소 at 접점 = 변곡점.

$x^2e^{-x} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} e^{-x}(-x^2+2x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} e^{-x}(x^2-4x+2)$

⇓

$x>2$인 변곡점 x좌표 $= 2+\sqrt{2}$

b의 최소 $\rightarrow 2+\sqrt{2} - \frac{f(2+\sqrt{2})}{f'(2+\sqrt{2})} = 3+2\sqrt{2}$

$\therefore f(a)\times b = \frac{12+8\sqrt{2}}{e^2}$

21. $-2\pi-\frac{\pi}{n} \le x \le 2\pi+\frac{\pi}{n}$에서 정의된 두 함수

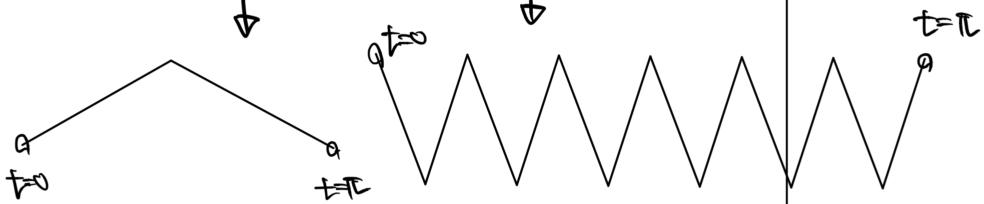
$$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right), \quad g(x)=\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는? [4점]

> 실수 a가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이면
> $\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$
> 이다.

$x+\frac{\pi}{n}=t$ $-2\pi \le t \le 2\pi$

$f(t)=\sin t$. $g(t)=\cos 12(t-\frac{\pi}{n})$



→ 주어진 조건을 만족하려면

$\cos 12(t-\frac{\pi}{n})$가 $t=\frac{\pi}{2}$ 대칭이면됨.

→ $\cos 12(\pi-t-\frac{\pi}{n}) = \cos 12(t-\frac{\pi}{n})$

$\cos(-\frac{12}{n}\pi+12t)$

$= \cos 12(-t-\frac{\pi}{n})$

$= \cos(-\frac{12}{n}\pi-12t)$

동일해야 하므로.

$-\frac{12}{n}\pi$가 $\cos x$의 대칭축이면 O.K.

$-\frac{12}{n}\pi = 정수\cdot\pi$

$= -12 = 정수\times n$

n은 12의 양의 약수

$n=1.2.3.4.6.12$ 6개.

단답형

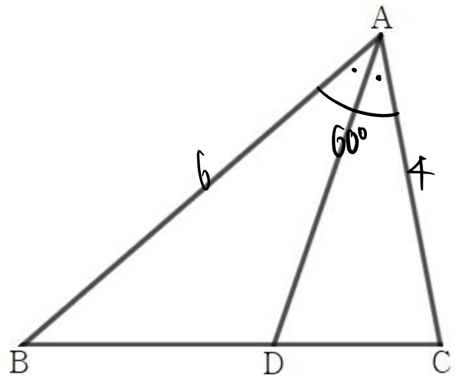
22. 이항분포 $\mathrm{B}\left(108, \frac{1}{6}\right)$를 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하시오. [3점]

$= V(X)+\{E(X)\}^2$

$= 108\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\{108\cdot\frac{1}{6}\}^2$

$= 15+18^2=339$

23. 그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=4$이다. $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{DAC}=\frac{\pi}{6}$를 만족시키는 선분 BC위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{BD}}=k$이다. $25k^2$의 값을 구하시오. [3점]



$\overline{BC}^2 = 36+16-2\cdot6\cdot4\cdot\cos60°$

$= 28$ $\overline{BC}=2\sqrt{7}$

$\overline{BD}=\frac{3}{5}\times2\sqrt{7}$

$25k^2=252$

24. 5개의 자연수 2, 3, 4, 5, 6 중 4개의 수를 선택할 때, 선택한 네 수들의 곱이 6의 배수가 되는 경우의 수를 구하시오. [3점]

6포함 → $_5H_3 = {}_7C_3 = 35$

6포함X 3과 짝수로 6의배수 만들기

$\underbrace{_4H_3}_{\text{3을 포함하는 모든 경우}} - \underbrace{_2H_3}_{\text{3포함 홀수만 뽑는 경우}} = {}_6C_3 - {}_4C_3 = 16$

∴ 51

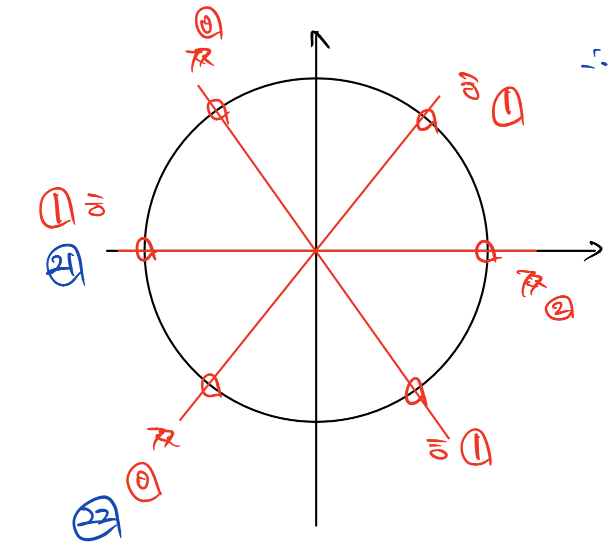
25. 2이상의 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$을

$\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$의 n제곱근중 실수의 개수

로 정의할 때, $\sum_{n=2}^{m} a_n = 16$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [3점]

a_n ⟨ n이 짝수 → $\cos\frac{\pi}{3}n$ >0 : 2, $=0$: 1, <0 : 0

n이 홀수 → $\cos\frac{\pi}{3}n$ 값에 상관없이 1



∴ 21+22 = 43

26. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	1

Y	1	3	5	7	합계
$P(Y=y)$	$ap_1+\frac{1}{10}$	$ap_2+\frac{1}{10}$	$ap_3+\frac{1}{10}$	$ap_4+\frac{1}{10}$	1

→ $a+\frac{2}{5}=1$

이고, $E(X)=\frac{5}{3}$일 때, $E(9Y+5)$의 값은? [4점]

$= 9E(Y)+5$

$a=\frac{3}{5}$

$p_1+p_2+p_3+p_4=1$

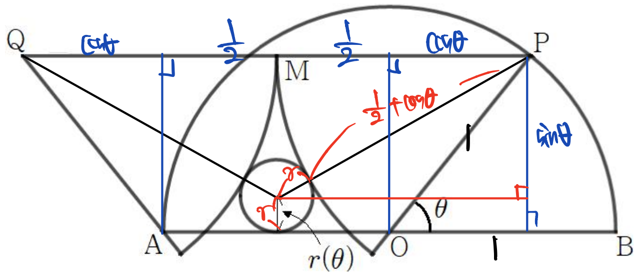
$p_1+2p_2+3p_3+4p_4=\frac{5}{3}$ ⊖ $p_2+2p_3+3p_4=\frac{2}{3}$

$p_1+3p_2+5p_3+7p_4=\frac{7}{3}$

$a(p_1+3p_2+5p_3+7p_4)+\frac{8}{5}=E(Y)=3$

∴ $9E(Y)+5=32$

27. 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 중심 O에 대하여 $\angle \mathrm{POB}=\theta$가 되도록 호 AB위의 점 P를 잡고, 사각형 AOPQ가 선분 AO와 선분 PQ가 평행인 등변사다리꼴이 되도록 반원 밖에 점 Q를 잡는다. 선분 PQ의 중점 M에 대하여 점 P, Q를 각각 중심으로 하고 점 M을 지나는 두 부채꼴과 선분 AB에 동시에 접하는 원의 반지름을 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta^2}=k$이다. $60k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$) [4점]



$(\frac{1}{2}+\cos\theta+r)^2=(\frac{1}{2}+\cos\theta)^2+(\sin\theta-r)^2$

(by 피타고라스)

$\Rightarrow \quad r(1+2\cos\theta) = \sin^2\theta - 2r\sin\theta$

$r=\dfrac{\sin^2\theta}{1+2\cos\theta+2\sin\theta}$

$\therefore \lim_{\theta\to0^+} \dfrac{r(\theta)}{\theta^2}=\dfrac{1}{3}$ 20

28. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+30}=a_n+n \ (n \le 30)$
(나) $a_n+a_{n+10}+a_{n+20}=b_n \ (n \le 20)$

$a_{n+10}+a_{n+20}+a_{n+30}=b_{n+10}$

$\sum_{n=1}^{10}(b_{n+10}-b_n)$의 값을 구하시오. [4점]

$a_{n+30}-a_n=b_{n+10}-b_n$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\underbrace{(b_{n+10}-b_n)}_{=n}=55$

+ $f(x)$의 확장하는 과정 → 180930 과 유사함.

29. 임의의 음이 아닌 정수 n에 대하여 닫힌구간 $[0, 7]$에서 정의된 다음 조건을 만족시키는 연속함수 $y=f(x)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $(f(n)-1)(f(n)+1)=0$

(나) $y=f(x)$의 그래프는 구간 $[n-1, n]$에서 두 점 $(n-1, f(n-1))$, $(n, f(n))$을 지나는 직선의 일부이다.

(다) $\int_0^7 f(x)dx=1$

30. 미분 가능한 함수 $y=f(x)$와 곡선 $y=f(x)$의 $x=0$부터 $x=t$까지 곡선의 길이를 $g(t)$에 대하여 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서 그은 접선과 원점 사이의 거리는 $f(t)$이다.

(나) $f(2)=-f'(2)$

(다) $\int_0^2 g(x)f'(x)\,dx = 2\sqrt{2}$, $\int_0^2 \ln\{f(x)\}dx = 3\ln 2$

$\int_0^2 f(t)dt=k$일 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

$\int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = g(t)$, $f(t)=\dfrac{|-tf'(t)+f(t)|}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}>0$

$f(x)>0$, and $f(x)$ 미가 ⇒ $|-tf'(t)+f(t)|$도 미가.

→ 절댓값 벗기기 가능. ⊕ 절댓값 내부의 함수는 ≥ 0 or ≤ 0

$t=2$ $-2f'(2)+f(2)=3f(2)>0$

$\rightarrow -tf'(t)+f(t)>0 \rightarrow f(t)=\dfrac{-tf'(t)+f(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}$

$t=2$ $f(2)=\dfrac{3f(2)}{\sqrt{1+\{f(2)\}^2}} \rightarrow \boxed{f(2)=2\sqrt{2}}$

$g'(t)=-t\cdot\dfrac{f'(t)}{f(t)}+1$

양변 적분 $\int_0^2$

$g(2)=-2\ln f(2)+\int_0^2 \ln f(x)dx+2=2$

$\int_0^2 g(x)f'(x)dx=\Big[g(x)\cdot f(x)\Big]_0^2+\int_0^2 (xf'(x)-f(x))dx$

$=g(2)\cdot f(2)+2f(2)-2\cdot\int_0^2 f(x)dx=2\sqrt{2}$

$\therefore \int_0^2 f(x)dx=3\sqrt{2}=k$ $k^2=18$

2021학년도 우주설 7월 월례고사

발행일 : 2020년 8월 2일
퍼낸이 : 정재민(우주설)

지은이 : 정재민(우주설)

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.