01

[풀이]

$\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2$

답 ②

02

[풀이1]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{2+\frac{5}{n}}=\frac{8}{2}=4$$

답 ④

[풀이2]

분자의 일차항의 계수가 $8(=4+4)$이므로

$n\to\infty$일 때, (분수식) $\to\frac{8}{2}=4$

(즉, 위와 같이 암산할 수 있어야 한다.)

답 ④

03

[풀이]

확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}-\frac{9}{10}=\frac{3}{10}$

조건부 확률의 정의에 의하여

$$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$$

답 ⑤

04

[풀이]

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

이므로

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

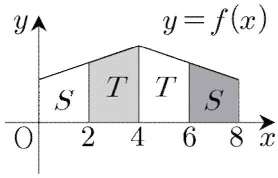
$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ②

05

[풀이]

문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$ 중에서 간단한 것을 그려보면 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로 위의 그림과 같이 넓이가 같은 사다리꼴이 두 쌍이다.

문제에서 주어진 등식에서

$3T=4S$

그런데 확률밀도함수의 성질에 의하여

$2(S+T)=1$, 즉 $S+T=\frac{1}{2}$

위의 두 등식을 연립하면

$S=\frac{3}{14}$, $T=\frac{2}{7}$

$\therefore\ \mathrm{P}(2\le X\le 6)$

$=\mathrm{P}(2\le X\le 4)+\mathrm{P}(4\le X\le 6)$

$=2T=\frac{4}{7}$

답 ③

06

[풀이]

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_1^2 (x-1)e^{-x}dx$$

$$=\left[(x-1)(-e^{-x})\right]_1^2-\int_1^2(-e^{-x})dx$$

$$=-e^{-2}-\left[e^{-x}\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}$$

답 ①

07

[풀이]

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}+1,\ \frac{dy}{dt}=-3t^2+3$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3t^2+3}{\frac{1}{t}+1}=-3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$\frac{dy}{dx}$는 $t=\frac{1}{2}(=a)$일 때 최댓값을 갖는다.

$$\therefore\ a=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

08

[풀이]

$a_n=\frac{1}{6}\times 3^n$이면

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{\frac{1}{6}\times 3^n+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{6}+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{\frac{1}{6}+0}=6$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}6\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$$

답 ③

[참고]

$a_n=\frac{1}{6}\times 3^n$으로 결정할 수 있었던 이유에 대하여 알아보자.

일반항 $a_n=a_1r^{n-1}(a_1\neq 0,\ r\neq 0)$으로 두자.

(1) $|r|\le 2$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{\frac{a_1}{r}\left(\frac{r}{2}\right)^n+1}=\infty$$

(2) $r=3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a_1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{\frac{a_1}{3}}=6$$

에서 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_n=\frac{1}{2}\times 3^{n-1}$

(3) $r\ge 4$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{r}\right)^n}{\frac{a_1}{r}+\left(\frac{2}{r}\right)^n}=\frac{0}{\frac{a_1}{r}+0}=0$$

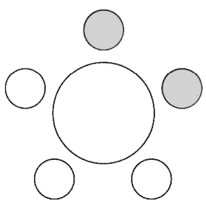
(1), (2), (3)에서

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{2}\times 3^{n-1}$$

09

[풀이1]

아래 그림처럼 두 학생 A, B는 이웃한 두 자리에 앉아야 한다.



구하는 경우의 수는

$_6C_3 \times 2! \times 3! = 240$

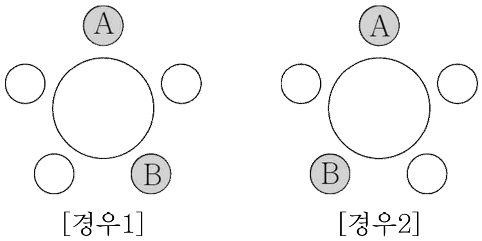
이때, $_6C_3$은 두 학생 A, B를 제외한 6명의 학생 중에서 3명을 택할 경우의 수이고, 2!은 두 학생 A, B가 앉을 자리를 결정하는 경우의 수이고, 3!은 나머지 세 학생이 앉을 자리를 결정하는 경우의 수이다.

답 ④

[풀이2]

여집합을 이용하여 문제를 해결하자.

우선 아래 그림처럼 두 학생 A, B가 이웃한 두 자리에 앉지 못할 경우의 수를 구하자.



경우의 수는

[경우1] $_6C_3 \times 3! = 120$

[경우2] $_6C_3 \times 3! = 120$

전체 경우의 수는

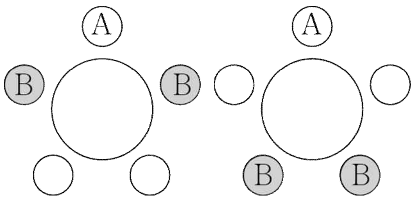
$_6C_3 \times 4! = 480$

따라서 구하는 경우의 수는

$480 - (120 + 120) = 240$

답 ④

[풀이3]



위의 그림에서 알 수 있듯이

두 학생 A, B가 서로 이웃할 확률과 그렇지 않을 확률은 각각

$\frac{1}{2}\left(=\frac{2}{4}\right)$, $\frac{1}{2}\left(=\frac{2}{4}\right)$

로 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$_6C_3 \times 4! \times \frac{1}{2} = 240$

답 ④

10

[풀이1]

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_2 + a_1 = (-1)^2 \times 1$, 즉 $a_2 + 12 = 1$, $a_2 = -11$

$a_3 + a_2 = (-1)^3 \times 2$, 즉 $a_3 - 11 = -2$, $a_3 = 9$

$a_4 + a_3 = (-1)^4 \times 3$, 즉 $a_4 + 9 = 3$, $a_4 = -6$

$\vdots$

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$12, -11, 9, -6, 2, 3, -9, 16(=a_8), \cdots$

따라서 $a_k > a_1$인 자연수 k의 최솟값은 8이다.

답 ④

[풀이2]

자연수 k에 대하여

$n = 2k-1$(홀수):

$a_{2k} + a_{2k-1} = 2k-1 \quad \cdots ㉠$

$n = 2k$(짝수):

$a_{2k+1} + a_{2k} = -2k \quad \cdots ㉡$

㉡$-$㉠: $a_{2k+1} - a_{2k-1} = -4k < 0$

$a_1 > a_3 > a_5 > \cdots$임을 알 수 있다.

즉, $a_k > a_1$인 k는 짝수이다. (홀수가 아니다.)

㉠의 k자리에 $k+1$을 대입하면

$a_{2k+2} + a_{2k+1} = 2k+1 \quad \cdots ㉢$

㉢$-$㉡: $a_{2k+2} - a_{2k} = 4k+1$

한편 $n=1$을 문제에서 주어진 등식에 대입하면

$a_2 + a_1 = (-1)^2 \times 1$, 즉 $a_2 + 12 = 1$, $a_2 = -11$

수열 a_2, a_4, a_6, a_8, $\cdots$을 나열하면

$-11, -6, 3, 16, \cdots$

따라서 $a_k > a_1$인 자연수 k의 최솟값은 8이다.

답 ④

11

[풀이1]

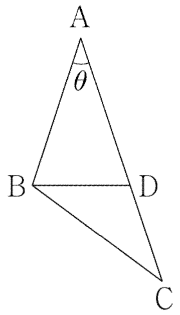
$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4} = k$로 두자.

$\log_a b = k$, $\log_b c = 2k$, $\log_c a = 4k$
위의 세 등식을 변변히 모두 곱하면
$(\log_a b)(\log_b c)(\log_c a)$
$= \frac{\log b}{\log a} \times \frac{\log c}{\log b} \times \frac{\log a}{\log c}$
(∵로그의 밑 변환공식)
$= 8k^3$, 즉 $1 = 8k^3$ $\therefore$ $k = \frac{1}{2}$
$\therefore$ $\log_a b + \log_b c + \log_c a$
$= \frac{1}{2} + 1 + 2 = \frac{7}{2}$
답 ①

[풀이2]
$\log_a b = p$, $\log_b c = q$로 두면
로그의 밑 변환공식에 의하여
$(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c$, 즉 $pq = \log_a c$
이므로 $\log_c a = \frac{1}{pq}$
다음의 필요충분조건이 성립한다.
$p = \frac{q}{2} = \frac{1}{4pq}$
$\Leftrightarrow$
$p = \frac{q}{2}$, $\frac{q}{2} = \frac{1}{4pq}$
연립하면
$\frac{2p}{2} = \frac{1}{4p(2p)}$, $p^3 = \frac{1}{8}$, $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$
$\therefore$ $\log_a b + \log_b c + \log_c a$
$= \frac{1}{2} + 1 + 2 = \frac{7}{2}$
답 ①

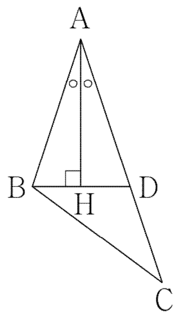
12

[풀이1]
$\angle \mathrm{DAB} = \theta$로 두자.



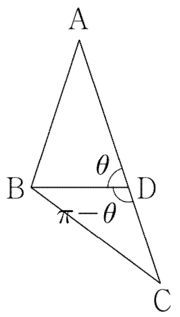
삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
$\cos\theta = \frac{6^2 + 6^2 - (\sqrt{15})^2}{2 \times 6 \times 6} = \frac{19}{24}$
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{BC}}^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos\theta = 41$
$\therefore$ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{41}$
답 ⑤

[참고]
삼각함수의 반각의 공식을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구할 수도 있다.
$\angle \mathrm{DAB} = \theta$로 두자. 그리고 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, $\circ = \frac{\theta}{2}$)
직각삼각형 ABH에서
$\overline{\mathrm{BH}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$이므로 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{15}}{12}$
삼각함수의 반각의 공식에 의하여
$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{19}{24}$

[풀이2]
$\angle \mathrm{ADB} = \theta$로 두면 $\angle \mathrm{CDB} = \pi - \theta$이다.



삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{6^2+(\sqrt{15})^2-6^2}{2\times6\times\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{15}}{12}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=(\sqrt{15})^2+4^2-2\sqrt{15}\times4\times\cos(\pi-\theta)$

$=41$

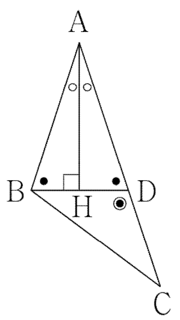
$(\because \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{15}}{12})$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{41}$

답 ⑤

[풀이3]

$\angle\mathrm{DAB}=\theta$로 두자. 그리고 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, $\circ=\dfrac{\theta}{2}$, $\bullet=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$, $\odot=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}$)

직각삼각형 ABH에서

$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$이므로 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{12}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=(\sqrt{15})^2+4^2-2\sqrt{15}\times4\times\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=41$

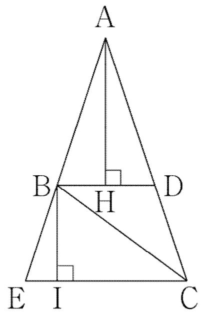
$(\because\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}\right)=-\sin\dfrac{\theta}{2})$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{41}$

답 ⑤

[풀이4]

선분 AB의 연장선과 '점 C를 지나고 직선 BD에 평행한 직선'이 만나는 점을 E라고 하자. 그리고 두 점 A, B에서 두 선분 BD, EC에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자.



직각삼각형 ABH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{\sqrt{129}}{2}$

서로 닮음인 두 삼각형 ABD, AEC에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{BI}}$, 즉 $6:4=\dfrac{\sqrt{129}}{2}:\overline{\mathrm{BI}}$

$\overline{\mathrm{BI}}=\dfrac{\sqrt{129}}{3}$

마찬가지의 방법으로

$\overline{\mathrm{EI}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{IC}}=\dfrac{4\sqrt{15}}{3}$

직각삼각형 BIC에서 피타고라스의 정리에 의하여

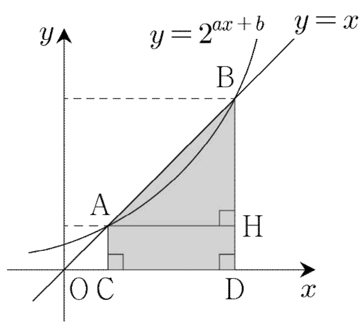
$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{129}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4\sqrt{15}}{3}\right)^2}=\sqrt{41}$

답 ⑤

13

[풀이]

점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 점 A의 x좌표를 a라고 하자.



직각이등변삼각형 ABH의 빗변의 길이가 $6\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=6$

$(\square\mathrm{ACDB}$의 넓이$)=\dfrac{a+(a+6)}{2}\times 6=30,\ a=2$

두 점 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(2,\ 2),\ \mathrm{B}(8,\ 8)\ (\because 8=2+6)$

두 점 A, B는 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$의 교점이므로

$2^{2a+b}=2,\ 2^{8a+b}=8=2^3$

$2a+b=1,\ 8a+b=3$

연립방정식을 풀면

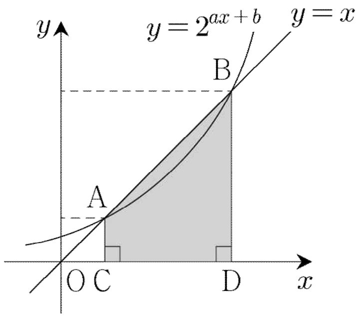
$a=b=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=\dfrac{2}{3}$

답 ④

[참고]

다음과 같이 두 점 A, B의 좌표를 구해도 좋다.



두 점 A, B의 x좌표를 각각 p, q로 두자.

$\overline{\mathrm{AC}}=p,\ \overline{\mathrm{BD}}=q$이고,

$\overline{\mathrm{CD}}=q-p=6\left(\because \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}}=\sqrt{2}\right)$ …㉠

이므로

$(\square\mathrm{ACDB}$의 넓이$)=\dfrac{p+q}{2}\times 6=30$

즉, $p+q=10$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$p=2,\ q=8$

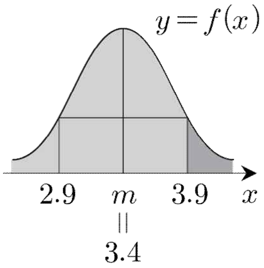
따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(2,\ 2),\ \mathrm{B}(8,\ 8)$

14

[풀이]

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 하자. 그리고 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라고 하자. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.



$\mathrm{P}(X\geq 3.4)=\dfrac{1}{2}$에서 $m=3.4$

$\mathrm{P}(X\leq 3.9)+\mathrm{P}(Z\leq -1)$

$=\mathrm{P}(X\leq 3.9)+\mathrm{P}(X\leq 3.4-\sigma)=1$

에서 $\dfrac{3.9+(3.4-\sigma)}{2}=3.4,\ \sigma=0.5$

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(3.4,\ 0.1^2)$을 따르므로

$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\geq 3.55)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 1.5)=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

답 ③

15

[풀이]

문제에서 주어진 등식을 다시 쓰면

$\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}=b$에서 $g(-2)=0,\ g'(-2)=b$

역함수의 성질에 의하여

$f(0)=-2$, 즉 $f(0)=-\ln a=-2,\ a=e^2$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\dfrac{\tan x\sec x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}$

역함수의 미분법에 의하여

$b=g'(-2)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{1}=1$

$\therefore\ ab=e^2$

답 ③

[참고1]
다음과 같은 계산도 가능하다.
역함수의 성질에 의하여 $f(g(x))=x$이다.

$$f(g(x))=\ln\left(\frac{\sec(g(x))+\tan(g(x))}{e^2}\right)=x$$

각 변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{\sec(g(x))\tan(g(x))+\sec^2(g(x))}{\sec(g(x))+\tan(g(x))}\times g'(x)=1$$

이므로

$$\frac{\sec(g(-2))\tan(g(-2))+\sec^2(g(-2))}{\sec(g(-2))+\tan(g(-2))}$$
$$\times g'(-2)=1$$

그런데 $g(-2)=0$이므로

$\therefore\ g'(-2)=\frac{1}{1}=1$

[참고2]
다음과 같은 계산도 가능하다.
역함수의 성질에 의하여 $g(f(x))=x$이다.

$$g(f(x))=g\left(\ln\left(\frac{\sec x+\tan x}{e^2}\right)\right)=x$$

각 변을 x에 대하여 미분하면

$$g'\left(\ln\left(\frac{\sec x+\tan x}{e^2}\right)\right)\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}=1$$

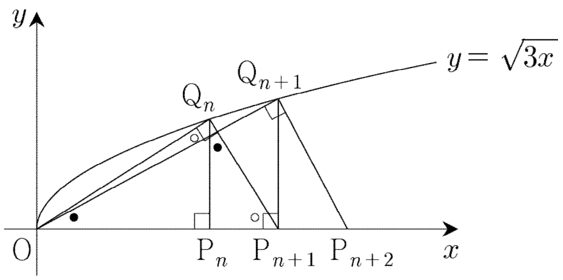
이므로

$$g'\left(\ln\left(\frac{\sec 0+\tan 0}{e^2}\right)\right)\frac{\sec 0\tan 0+\sec^2 0}{\sec 0+\tan 0}=1$$

$\therefore\ g'(-2)=1$

16

[풀이]



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하자.

$\overline{OP_{n+1}}=\overline{OP_n}+\overline{P_nP_{n+1}}$이므로

$a_{n+1}=a_n+\overline{P_nP_{n+1}}$ …㉠

이다. 삼각형 OP_nQ_n과 삼각형 $Q_nP_nP_{n+1}$이 닮음이므로

$\overline{OP_n}:\overline{P_nQ_n}=\overline{P_nQ_n}:\overline{P_nP_{n+1}}$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n,\ \sqrt{3a_n})$이므로

$a_n:\sqrt{3a_n}=\sqrt{3a_n}:\overline{P_nP_{n+1}}$

$\overline{P_nP_{n+1}}=\boxed{3}$ …㉡

이다. ㉡을 ㉠에 대입하면

$a_{n+1}=a_n+3$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이다.

일반항 $a_n=3n-2$이므로

$a_{n+1}=3n+1$,

$\sqrt{3a_n}=\sqrt{3(3n-2)}=\sqrt{9n-6}$

이다. 따라서 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times(\boxed{3n+1})\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

(가): $p=3$
(나): $f(n)=3n+1$
$\therefore\ p+f(8)=28$

답 ⑤

17

[풀이]

수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 순서로 정해질 사건을 A, 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 순서로 정해질 사건을 B라고 하자.

사건 B를 다음과 같이 두 사건으로 분할할 수 있다.

$A\cap B$: A○○B, ○, ○, ○을 나열
$B-A$: B○○A, ○, ○, ○을 나열
(단, ○는 과학 동아리)

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B-A)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{{}_5\mathrm{P}_2\times 4!}{7!}=\frac{1}{2}+\frac{2}{21}=\frac{25}{42}$$

이때, $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}\left(=\frac{{}_7\mathrm{C}_2\times5!}{7!}\right)$이다. 왜냐하면 A→B일 확률과 B→A일 확률은 같을 수밖에 없기 때문이다.
그리고 $\mathrm{P}(B-A)$에서 7!(분자)는 7개의 동아리의 발표 순서를 정할 경우의 수이고, ${}_5\mathrm{P}_2$는 B, A 사이에 오는 2개의 과학 동아리의 발표 순서를 정할 경우의 수이고, 4!은 (B○○A), ○, ○, ○을 나열하는 경우의 수이다.
답 ③

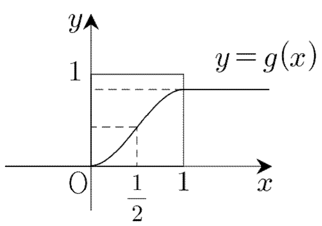
[참고]
다음과 같이 확률을 계산할 수도 있다.
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{1}{2}+\frac{{}_5\mathrm{P}_2\times2!\times4!}{7!}-\frac{{}_5\mathrm{P}_2\times4!}{7!}$
$=\frac{1}{2}+\frac{4}{21}-\frac{2}{21}=\frac{25}{42}$

18

[풀이1]
ㄱ. (참)
$x\le0$일 때,
$g(x)=-\int_x^0 f(t)f(1-t)dt$
$=-\int_x^0 0\times f(1-t)dt$
$=-\int_x^0 0dt=0$
ㄴ. (참)
정적분의 치환적분법에 의하여
$1-t=s$로 두면 $t=1-s$, $dt=-ds$이고,
$t=\frac{1}{2}$일 때 $s=\frac{1}{2}$, $t=1$일 때 $s=0$
$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)f(1-t)dt$
$=\int_{\frac{1}{2}}^0 f(1-s)f(s)(-ds)$
$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(1-s)f(s)ds$
$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt$
이므로
$g(1)=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt$
$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)f(1-t)dt$
$=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt$
$=2g\left(\frac{1}{2}\right)$
$\therefore\ g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$
ㄷ. (거짓)
$x\ge1$일 때,
$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt$
$=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt+\int_1^x f(t)f(1-t)dt$
$=g(1)+0$
$=g(1)$
($\because 1\le t\le x$일 때, $f(1-t)=0$)
함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x\le0)\\ \int_0^x f(t)f(1-t)dt & (0<x<1)\\ g(1) & (x\ge1)\end{cases}$$

구간 $(0,\ 1)$에서
$g'(x)=f(x)f(1-x)$
$=\{\ln(1+x^4)\}^{10}\{\ln(1+(1-x)^4)\}^{10}>0$
($\because 1+x^4\ne1,\ 1+(1-x)^4\ne1$)
이므로 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 증가한다.



구간 $(0,\ 1)$에서
$0<f(x)<(\ln2)^{10}$, $0<f(1-x)<(\ln2)^{10}$
이므로

$0 < f(x)f(1-x) < (\ln 2)^{20} < 1$

$(\because \ln 2 < 1 = \ln e,\ e \approx 2.7)$

그러므로

$$\int_0^1 f(t)f(1-t)dt < 1 = \int_0^1 1dt$$

즉, $g(1) < 1$이고, $0 \le g(x) < 1$

따라서 $g(a) \ge 1$인 실수 a는 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

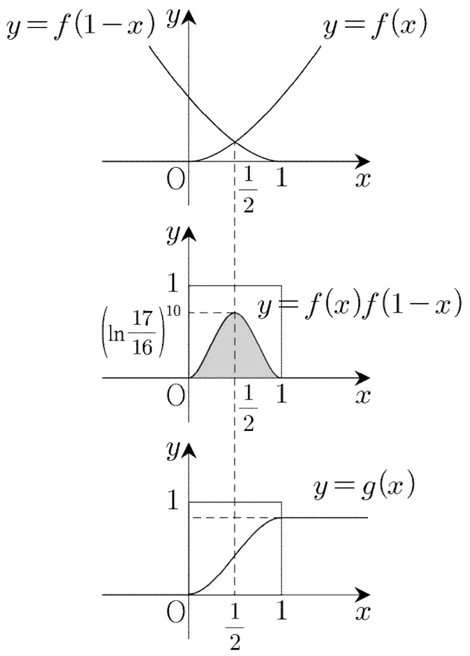
답 ②

[풀이2]

네 함수

$f(x)$, $f(1-x)$, $y=f(x)f(1-x)$, $y=g(x)$

의 그래프는 아래 그림과 같다.



이제 그 이유를 알아보자.

• 함수 $y=\{\ln(1+x^4)\}^{10}$의 도함수는

$$y' = 10\{\ln(1+x^4)\}^9 \frac{4x^3}{1+x^4}$$

이고, $x>0$일 때, $y'>0$이므로

함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 증가한다.

• 함수 $y=f(x)f(1-x)$는 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이고, $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값을 갖는다. 이때, 최댓값은 $\left(\ln\frac{17}{16}\right)^{10}(<1)$이다.

ㄱ. (참)

함수 $g(x)$의 그래프에서 이 명제가 참임을 알 수 있다.

ㄴ. (참)

함수 $g'(x)=f(x)f(1-x)$가 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

함수 $g(x)$는 점 $\left(\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$에 대하여 대칭이다.

증명은 다음과 같다.

$g'(x)=g'(1-x)$

$g(x)=-g(1-x)+C$ (단, C는 적분상수)

$x=0$을 대입하면

$g(0)=-g(1)+C,\ C=g(1)$

이를 다시 위의 등식에 대입하면

$$\frac{g(x)+g(1-x)}{2} = \frac{g(1)}{2}$$

곡선 $y=g(x)$는 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{g(1)}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

그런데 이 점은 곡선 $y=g(x)$ 위에 있으므로

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{g(1)}{2}$$

$$\therefore\ g(1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right)$$

ㄷ. (거짓)

$\left(\ln\frac{17}{16}\right)^{10} < 1$이므로

$\left(\because \frac{17}{16} < e,\ e \approx 2.7\right)$

$\int_0^1 f(t)f(1-t)dt < 1 =$(한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이)

$x \ge 1$일 때, $g(x)=g(1)<1$

따라서 $g(a) \ge 1$인 실수 a는 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

[참고]

함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가함을 다음과 같이 보여도 좋다. (합성함수의 관점)

x: $0 \Rightarrow \infty$ (증가)

$1+x^4$: $1 \Rightarrow \infty$ (증가)

$\ln(1+x^4)$: 0 ⇨ ∞ (증가)

$\{\ln(1+x^4)\}^{10}$: 0 ⇨ ∞ (증가)

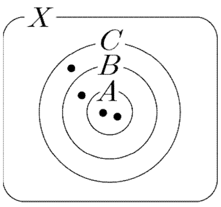
따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가한다.

19

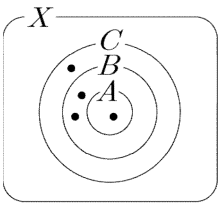
[풀이]

(1) $n(C)=4$인 경우

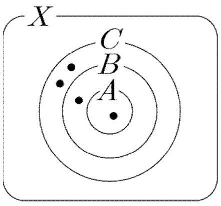
다음의 세 경우가 가능하다.



[경우1]



[경우2]



[경우3]

[경우1]: ${}_4\mathrm{C}_2\times 2!=12$ $\cdots(*)$

[경우2]: ${}_4\mathrm{C}_2\times 2!=12$

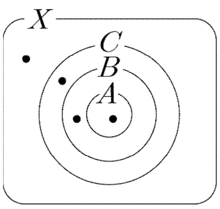
[경우3]: ${}_4\mathrm{C}_2\times 2!=12$

$(*)$에서 ${}_4\mathrm{C}_2$는 집합 A에 올 원소를 결정하는 경우의 수이고, $2!$은 두 집합 $B-A$, $C-B$에 올 원소를 결정하는 경우의 수이다. 예를 들어

$A=\{1,\ 3\}$, $B-A=\{2\}$, $C-B=\{4\}$

나머지 경우도 마찬가지이다.

(2) $n(C)=3$인 경우



[경우4]

[경우4]: $4!=24$

이때, $4!$은 네 개의 집합 A, $B-A$, $C-B$, $D-C$에 올 원소를 결정하는 경우의 수이다.

(1), (2)에서 구하는 확률은

$$\frac{12+12+12+24}{{}_{15}\mathrm{P}_3}=\frac{2}{91}$$

답 ②

20

[풀이1]

정적분의 치환적분법에 의하여

$x-t=X$로 두면 $-dt=dX$이고,

$t=0$일 때 $X=x$, $t=x$일 때 $X=0$이므로

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$$

$$=\int_x^0 (x-X)f(X)(-dX)$$

$$=\int_0^x (x-X)f(X)dX$$

$$=x\int_0^x f(X)dX-\int_0^x Xf(X)dX$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\int_0^x f(X)dX+xf(x)-xf(x)$$

즉, $g'(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$

정적분의 치환적분법과 부분적분법에 의하여

$$g'(x)=\int_0^x \sin(\pi\sqrt{t})dt$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi\sqrt{x}} X\sin X dX$$

$(\pi\sqrt{t}=X,\ \pi^2 t=X^2,\ \pi^2 dt=2XdX)$

$$=\frac{2}{\pi^2}\left[X(-\cos X)\right]_0^{\pi\sqrt{x}}-\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi\sqrt{x}}(-\cos X)dX$$

$$=-\frac{2}{\pi}\sqrt{x}\cos(\pi\sqrt{x})+\frac{2}{\pi^2}\left[\sin X\right]_0^{\pi\sqrt{x}}$$

$$=-\frac{2}{\pi}\sqrt{x}\cos(\pi\sqrt{x})+\frac{2}{\pi^2}\sin(\pi\sqrt{x})$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\cos(\pi\sqrt{x})\{\tan(\pi\sqrt{x})-\pi\sqrt{x}\}$$

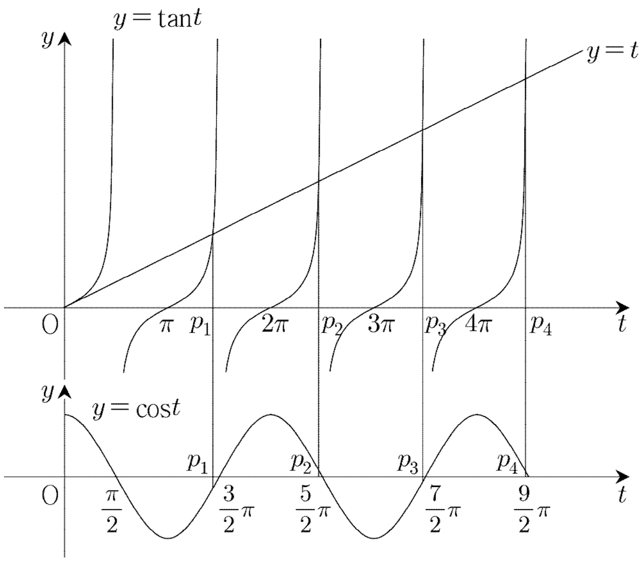
$$\left(=\frac{2}{\pi^2}\cos t\{\tan t-t\}\right)$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \tan(\pi\sqrt{x})=\pi\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \tan t=t$ (이때, $t=\pi\sqrt{x}$로 둠)

구간 $(0,\ \infty)$에서 곡선 $y=\tan t$와 직선 $y=t$의 교점의 t좌표를 작은 수부터 크기순으로 p_1, p_2, p_3, $\cdots$이

라고 하자.



(단, $\cos p_1 < 0$, $\cos p_2 > 0$, $\cos p_3 < 0$, $\cos p_4 > 0$)

$t=p_1$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $t=p_1$에서 극댓값을 갖는다.

이때, $\pi < p_1 < 2\pi$

$t=p_2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $t=p_2$에서 극솟값을 갖는다.

이때, $2\pi < p_2 < 3\pi$

마찬가지의 방법으로

함수 $g(x)$는 $t=p_3$, p_5, p_7, $\cdots$에서 극댓값을 갖고,

$t=p_4$, p_6, p_8, $\cdots$에서 극솟값을 갖는다.

이때, $a_1=p_1$, $a_2=p_3$, $a_3=p_5$, $\cdots$이므로

$\pi < \pi\sqrt{a_1} < 2\pi$, 즉 $1^1 < a_1 < 2^2$

$3\pi < \pi\sqrt{a_2} < 4\pi$, 즉 $3^2 < a_2 < 4^2$

$5\pi < \pi\sqrt{a_3} < 6\pi$, 즉 $5^2 < a_3 < 6^2$

$\vdots$

$11\pi < \pi\sqrt{a_6} < 12\pi$, 즉 $11^2 < a_6 < 12^2$

$\therefore\ k=11$

답 ①

[풀이2]

정적분의 치환적분법에 의하여

$x-t=X$로 두면 $-dt=dX$이고,

$t=0$일 때 $X=x$, $t=x$일 때 $X=0$이므로

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$$

$$=\int_x^0 (x-X)f(X)(-dX)$$

$$=\int_0^x (x-X)f(X)dX$$

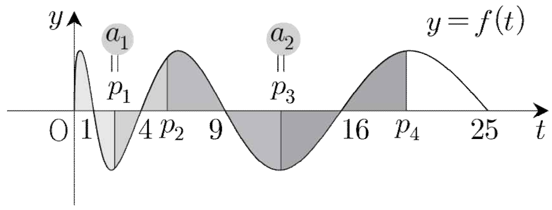
$$=x\int_0^x f(X)dX-\int_0^x Xf(X)dX$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\int_0^x f(X)dX+xf(x)-xf(x)$$

즉, $g'(x)=\int_0^x f(t)dt$

방정식 $g'(x)=0$의 해를 작은 수부터 크기순으로 p_1, p_2, p_3, $\cdots$이라고 하자. (단, 0은 제외)



$t=p_1$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $t=p_1$에서 극댓값을 갖는다.

이때, $\pi < p_1 < 2\pi$

$t=p_2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $t=p_2$에서 극솟값을 갖는다.

이때, $2\pi < p_2 < 3\pi$

마찬가지의 방법으로

함수 $g(x)$는 $t=p_3$, p_5, p_7, $\cdots$에서 극댓값을 갖고,

$t=p_4$, p_6, p_8, $\cdots$에서 극솟값을 갖는다.

이때, $a_1=p_1$, $a_2=p_3$, $a_3=p_5$, $\cdots$이므로

$\pi < \pi\sqrt{a_1} < 2\pi$, 즉 $1^1 < a_1 < 2^2$

$3\pi < \pi\sqrt{a_2} < 4\pi$, 즉 $3^2 < a_2 < 4^2$

$5\pi < \pi\sqrt{a_3} < 6\pi$, 즉 $5^2 < a_3 < 6^2$

$\vdots$

$11\pi < \pi\sqrt{a_6} < 12\pi$, 즉 $11^2 < a_6 < 12^2$

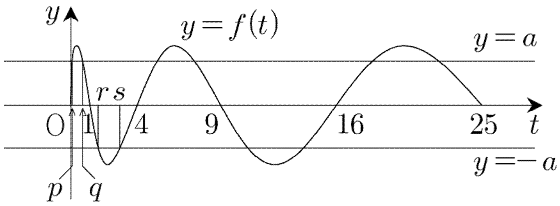
$\therefore\ k=11$

답 ①

[참고]

앞선 풀이가 가능하기 위해서는 구간 $[k^2,\ (k+1)^2]$에서 곡선 $y=f(t)$와 t축으로 둘러싸인 도형이 점점 넓

어져야 한다. (단, k는 음이 아닌 정수)
다음은 이에 대한 증명이다.
구간 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=a$의 두 교점의 t좌표를 각각 $p,\ q(p<q)$라고 하자. 그리고 구간 $(1,\ 4)$에서 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=-a$의 두 교점의 t좌표를 각각 $r,\ s(r<s)$라고 하자. (단, $0\le a<1$)



$\sin(\pi\sqrt{p})=a,\ \sin(\pi\sqrt{q})=a$
이므로
$\sin(\pi\sqrt{r})=\sin(\pi+\pi\sqrt{p})=-a,$
$\sin(\pi\sqrt{s})=\sin(\pi+\pi\sqrt{q})=-a$
풀면
$\pi\sqrt{r}=\pi+\pi\sqrt{p},\ \pi\sqrt{s}=\pi+\pi\sqrt{q}$
즉, $\sqrt{r}=1+\sqrt{p},\ \sqrt{s}=1+\sqrt{q}$
양변을 제곱하면
$r=1+2\sqrt{p}+p,\ s=1+2\sqrt{q}+q$
두 등식을 변변히 빼서 정리하면
$s-r-(q-p)=2(\sqrt{q}-\sqrt{p})>0$
$\therefore\ s-r>q-p$
정적분은 구분구적법으로 정의되므로
(즉, 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=\pm a$가 만나서 생긴 선분들을 밑변으로 하는 직사각형의 넓이로 구분구적법을 하면)

$$\int_0^1|f(t)|dt<\int_1^4|f(t)|dt$$

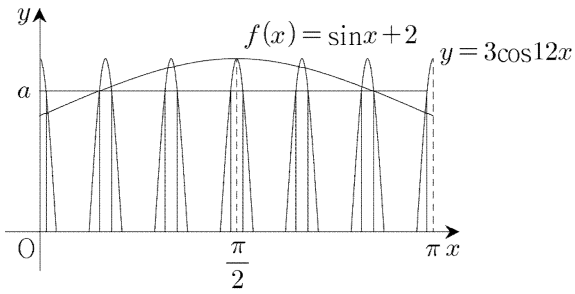
마찬가지의 방법으로 구간 $[k^2,\ (k+1)^2]$에서 곡선 $y=f(t)$와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 k의 값이 커질수록 커진다.

21

[풀이1]

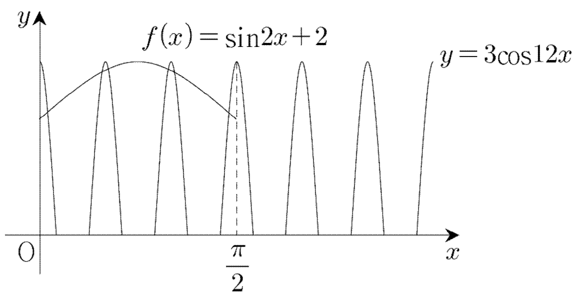
두 함수 $f(x),\ g(x)$의 주기는 각각 $\dfrac{2\pi}{k},\ \dfrac{\pi}{6}$이다.

(1) $k=1$인 경우



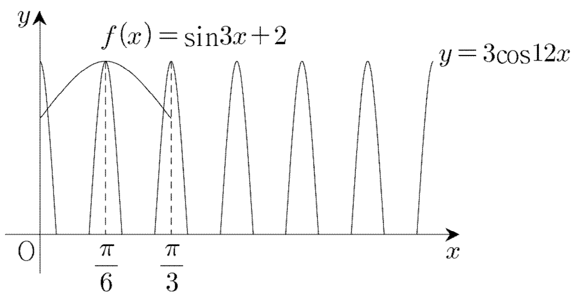
예를 들어 상수 a의 값이 위의 그림과 같을 때, $f(x)=a$인 모든 x에 대하여 $g(x)=a$이다.
이는 다른 a에 대해서도 마찬가지이다.
따라서 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.
위와 같이 구간 $[0,\ \pi]$에서의 상황만을 생각한 이유는 두 함수 $f(x),\ g(x)$의 주기와 대칭성 때문이다. 즉, 다른 구간에서도 마찬가지일 것이다.

(2) $k=2$인 경우



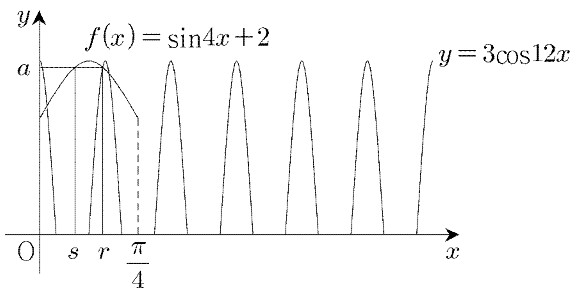
(1)과 마찬가지로 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

(3) $k=3$인 경우



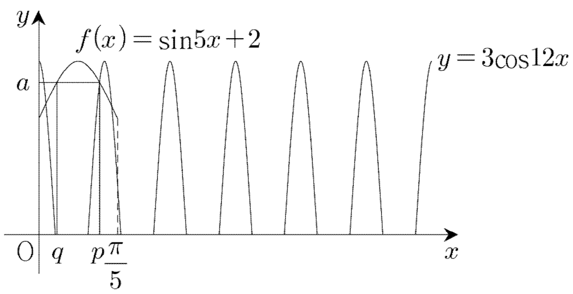
(1)과 마찬가지로 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

(4) $k=4$인 경우



예를 들어 상수 a의 값이 위의 그림과 같을 때, $f(r)=f(s)=a$이지만 $g(r)=a,\ g(s)\neq a$이다.

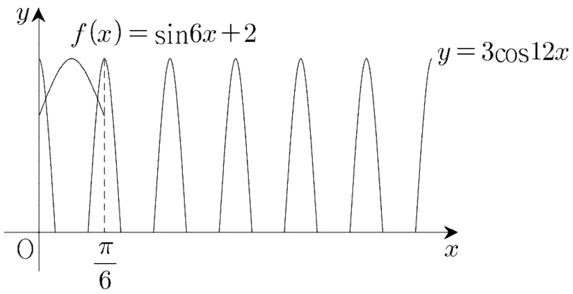
(5) $k=5$인 경우



예를 들어 상수 a의 값이 위의 그림과 같을 때,

$f(p)=f(q)=a$이지만 $g(p)=a$, $g(q)\neq a$이다.

(6) $k=6$인 경우



(1)과 마찬가지로 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

$k\geq 7$일 때에는 (4), (5)와 마찬가지로

$f(\triangle)=a$이지만 $g(\square)\neq a$인 경우가 발생한다.

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 6 (6의 약수) 뿐이다.

답 ②

[풀이2]

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중에서 한 점을 $(p,\ a)$라고 하자.

$f(p)=g(p)=a$

$\Leftrightarrow \sin kp+2=3\cos 12p=a$

이때, $x=\dfrac{n}{k}\pi+(-1)^n p$ (n는 정수) $\cdots(*)$

는 방정식 $f(x)=a$의 실근이다.

문제에서 주어진 조건에 의하여

이 실근이 방정식 $g(x)=a$의 실근이어야 하므로

$g\left(\dfrac{n}{k}\pi+(-1)^n p\right)$

$=3\cos 12\left(\dfrac{n}{k}\pi+(-1)^n p\right)$

$=3\cos\left(\dfrac{12n}{k}\pi+12(-1)^n p\right)=a$

이때, $\dfrac{12n}{k}\pi=\cdots,\ -2\pi,\ 0,\ 2\pi,\ \cdots$이면 된다.

즉, $\dfrac{6n}{k}\pi=\cdots,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ \cdots$

k는 6의 약수이므로 1, 2, 3, 6이다.

($\because n=1$일 때에도 위의 등식은 성립해야 한다.)

따라서 자연수 k의 개수는 4이다.

답 ②

22

[풀이]

주어진 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r\, x^{6-r}\left(\dfrac{4}{x^2}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r\, 4^r x^{6-3r}$

$x^{6-3r}=x^3$에서 $r=1$이므로

x^3의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_1\times 4=24$

답 24

23

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\ln(2x-1)+x\times\dfrac{2}{2x-1}$

$\therefore\ f'(1)=2$

답 2

24

[풀이]

진수의 조건에 의하여

$x>0,\ x>\dfrac{3}{2}$, 즉 $x>\dfrac{3}{2}$

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\log_4(2x-3)=\dfrac{1}{2}\log_2(2x-3)$

이므로 주어진 방정식은

$\log_2 x=1+\dfrac{1}{2}\log_2(2x-3)$

$2\log_2 x=\log_2 4+\log_2(2x-3)$

$\log_2 x^2=\log_2(8x-12)$

$x^2=8x-12,\ x^2-8x+12=0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

모든 실수 x의 값의 곱은 12이다.
답 12

[참고]
$(x-2)(x-6)=0$, $x=2$ 또는 $x=6$

$2>\frac{3}{2}$, $6>\frac{3}{2}$

이므로 근과 계수와의 관계를 적용할 수 있는 것이다.

25

[풀이]

$1+\frac{2k}{n}=x$로 두면

$a=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4$

$=\int_1^3 x^4dx=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^3=\frac{242}{5}$

$\therefore$ $5a=242$

답 242

[참고]

- $\frac{2k}{n}=x$로 두는 경우

$a=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4=\int_0^2(1+x)^4dx$

- $\frac{k}{n}=x$로 두는 경우

$a=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4=\int_0^1 2(1+2x)^4dx$

26

[풀이1]

$Y=10X+1$로 두어도 답을 구하는데 지장이 없다.

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=5-2^2=1$

$\therefore$ $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$

$=\mathrm{E}(10X+1)+\mathrm{V}(10X+1)$

$=10\mathrm{E}(X)+1+10^2\mathrm{V}(X)$

$=10\times2+1+10^2\times1=121$

답 121

[풀이2]

좀 더 엄밀한 풀이를 알아보자.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$a+b+c+d=1$ (확률의 합은 1)

$\mathrm{E}(X)=a+2b+3c+4d=2$

$\mathrm{E}(X^2)=a+4b+9c+16d=5$

이므로

$\mathrm{E}(Y)=11a+21b+31c+41d$

$=10(a+2b+3c+4d)+(a+b+c+d)$

$=10\times2+1=21$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-(\mathrm{E}(Y))^2$

$=11^2a+21^2b+31^2c+41^2d-21^2$

$=100(a+4b+9c+16d)$

$+20(a+2b+3b+4d)$

$+(a+b+c+d)-21^2$

$=100\times5+20\times2+1-21^2$

$=100$

$\therefore$ $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$

$=21+100=121$

답 121

27

[풀이]

수열의 합과 일반항의 관계에 의하여

$S_{n+3}-S_n$

$=a_{n+3}+a_{n+2}+a_{n+1}$

$=a_1r^{n+2}+a_1r^{n+1}+a_1r^n$

$=a_1r^{n-1}(r^3+r^2+r)=13\times3^{n-1}$

위의 등식에서

$r=3$, $a_1(r^3+r^2+r)=13$

이므로 $a_1=\frac{13}{39}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ $a_4=a_1\times r^3=\frac{1}{3}\times3^3=9$

답 9

[참고]

r의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다. (좀 더 엄밀하게)

$$\frac{S_5-S_2}{S_4-S_1}=\frac{a_5+a_4+a_3}{a_4+a_3+a_2}$$

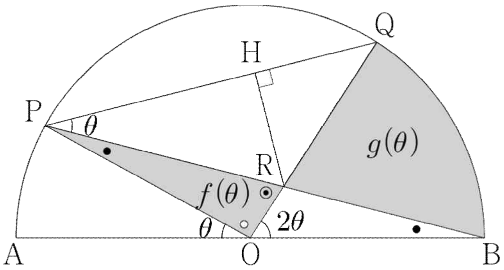
$$=\frac{ra_4+ra_3+ra_2}{a_4+a_3+a_2}=\frac{r(a_4+a_3+a_2)}{a_4+a_3+a_2}$$

$$=r=3=\frac{13\times 3^2}{13\times 3}$$

$\therefore\ r=3$

28

[풀이]



(단, $\circ=\pi-3\theta$, $\bullet=\dfrac{\theta}{2}$, $\odot=\dfrac{5}{2}\theta$)

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$$\bullet=\angle\mathrm{PBA}=\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{POA},$$

$$\angle\mathrm{QPB}=\theta=\frac{1}{2}\angle\mathrm{QOB}$$

이등변삼각형의 성질에 의하여

$$\bullet=\angle\mathrm{BPO}=\frac{\theta}{2}=\angle\mathrm{PBO}$$

$\circ=\angle\mathrm{POR}=\pi-3\theta$이므로

$$\odot=\angle\mathrm{ORP}=\pi-\left(\frac{\theta}{2}+\pi-3\theta\right)=\frac{5}{2}\theta$$

삼각형 POR에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\sin\frac{5}{2}\theta}=\frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\sin(\pi-3\theta)}$$

$$\overline{\mathrm{OR}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta},\quad \overline{\mathrm{PR}}=\frac{\sin3\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}$$

이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}\sin3\theta,$$

$g(\theta)=$(◇QOB의 넓이)$-$(△ROB의 넓이)

$$=\frac{1}{2}2\theta-\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}\sin2\theta$$

직각삼각형 PRH에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{RH}}=\frac{\sin3\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}\sin\theta$$

함수의 극한의 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}\sin3\theta+\theta-\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}\sin2\theta}{\frac{\sin3\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}\frac{\sin3\theta}{\theta}+1-\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}\frac{\sin2\theta}{\theta}}{\frac{\sin3\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}\frac{\sin\theta}{\theta}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times3+1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times2}{\frac{6}{5}\times1}$$

$$=\frac{11}{12}$$

$\therefore\ p+q=23$

답 23

[참고]

함수의 극한의 근사적인 계산을 하면 빠르게 극한값을 계산할 수 있다.

지금부터 근사($\approx$)는 모두 $\theta\to0+$일 때이다.

$\circ=\pi-3\theta$, $\odot=\dfrac{5}{2}\theta$, $\bullet=\dfrac{\theta}{2}$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OR}}:\overline{\mathrm{PR}}\approx\frac{5}{2}:\frac{1}{2}:3$$

즉, $\overline{\mathrm{OP}}=1$, $\overline{\mathrm{OR}}\approx\frac{1}{5}$, $\overline{\mathrm{PR}}\approx\frac{6}{5}$

$\frac{f(\theta)}{\theta}\approx\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{5}\times3=\frac{3}{10}$,

$\frac{g(\theta)}{\theta}\approx\frac{1}{2}\times2-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{5}\times2=\frac{4}{5}$,

$\frac{\overline{\mathrm{RH}}}{\theta}\approx\frac{6}{5}$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}=\frac{\frac{3}{10}+\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{11}{12}$$

29

[풀이1]

우선 흰 공 4개를 세 상자에 넣는 경우를 생각하자.

$4=4+0+0$ …(경우1)

$=3+1+0$ …(경우2)

$=2+2+0$ …(경우3)

$=2+1+1$ …(경우4)

각 경우에 대하여 공이 0개 또는 1개가 담긴 상자에 검은 공을 넣어서 모든 상자에 공이 2개 미만으로 담기는 경우가 없도록 하자.

	상자	상자	상자	남는 검은 공
(경우1)	○○ ○○	●●	●●	●●
(경우2)	○○ ○	○●	●●	●● ●
(경우3)	○○	○○	●●	●● ●●
(경우4)	○○	○●	○●	●● ●●

이제 남은 검은 공을 넣는 경우의 수와 상자를 결정하는 경우의 수는

(경우1): $a+b+c=2$ (단, $a\geq0$, $b\geq0$, $c\geq0$)

해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 3이다.

(경우2): $a+b+c=3$ (단, $a\geq0$, $b\geq0$, $c\geq0$)

해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 $3!$이다.

(경우3): $a+b+c=4$ (단, $a\geq0$, $b\geq0$, $c\geq0$)

해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 3이다.

(경우4): $a+b+c=4$ (단, $a\geq0$, $b\geq0$, $c\geq0$)

해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 3이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times3+10\times3!+15\times3+15\times3=168$

답 168

[참고]

다음과 같은 계산도 가능하다. (하지만 권장 풀이는 아닙니다.)

우선 검은 공 6개를 세 상자에 넣는 경우를 생각하자.

$6=6+0+0$ …(경우1)

$=5+1+0$ …(경우2)

$=4+2+0$ …(경우3)

$=4+1+1$ …(경우4)

$=3+3+0$ …(경우5)

$=3+2+1$ …(경우6)

$=2+2+2$ …(경우7)

각 경우에 대하여 공이 0개 또는 1개가 담긴 상자에 흰 공을 넣어서 모든 상자에 공이 2개 미만으로 담기는 경우가 없도록 하자.

	상자	상자	상자	남는 흰 공
(경우1)	●● ●● ●●	○○	○○	×
(경우2)	●● ●● ●	●○	○○	○
(경우3)	●● ●●	●●	○○	○○
(경우4)	●● ●●	●○	●○	○○
(경우5)	●● ●	●● ●	○○	○○
(경우6)	●● ●	●●	●○	○○ ○
(경우7)	●●	●●	●●	○○ ○○

이제 남은 흰 공을 넣는 경우의 수와 상자를 결정하는 경우의 수는

(경우1): 상자를 결정하는 경우의 수는 3이다.

(경우2): $a+b+c=1$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

해의 개수는 ${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 $3!$이다.

(경우3): $a+b+c=2$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

해의 개수는 ${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 $3!$이다.

(경우4): $a+b+c=2$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

해의 개수는 ${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 3이다.

(경우5): $a+b+c=2$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

해의 개수는 ${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 3이다.

(경우6): $a+b+c=3$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

해의 개수는 ${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_2=10$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 $3!$이다.

(경우7): $a+b+c=4$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

해의 개수는 ${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_2=15$이고,

상자를 결정하는 경우의 수는 1이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$3+3\times 3!+6\times 3!+6\times 3+6\times 3+10\times 3!+15\times 1$

$=168$

[풀이2]

여집합의 관점에서 문제를 해결해보자. (이 역시 권장 풀이는 아니다.)

우선 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않도록 세 상자에 공을 넣는 경우의 수를 구하자.

상자	상자	상자	
0	0	≥ 2	(경우1)
1	0	≥ 2	(경우2)
1	1	≥ 2	(경우3)
0	≥ 2	≥ 2	(경우4)
1	≥ 2	≥ 2	(경우5)

각각에 대한 경우의 수는

(단, ○는 흰 공이고, ●는 검은 공이다.)

(경우1): 3

(×, ×, ≥ 2)

(경우2): $2\times 3!=12$

(○, ×, ≥ 2), (●, ×, ≥ 2)

(경우3): $2\times 3+3!=12$

(○, ○, ≥ 2), (●, ●, ≥ 2), (○, ●, ≥ 2)

(경우4): $({}_2H_4\times{}_2H_6-6)\times 3=87$

전체에서 다음의 경우들을 제외

(×, ×, ≥ 2), (×, ≥ 2, ×),

(×, ○, ≥ 2), (×, ≥ 2, ○),

(×, ●, ≥ 2), (×, ≥ 2, ●)

(경우5):

$\{({}_2H_3\times{}_2H_6-6)+({}_2H_4\times{}_2H_5-6)\}\times 3=138$

전체에서 다음의 경우들을 제외

(○, ×, ≥ 2), (○, ≥ 2, ×),

(●, ×, ≥ 2), (●, ≥ 2, ×),

(○, ○, ≥ 2), (○, ≥ 2, ○),

(●, ●, ≥ 2), (●, ≥ 2, ●),

(●, ○, ≥ 2), (●, ≥ 2, ○),

(○, ●, ≥ 2), (○, ≥ 2, ●)

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3H_4\times{}_3H_6-(3+12+12+87+138)$

$={}_6C_2\times{}_8C_2-252=168$

답 168

30

[풀이1]

주어진 부등식과 다음은 필요충분조건이다.

모든 실수 x에 대하여

$(f(x)=)e^{x-2}-(ax+b)\geq 0$,

$(g(x)=)(ax+b)+e^{-x+1}\geq 0$

이는 다음과 필요충분조건이다.

(함수 $f(x)$의 최솟값)≥ 0,

(함수 $g(x)$의 최솟값)≥ 0

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수는 각각

$f'(x)=e^{x-2}-a$, $g'(x)=a-e^{-x+1}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2+\ln a$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1-\ln a$

$x=2+\ln a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=2+\ln a$에서 최솟값을 갖는다. 이때, 최솟값은 0 이상이므로

$-a\ln a-a-b\geq 0$

$x=1-\ln a$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=1-\ln a$에서 최솟값을 갖는다. 이때, 최솟값은 0 이상이므로

$2a+b-a\ln a\geq 0$

위의 두 부등식을 정리하면

$-2a+a\ln a\leq b\leq -a\ln a-a$ (단, $a>0$)

각 변에 a를 곱하면

$(p(a)=)-2a^2+a^2\ln a$

$\leq ab\leq -a^2\ln a-a^2(=q(a))$ $\cdots(*)$

이제 a의 범위를 구하자.

$(*)$에서 $-2a^2+a^2\ln a\leq -a^2\ln a-a^2$

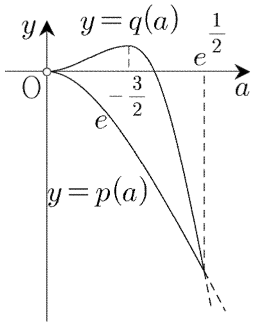
$-1+2\ln a\leq 0$, $0<a\leq e^{\frac{1}{2}}$

함수 $p(a)$의 최솟값(m)과 함수 $q(a)$의 최댓값(M)을 구하자.

$p'(a)=-3a+2a\ln a$, $q'(a)=-3a-2a\ln a$

$p'(a)=0 \Leftrightarrow a=e^{\frac{3}{2}}$ $(\times)$

$q'(a)=0 \Leftrightarrow a=e^{-\frac{3}{2}}$ (극대일 때)



위의 그림에서

함수 $p(a)$는 $a=e^{\frac{1}{2}}$일 때, 최솟값 $m=-\frac{3}{2}e$를 갖고,

함수 $q(a)$는 $a=e^{-\frac{3}{2}}$일 때, 최댓값 $M=\frac{1}{2}e^{-3}$을 갖는다.

$|M\times m^3|=\frac{27}{16}$

이므로

$\therefore$ $p+q=43$

답 43

[풀이2]

두 곡선 $y=e^x$, $y=-e^{-x}$는 원점에 대하여 대칭이므로

두 곡선 $y=e^{x-2}$, $y=-e^{-(x-1)}$은 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이다.

이때, $\frac{3}{2}=\frac{1+2}{2}$이다.

곡선 $y=e^{x-2}$ 위의 점 $(t,\ e^{t-2})$에서의 접선의 방정식은

$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$, 즉

$y=e^{t-2}x+(1-t)e^{t-2}$ $\cdots㉠$

곡선 $y=-e^{-x+1}$ 위의 점 $(s,\ -e^{-s+1})$에서의 접선의 방정식은

$y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$, 즉

$y=e^{-s+1}x-(s+1)e^{-s+1}$ $\cdots㉡$

㉠, ㉡의 기울기가 같다고 하면

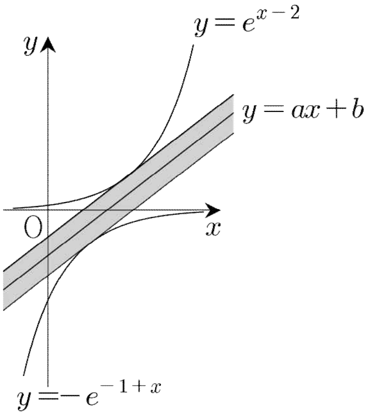
$e^{t-2}=e^{-s+1}$, 즉 $s=3-t$

(이때, 두 곡선의 점 대칭성을 이용하면

$\frac{t+s}{2}=\frac{3}{2}$, $t+s=3$임을 바로 유도할 수 있긴 하다.)

이를 ㉡에 대입하면

$y=e^{t-2}x+(t-4)e^{t-2}$ $\cdots$ ㉢



$a=e^{t-2}$(기울기)일 때, 직선 $y=ax+b$가 문제에서 주어진 부등식을 만족시키기 위한 b의 범위는

$(t-4)e^{t-2}\le b\le (1-t)e^{t-2}$

($\because$ ㉠, ㉢)

$(t-4)e^{2t-4}\le ab\le (1-t)e^{2t-4}$ $\cdots$(*)

위의 등식에서

$(t-4)e^{2t-4}\le (1-t)e^{2t-4}$,

$t-4\le 1-t$, $t\le \dfrac{5}{2}$ (t의 범위)

(*)을 다시 쓰면

$(f(t)=)(t-4)e^{2t-4}$

$\le ab\le (1-t)e^{2t-4}(=g(t))$

(단, $t\le \dfrac{5}{2}$)

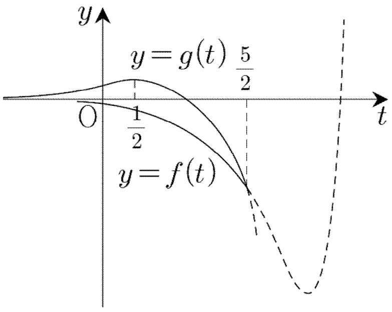
두 함수 $f(t)$, $g(t)$의 도함수는 각각

$f'(t)=(2t-7)e^{2t-4}$,

$g'(t)=(1-2t)e^{2t-4}$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{7}{2}$ (×)

$g'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$ (극대일 때)



함수 $f(t)$는 $t=\dfrac{5}{2}$일 때 최솟값(m)을 갖고, 함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값(M)을 갖는다.

$M=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{-3}$, $m=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}e$

$|M\times m^3|=\dfrac{27}{16}$

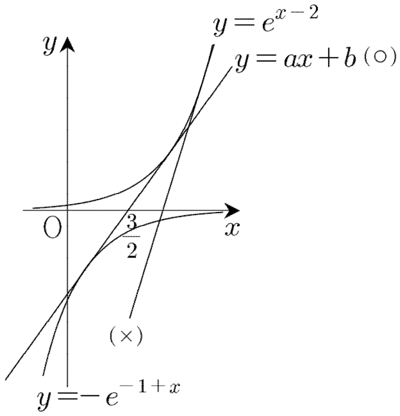
이므로

$\therefore$ $p+q=43$

답 43

[참고]

t의 범위를 다음과 같이 구해도 좋다.



그런데 t는 직선 ㉠이 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$을 지날 때, 최댓값을 가지므로

$0=\dfrac{3}{2}e^{t-2}+(1-t)e^{t-2}$, $t=\dfrac{5}{2}$

따라서 t의 범위는 $t\le \dfrac{5}{2}$