2021학년도 설바이벌 1회 문제지

수학 영역
(가 형)

성명			수험번호						–				

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

아마추어는 걱정하는 대로, 프로는 상상하는 대로 된다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

우 주 설 모 의 평 가

제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

2. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$1+2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{1}{4}$

3. 5개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 3개의 수를 택할 때, 택한 세 수의 곱이 4의 배수인 경우의 수는? [3점]

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

다음 논리를 사용하자.

4의 배수 = (짝수) − (4의 배수가 아닌 2의 배수)

= (전체 − 홀수) − (2 × 홀수)

$= {}_5H_3 - {}_3H_3 - {}_3H_2$

$= 35 - 10 - 6 = 19.$

4. $\lim_{n\to\infty} n\times\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}+n}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}+n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}+n}}\times\frac{n}{\sqrt{n^2+5n}+n}$$

$= 1\times\frac{1}{2}$

5. 함수 $y=2^{2x}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 y축의 방향으로 b만큼 평행 이동한 그래프가 $y=4^{x-1}-1$의 그래프와 일치할 때, $a+b$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

$$y=2^{2(x-a)}+b+1=4^{x-a}+b+1$$
$$=4^{x-1}-1$$
$a=1$, $b=-2$

6. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=t-\sin t\cos t,\qquad y=\frac{1}{\tan t}$$

이다. $0<t<\frac{\pi}{2}$에서 점 P의 속력의 최솟값은? [3점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

$$속력=\sqrt{(\underbrace{1-\cos^2 t}_{\sin^2 t}+\sin^2 t)^2+\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)^2}$$
$$=\sqrt{4\sin^4 t+\frac{1}{\sin^4 t}}$$
$$\geq\sqrt{2\cdot\sqrt{4}}=2$$
(산술기하)

$\sin^8 t=\frac{1}{4}$인
t가 존재함 $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$

7. 곡선 $e^{xy}=2x^2+y$ 위의 점 $(0, a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $a+b$의 값은? [3점]

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

$x=0$
$y=a$ 대입 ⇒ $a=1$

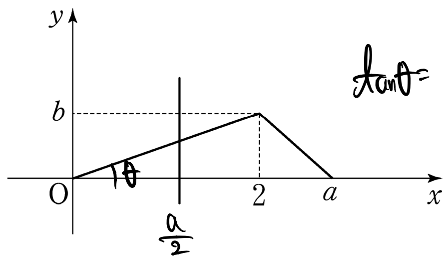
음함수 미분후 정리

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x-ye^{xy}}{xe^{xy}-1}$$

$x=0$, $y=1$ ⇒ $b=1$

8. 두 양수 a, b에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, 확률밀도함수의 그래프는 다음과 같다.

$\mathrm{P}\left(0 \le X \le \frac{a}{2}\right) = \frac{b}{2}$일 때, $a^2 + b^2$의 값은? [3점]



$\tan\theta = \frac{b}{2}$

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{17}{2}$ ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ $\frac{21}{2}$

$P(0 \le X \le a) = \frac{ab}{2} = 1 \rightarrow ab = 2$

$P(0 \le X \le \frac{a}{2}) = \frac{a}{2} \times \underbrace{\left(\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}\right)}_{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{b}{2}$

$a = 4b$

$\begin{cases} a^2 = 8 \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

9. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이

$a_{n+2} = a_n + 3$

$a_2 = -a_1$

을 만족시킨다. $a_1 + a_2 = 0$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [3점]

① 30 ② 45 ③ 60 ④ 75 ⑤ 90

$\sum_{n=1}^{10} a_n = \begin{cases} \sum a_{홀수} = 5 \times (a_1 + 6) \\ \sum a_{짝수} = 5 \times (a_2 + 6) \end{cases}$

$= 5a_1 + 30 + 5a_2 + 30$

$= 60$

10. 함수

$$f(x) = \left(x^3 + \frac{a}{x}\right)^4$$

에 대하여 $f'(x)$의 전개식에서 x^3의 계수가 54일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

$\Rightarrow f(x) = x^{12} + 4 \cdot x^9 \cdot \frac{a}{x} + \underbrace{6 \cdot x^6 \cdot \left(\frac{a^2}{x^2}\right)}_{6a^2x^4} + \cdots$

$f'(x) = 12x^{11} + \cdots \underbrace{+24a^2 \cdot x^3}_{54}$

$a^2 = \frac{9}{4}$ $a = \frac{3}{2}$ $(\because a > 0)$

11. 함수 $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\sin x}$에 대하여 $0<x<\pi$에서 방정식 $f(x)=f'(x)$의 실근은? [3점]

① $\dfrac{\pi}{6}$ ② $\dfrac{\pi}{4}$ ③ $\dfrac{\pi}{3}$ ④ $\dfrac{\pi}{2}$ ⑤ $\dfrac{3}{4}\pi$

$f'(x)= e^{2x}\left(\dfrac{2}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$

$f(x)-f'(x)= \underset{\oplus}{e^{2x}}\left\{\underbrace{\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sin x}}_{=0}\right\}=0$

$0<x<\pi$ 이므로, $\sin x\neq 0$

$\cos x=\sin x$ 실근 → $x=\dfrac{\pi}{4}$

12. 좌표평면 위의 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P, Q에 대하여 동경 OP, OQ가 나타내는 각을 각각 θ, 4θ라 하자. $0<\theta<2\pi$일 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 θ의 합은? (단, 점 O는 원점이다.) [3점]

좌표평면 위의 직선 OP와 직선 OQ가 일치한다.

① 4π ② $\dfrac{13}{3}\pi$ ③ $\dfrac{14}{3}\pi$ ④ 5π ⑤ $\dfrac{16}{3}\pi$

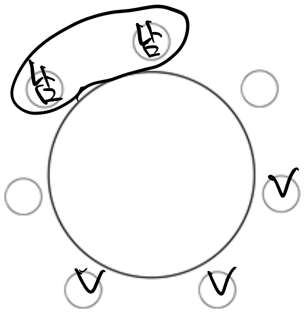
직선일치 → 동경 차 $= n\pi$

$4\theta-\theta=3\theta=n\pi$

$\theta=\dfrac{n}{3}\pi$ $(1\leq n\leq 5)$

→ 합 $=\dfrac{15}{3}\pi=5\pi$

13. 그림과 같이 원형 탁자에 일정한 간격으로 놓여 있는 7개의 의자에 남학생 3명과 여학생 4명 모두가 이 7개의 의자에 앉으려고 한다. 남학생 3명 중 2명만 이웃하도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 360 ② 396 ③ 432 ④ 468 ⑤ 504

V = 남은 남자 1명이 앉을 수 있는 경우.

$\therefore {}_3C_2 \times {}_3C_1 \times (5-1)! \times 2! = 432$

14. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이

$$\frac{a_{n+1}}{n} \geq \frac{a_n}{{a_n}^2+n-1}$$

를 만족시킬 때, 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geq n \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 보이는 과정이다.

$\frac{a_{n+1}}{n} \geq \frac{a_n}{{a_n}^2+n-1}$의 양변에 역수를 취하면

$\frac{n}{a_{n+1}} - \frac{n-1}{a_n} \leq a_n$ 이고, 이것으로 부터 부등식

$\frac{\boxed{(가)}}{a_{n+1}} \leq a_1+a_2+\cdots+a_n \ \cdots$ ㉠

를 얻는다.

n=k라 두고 양변에 Σ 주면

한편, 주어진 부등식 $a_1+a_2+\cdots+a_n \geq n \ \cdots\cdots \ (*)$ 에서

(i) $n=2$일 때,

$a_1+a_2 \geq \frac{1}{a_2}+a_2 \geq 2$ 이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $a_1+a_2+\cdots+a_k \geq k$ 라고 가정하면

$a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+a_{k+1} \ \cdots$ ㉡를 얻는다.

$a_{k+1} \geq \boxed{(나)}$인 경우

㉡에 의해 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+1$

이 성립하고,

$\sum_{k=1}^{k}(a_k) + a_{k+1} \geq k+1$

$a_{k+1} < \boxed{(나)}$인 경우

㉠에 의해 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq \frac{k}{a_{k+1}}+a_{k+1}$

$= \frac{k-1}{a_{k+1}}+\frac{1}{a_{k+1}}+a_{k+1}$

$\geq \frac{k-1}{a_{k+1}}+2 \ \cdots$ ㉢

이고, ㉢에 의해 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} \geq k+1$

이 성립한다. 따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2이상의 모든 자연수 n에 대하여

$a_1+a_2+\cdots+a_n \geq n$

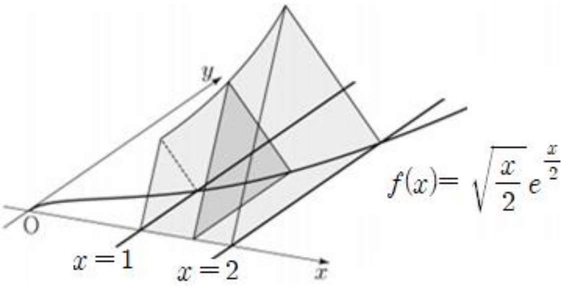
이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 수를 α라 할 때, $f(7)+\alpha$의 값은? [4점]

7+1

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

15. 그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}}$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형인 입체도형의 부피는? [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{16}e^2$ ② $\frac{\sqrt{3}}{8}e^2$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{16}e$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}e^2$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{16}e^2$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4}\{f(x)\}^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{8}\int_1^2 xe^x dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[(x-1)e^x\right]_1^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}e^2$$

16. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 적힌 7개의 공이 들어있는 주머니에서 1이 적힌 공이 나올 때까지 공을 하나씩 꺼내어 다시 집어넣지 않는 시행을 반복한다. 주머니에서 공을 4개 꺼내어 시행이 종료되었을 때, 2 또는 3이 적힌 공을 꺼내었을 확률은? [4점]

A B

① $\frac{13}{20}$ ② $\frac{7}{10}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{17}{20}$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = 1-\frac{P(A\cap B^c)}{P(A)}$$

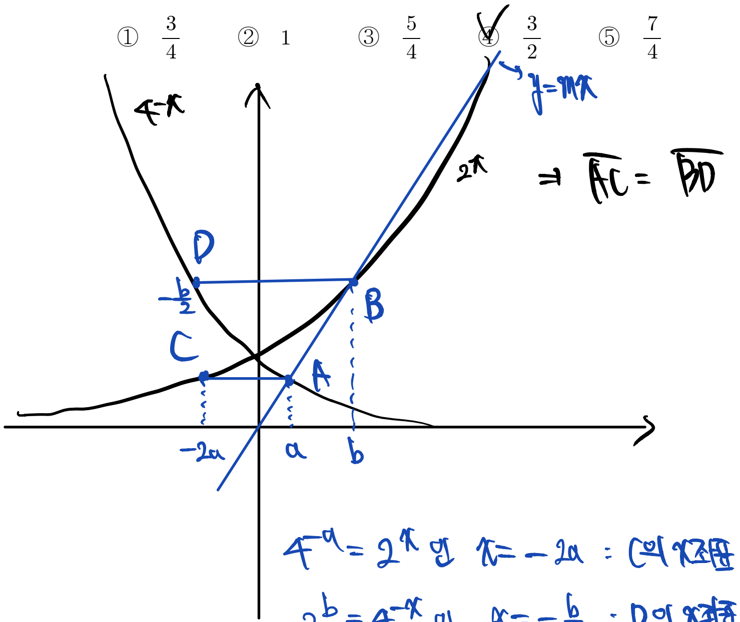
$$= 1-\frac{\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}{\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

* 사건 $A\cap B^c$는

4개 꺼내고 시행종료되며, 2와 3이 나오지 않는것.

17. 양의 상수 m에 대하여 좌표평면위의 직선 $y=mx$가 $y=4^{-x}$와 만나는 점 A, 2^x과 만나는 점 중 x좌표의 값이 작은 점 B / 점 A를 지나고 y축에 수직인 직선이 $y=2^x$의 그래프와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선이 $y=4^{-x}$의 그래프와 만나는 점을 D라 하자. 사각형 ABDC가 평행사변형일 때, $\log_2 m$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$



$\Rightarrow \overline{AC}=\overline{BD}$

$4^a=2^x$ 인 $x=-2a$: C의 x좌표

$2^b=4^{-x}$ 인 $x=-\frac{b}{2}$: D의 x좌표

$\overline{AC}=\overline{BD} \Rightarrow 3a=\frac{3}{2}b \Rightarrow b=2a$

$4^{-a}=ma$

$2^b=mb$

$4^a=2ma$

$4^{-a+\frac{1}{2}}=4^a$

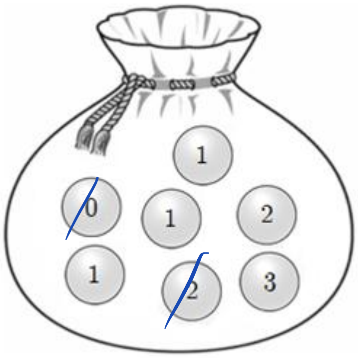
$a=\frac{1}{4}$

$\therefore m=\frac{4^{-a}}{a}=4\cdot 2^{-\frac{1}{2}}$

$=2^{\frac{3}{2}}$

$\log_2 m=\frac{3}{2}$

18. 그림과 같이 주머니에 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 세 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, 꺼낸 공에 적힌 세 수가 모두 같으면 $X=0$이다.) [4점]



① $\frac{52}{35}$ ② $\frac{54}{35}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{58}{35}$ ⑤ $\frac{12}{7}$

X로 가능한 값 : 3, 2, 1, 0

X	3	2	1	0
$P(X=x)$	$\frac{_5C_1}{_7C_3}$	$\frac{16}{_7C_3}$	$1-\frac{22}{_7C_3}$	$\frac{1}{_7C_3}$

$P(X=2) \Rightarrow \begin{cases} Max=3 \\ min=1 \end{cases}$ $\frac{1\times(_5C_2-_2C_2)}{_7C_3}=\frac{9}{_7C_3}$

32223 / 22111 중 2개 뽑기

− (2,2) 뽑는 경우 제외

or

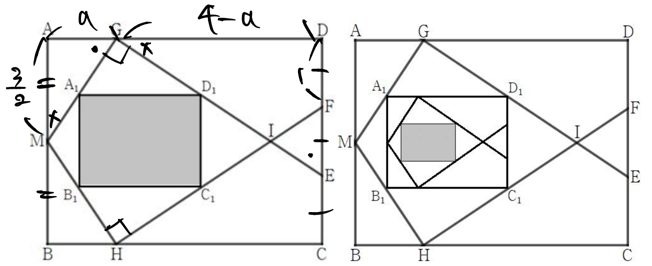
$\begin{cases} Max=2 \\ Min=0 \end{cases}$ $\frac{_2C_1\times{_3C_1}+{_2C_2}}{_7C_3}=\frac{7}{_7C_3}$

2, 1, 0 조합으로 가는 경우

⊕ 2, 0 조합으로 가는 경우

$\therefore E(X)=\frac{15+32+13}{_7C_3=35}=\frac{60}{35}=\frac{12}{7}$

19. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$인 직사각형 ABCD에 대하여 선분 AB의 중점을 M라 하고, 선분 CD를 삼등분 하는 점들 중 C에 가까운 순서대로 E, F라 하자. 선분 AD위의 점 G와 선분 BC위의 점 H를 $\angle MGE = \angle MHF = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 선분 GE와 선분 HF의 교점을 I라 하자. 선분 MG, MH, HI, GI위의 네 점 A_1, B_1, C_1, D_1을 사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 선분 A_1B_1와 선분 AB가 평행하고 $\overline{A_1B_1}:\overline{B_1C_1}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡았을 때, 사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이를 S_1이라하자.
직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에 대하여 같은 시행을 하여 얻은 사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이를 S_2라 하자.
이와 같은 시행을 반복하여 얻은 사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, $\angle AMG = \angle BMH < \frac{\pi}{4}$) [4점]

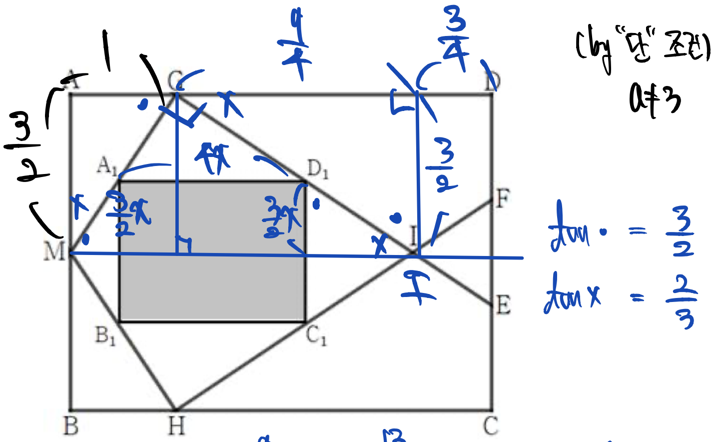


① $\frac{169}{56}$ ② $\frac{85}{28}$ ③ $\frac{171}{56}$ ④ $\frac{43}{14}$ ⑤ $\frac{173}{56}$

$\triangle AMG \sim \triangle DGE$ (AA)

$\frac{3}{2} : a = 4-a : 2$

$a^2-4a+3=0$
a -3
a -1
$a=1$
(by "단" 조건) $a \neq 3$



$\tan \cdot = \frac{3}{2}$
$\tan x = \frac{2}{3}$

$4x + x + \frac{9}{4}x = \frac{13}{4}$

$x = \frac{13}{29}$

$r = \frac{4x}{4} = x$
$a = 12x^2$

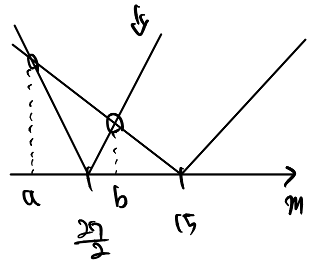
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{a}{1-r^2} = \frac{12x^2}{1-x^2} = \frac{12\times13^2}{29^2-13^2} = \frac{12\times13^2}{42\times16} = \frac{169}{56}$

20. 확률변수 X는 정규분포 $N(m, 4^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $N(2m, 4^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다. $f(15) \leq g(27)$을 만족시키는 자연수 m 에 대하여 $P(X \leq 18)+P(18 \leq Y)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

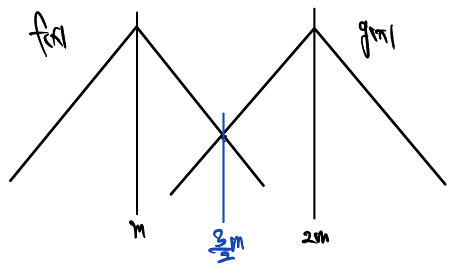
① 1.7745 ② 1.8185 ③ 1.8664 ④ 1.9104 ⑤ 1.9544

$f(15) \leq g(27) \Rightarrow |15-m| \leq |27-2m|$



만족시키는 m의 범위 $\begin{cases} m \leq a \\ m \geq b \end{cases}$

a: $-m+15 = -2m+27 \Rightarrow a=12$
b: $-m+15 = 2m-27$ $b=14$ → $m \leq 12$ or $m \geq 14$



$P(X \leq 18) + P(Y \geq 18)$
→ 정규분포 곡선의 대칭성과 m의 범위를 고려하면…
$\frac{3}{2}m = 18$ 일 때 "최대"

$m=12$. → $P(X \leq 18) + P(Y \geq 18)$
$= 0.5 + 0.4332 + 0.5 + 0.4332$
$= 1.8664$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} e^{x}(x-2)^2 & (x \ge 0) \\ f(x) & (x<0) \end{cases}$$

에 대하여 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $g(x), h(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

(가) 함수 $h(t)$는 두 점에서만 불연속이다.
(나) $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(0)=4$ or -4 / $f'(0)=0$

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

$f(0)=4$ 로 $g(x)$가 실수전체에서 미분가능하게 되면,

$\lim_{x\to-\infty} f(x) < 0$ 이므로, $g(x)$ $x<0$ 에서 실근 발생

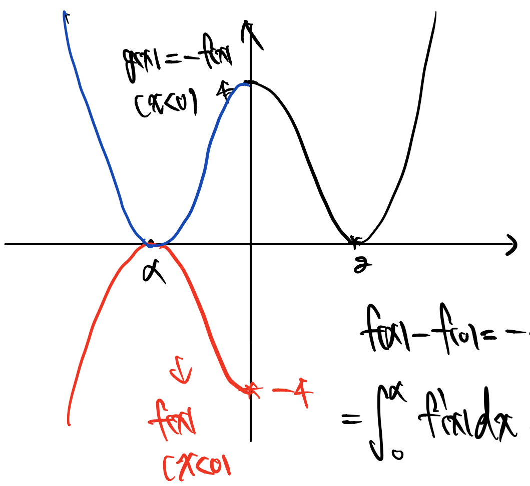
⇒ (나)에 모순. ⇒ $f(0)=-4$

(가)조건을 생각해보자. $g(x)$는 점근선이 없는 함수이므로,

$h(t)$의 불연속점은 $g(x)$가 극값 가질때만 발생된다.

즉, (가)조건은 $g(x)$가 극값을 "2개 갖는다." 로 해석할수 있고,

이미 $g(x)$가 극값 0을 가짐을 고려하면 가능한 경우는 아래와 같다.



$f(\alpha)-f(0)=-4$

$=\int_0^{\alpha} f'(x)dx = \frac{3}{6}(\alpha-0)^3$ (이차함수 넓이공식 $\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$)

$\alpha=-2$

∴ $f(x)=(x+2)^2(x-1)$ (by 비율관계) $f(-1)=-2$

단답형

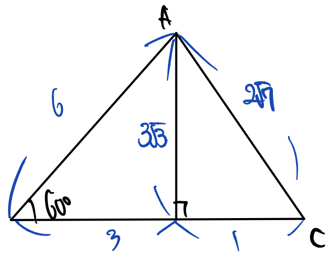
22. 모평균이 20이고 모표준편차가 9인 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $E\left(\overline{X}^2\right)$의 값을 구하시오. [3점]

$E(\overline{X}^2) - \{E(\overline{X})\}^2 = V(\overline{X})$

$E(\overline{X}^2) - 400 = \frac{9^2}{9} = 9$

∴ 409

23. 예각삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=2\sqrt{7}$이고, $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$일 때, 선분 BC의 길이를 구하시오. [3점]



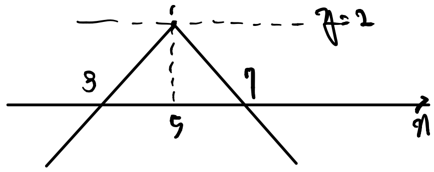
$\overline{BC} = 3+1 = 4$

24. 자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때,

$$2-|n-5|$$

의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

'양수'의 '짝수' 제곱근
or '음수'의 '홀수' 제곱근.



양수: $n=4\sim6$ 짝수: 4, 6

음수: $n=2, 7\sim11$ 홀수: 7, 9, 11

$\boxed{\therefore 30}$

25. $0<x<\pi$에서 정의된 함수

$$f(x)=5\sin x\cos x-12\sin x+8$$

의 변곡점의 좌표는 $(\alpha, f(\alpha))$이다. $30f(\alpha)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x) = 5\cos^2 x - 5\sin^2 x - 12\cos x$

$f''(x) = -10\cos x\sin x - 10\sin x\cdot\cos x + 12\sin x$

$= -20\cos x\cdot\sin x + 12\sin x$

$= \underset{\neq 0}{4\sin x}\,\{\underset{= 0}{-5\cos x + 3}\}$

$\Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}$일때 변곡

$f(\alpha) = 5\cdot\frac{3}{5}\times\frac{4}{5} - 12\cdot\frac{4}{5} + 8 = \frac{12}{5} - \frac{48}{5} + 8$

$= 8 - \frac{36}{5}$

$= \frac{4}{5}$

$\therefore 30f(\alpha) = 24$

26. 함수 $f(x)=|\sin^2 x-\cos x|$에 대하여 x에 대한 방정식

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오. (단, $0<x<3\pi$) [4점]

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=0$: $x = \begin{cases} \text{극값} \\ \text{절댓값에 의한 실근.} \end{cases}$

$f(x) = |1-\cos^2 x - \cos x|$

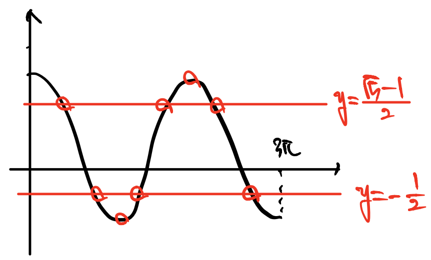
$= |\cos^2 x + \cos x - 1| = |x^2+x-1| \circ \cos x$

$x=-\frac{1}{2}$ 극값.

$x^2+x-1=0$ 의 실근: $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$ $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1 \to$ out.

$0 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$



교점 6개

⊕

cos x의 극점 X 2개

∴ 8개

27. 1부터 10까지 자연수가 적힌 10개의 공이 들어있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 공에 적혀있는 수를 a , 1부터 n까지 자연수가 적힌 n개의 공이 들어있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 공에 적혀있는 수를 b라 할 때, $a<b$인 사건을 A라 하고, a와 b중 4의 약수가 존재하는 사건을 B라 하자. 사건 A, B가 서로 독립이 되도록 하는 n의 값을 구하시오. (단, $n \geq 10$) [4점]

사건B가 너무 복잡 → B^c를 고려해보자.

A,B독립 → A,B^c독립 → $P(A)\cdot P(B^c) = P(A\cap B^c)$

A: $a<b$ 이므로

$$P(A) = \frac{(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-10)}{{}_{10}C_1 \times {}_nC_1} = \frac{10n-55}{10n} = \frac{2n-11}{2n}$$

B^c: a,b 중 4의 약수 존재X

$$P(B^c) = \frac{7}{10}\times\frac{n-3}{n}$$

$A\cap B^c$: $a<b$ 이면서 a,b 중 4의 약수 존재X

$$P(A\cap B^c) = \frac{(n-4)+(n-5)+\cdots+(n-10)}{{}_{10}C_1 \times {}_nC_1} = \frac{7(n-7)}{10n}$$

∗ $P(A)\cdot P(B^c) = P(A\cap B^c)$

$$\to \frac{2n-11}{2n}\times\frac{7(n-3)}{10n} = \frac{7(n-7)}{10n}$$

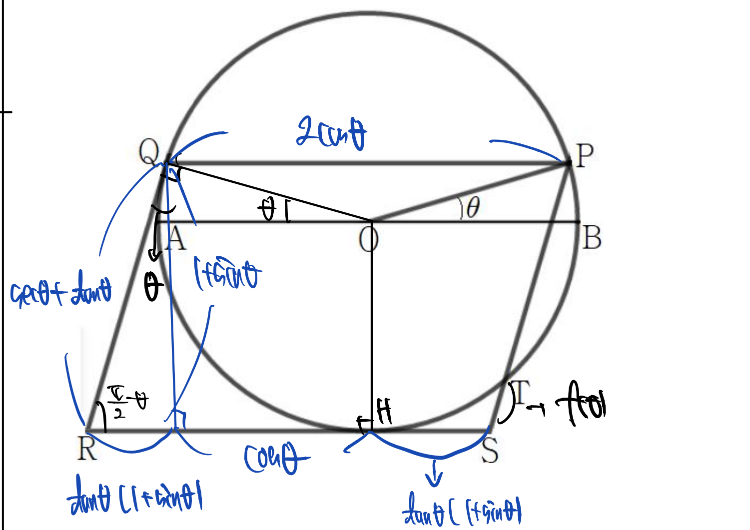
$$\Rightarrow 2n^2-17n+33 = 2n^2-14n$$

$\therefore n=11$

28. 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 점 P를 지나고 직선 AB와 평행한 직선이 원과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q에서의 접선 위의 점 R과 직선 QR과 평행하고 점 P를 지나는 직선 위의 점 S를 직선 RS가 원에 접하고 사각형 PQRS가 평행사변형이 되도록 잡는다. $\angle POB=\theta$일 때, 직선 PS가 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점 T에 대하여 선분 ST의 길이를 $f(\theta)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{6}-}\frac{f(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)^2}$의 값을 k라 할 때, $4k^2$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]



할선정리 : $\overline{HS}^2 = \overline{ST}\times\overline{SP}$

$$\Rightarrow \{\cos\theta-\tan\theta(1+\sin\theta)\}^2 = f(\theta)\times\{\sec\theta+\tan\theta\}$$

$$\to f(\theta) = \frac{\{\cos\theta-\tan\theta(1+\sin\theta)\}^2}{\sec\theta+\tan\theta}$$

미분계수의 정의

$$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{6}-}\frac{f(\theta)}{(\theta-\frac{\pi}{6})^2} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{6}-}\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}\times\left\{\frac{\cos\theta-\tan\theta(1+\sin\theta)}{\theta-\frac{\pi}{6}}\right\}^2$$

$$\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

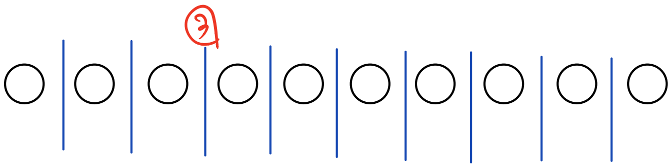
$$= -3\sqrt{3}$$

$4k^2 = 108$

29. 그림과 같이 흰 공 4개, 검은 공 4개, 회색 공 2개를 왼쪽에서부터 차례대로 나열한다. 왼쪽에서부터 차례대로 읽은 공의 색이 3번만 바뀌도록 공들을 나열하였을 때, 왼쪽에서부터 세 번째에 있는 공의 색과 네 번째에 있는 공의 색이 다를 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

A

B



공 10개 사이의 칸막이는 총 10개

A: 이중 3개를 선택 ⇒ 공의 색 3번전환.

B: 3~4번째 공의 색이 다른 경우, ③ 번 칸막이를 선택하면됨.

공의 색을 배열하는 경우는 n(A), n(A∩B) 둘다 3! → 어차피 약분됨.

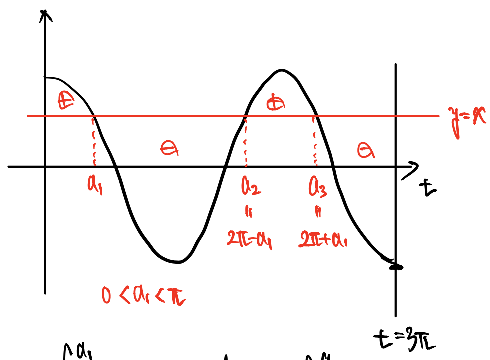
$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{n(A\cap B)}{n(A)} = \frac{1\times{}_8C_2}{{}_9C_3} = \frac{1}{3}$$

$\therefore 4$

30. 열린구간 $(-1,1)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\int_0^{3\pi} t\times|\cos t - x|\,dt$$

는 $x=\alpha$에서 극값을 갖는다. $0<k<\pi$인 $\cos k=\alpha$를 만족시키는 상수 $k=(-4+\sqrt{a})\pi$일 때, $2a^2$의 값을 구하시오. [4점]



$$f(x) = \int_0^{a_1} t(\cos t - x)\,dt + \int_{a_2}^{a_1} t(\cos t - x)\,dt + \int_{a_2}^{a_3} t(\cos t - x)\,dt + \int_{3\pi}^{a_3} t(\cos t - x)\,dt$$

→ 극값 판정을 위해 변수분리 후 미분

$$f'(x) = -a_1^2 + \underbrace{a_2^2 - a_3^2}_{-8\pi a_1} + \frac{9\pi^2}{2}$$

$$= -a_1^2 - 8\pi a_1 + \frac{9\pi^2}{2} = 0$$ 인 a_1을 찾자.

(이때의 a_1이 $\cos k=\alpha$를 만족시키는 k값이다.)

$$a_1 = -4\pi \pm \sqrt{16\pi^2 + \frac{9}{2}\pi^2}$$
$$= -4\pi + \pi\cdot\sqrt{16+\frac{9}{2}}$$
$$= \pi\left\{-4 + \underbrace{\sqrt{16+\frac{9}{2}}}_{a}\right\}$$

$\therefore 2a^2 = 41$

2021학년도 우주설 모의평가 시리즈

설바이벌 1회

발행일 : 2020년 9월 19일
펴낸이 : 정재민(우주설)

지은이 : 정재민(우주설)

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.